Phil. 3342. a.

Matheſis. Statica et Mechanica
corp. solid. A89.

Math. a. 122

R

Syſtem

der

reinen und angewandten

Mechanik

feſter Körper

Von

J. J. A. Ide,

Doktor der Philoſophie und Mitglied der phyſikaliſchen Geſellſchaft
zu Göttingen.

Erſter Theil.

Berlin,
bei Heinrich Frölich. 1802.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Die

Statik,

oder die

Lehre vom Gleichgewichte feſter Körper.

Erſter Theil.

Vorrede.

Die Mechanik verdient mit gleichem Rechte einen Platz in dem Gebiete der reinen Größenlehre, als man die Geometrie dahin zu rechnen gewohnt iſt. Sie hat, wie dieſe, ihre eigenthümlichen Grundſätze, von denen kein einziger aus der trüben Quelle der Erfahrung geſchöpft werden darf: ſo wenig, als man es ſich je wird einfallen laſſen, den eilften Grundſatz Euklids empiriſch darthun zu wollen. Ihre Begriffe

von Kraft und Bewegung ſind eben der Evidenz fähig, als Raum und Ausdehnung, und das mechaniſche Bild vom feſten Körper ſteht in Hinſicht auf Abſtraktion und Beſtimmtheit dem Körper des Geometers vollkommen zur Seite.

Dies alles haben unſere weſtlichen Nachbaren, die überhaupt einen feinern Sinn für ſchickliche Behandlung verrathen, ſchon längſt gefühlt, und daher die Mechanik mit weit mehr Methode bearbeitet, als wir Deutſchen zu thun pflegen. Sie ſtellen die Sätze derſelben in ächter Reinheit dar, laſſen ſie genau in der ſyſtematiſchen Ordnung folgen, wie einer den andern herbeyführt, und geben ihnen ſämmtlich die Allgemeinheit, deren ſie nur immer fähig ſind. In unſern deutſchen Lehrbüchern der Mechanik iſt man dagegen gleich beym Anfange gar zu ängſtlich darauf bedacht, alles in das Gewand von Nutzanwendung einzuzwängen, wird dadurch genöthigt, den Zuſchnitt zu kärglich zu machen, und verſchließt ſich

ſo den Weg zu höhern Wahrheiten, die gerade an intereſſanten Folgen die fruchtbarſten ſind.

Ich bin weit entfernt, für das bloß Speculative zu ſtimmen. Die Mechanik läuft in ſo viele Zweige aus, die mit dem gemeinen Wohl innigſt verflochten ſind, daß man dem Stamme eine große Zierde raubt, wenn man ihn von dieſen völlig entblößen will. Zudem gewinnen auch die allgemeinen Sätze der Theorie nur dann dem Lernenden ein wahres Intereſſe ab, wenn man ſie mit der reichen Fülle ihrer Anwendungen in einige Verbindung ſetzt; erſt durch die vielen nützlichen Folgen, die ſich aus ihnen entwickeln laſſen, bekommt man eine deutliche Anſicht von ihrem innern Werthe, und nur durch öftere Wiederhohlung derſelben bey ihrem Gebrauche kann man mit ihnen vertrauter werden.

Solche und ähnliche Vorzüge ſind ausſchließend der gemiſchten Lehrmethode eigen,

und erheben ſie, ſowohl für den Unterricht, als beym Selbſtſtudium, weit über den bloß theoretiſchen Vortrag, ſobald man dabey die Vorſicht gebraucht, unter der großen Zahl von Anwendungen die inſtruktivſten auszuwählen, ſie ſo kurz abzufaſſen, als es die Umſtände erlauben wollen, und alles ſorgfältig zu vermeiden, was zu weit ins Detail führen könnte. Es hält in der That ſchwer, dieſen Mittelweg, wie ich ihn bey Bearbeitung des vorliegenden Werkes mir vorgezeichnet habe, bis ans Ende mit gleicher Strenge und Beharrlichkeit zu verfolgen, und ich mag nicht entſcheiden, ob nicht vielleicht ſubjektive Vorliebe für manchen beſondern Gegenſtand, vorzüglich ſolchen, wobey ich mir ſelbſt überlaſſen war, mich zuweilen unvorſätzlich davon entfernt hat.

So viel von dem, was die Behandlung betrift. In Anſehung der Materien ſelbſt habe ich noch einige Bemerkungen beyzufü-

gen, wozu ſich im Buche mir keine paſſende Gelegenheit darbot.

Die Verlegung der Kräfte auf beliebige Punkte ihrer Richtungen iſt eine Eigenſchaft des Gleichgewichts, die wegen ihrer zu großen Einfachheit ſelten beachtet, und in den meiſten Syſtemen als unbedeutend übergangen wird. Gleichwohl beruhen doch auf ihr die beyden wichtigſten Sätze der Statik; die Zuſammenſetzung der Kräfte, und das Prinzip der virtuellen Geſchwindigkeiten; und von ſo manchen Aufgaben wird durch Zuziehung derſelben die Auflöſung beträchtlich abgekürzt, wovon ich nur hin und wieder einzelne Beyſpiele gegeben habe. Dahin gehören: der ſchiefe Zug am Hebel §. 57., der krummlinigte Hebel §. 59., das Rad §. 97., und beſonders im zweyten Theile: der Widerſtand der Luft bey drehender Bewegung §. 269., wo der Vortheil, den ſie gewährt, höchſt auffallend iſt.

Mehrere Anwendungen derſelben zeigt Friſi in ſeiner Mechanik, *) der von ihr bey den ſchwerſten Unterſuchungen mit glücklichem Erfolge häufigen Gebrauch gemacht hat.

Die Lehre von der Vertheilung des Drucks, den Körper auf darunter liegende Punkte und Flächen ausüben, habe ich in einem eigenen Kapitel abgehandelt, weil ſie der Theorie rechtmäßig angehört, und wegen ihrer vielfachen Anwendung auf Fälle des gemeinen Lebens von großer Wichtigkeit iſt. Sie ſcheint bey den jetzigen Mechanikern wieder in Vergeſſenheit zu kommen, oder doch wenigſtens, ſeitdem Delanges ſie aufs Neue durch vergebliche Unterſuchungen in Anregung brachte, aus dem Bezirke der ſicheren Wahrheiten verbannt zu ſeyn. Dies Schickſal verdient ſie aber auf keine Weiſe, und ich habe mich um

*) Friſii Op. math. P. II.

ſo eifriger bemühet, ihr Gerechtigkeit wider-fahren zu laſſen.

Die Spannung der biegſamen Fäden macht ebenfalls einen eigenen Gegenſtand der reinen Mechanik aus, der von dem unſterbli-chen Euler, ſo wie der vorhergehende, und ſo viele andere, zuerſt aus ſeinem Dunkel her-vorgezogen, und durch die ihm eigene geiſt-volle Behandlung ſogleich zur höchſten Klar-heit erhoben wurde. Ihm ſind darin die mei-ſten Franzoſen gefolgt, und haben zugleich, (was wohl nicht fehlen konnte) die Zahl der einfachen Maſchinen mit einer neuen, der Seilmaſchine (Machine funiculaire) be-reichert. Bey uns hat bisher keiner das Gleich-gewicht und die Bewegung biegſamer Körper in ſein Syſtem aufgenommen; wenn ich et-wa Herrn Bürja ausnehme, der davon in ſei-ner Statik die erſten Gründe vorgetragen,

aber doch dabey Eulers allgemeine Theorie nicht benutzt hat.

Den Beſchluß der Statik macht das Princip der virtuellen Geſchwindigkeiten, dem ich nach reiferer Ueberlegung keine ſchicklichere Stelle, als dieſe, anzuweiſen hatte. Es ſetzt nemlich offenbar zu viele Kenntniſſe voraus, als daß man es unter den erſten Sätzen der Statik gleich Anfangs mit Nutzen aufſtellen könnte, und wenn man in einem Lehrbuche ſogar das ganze Syſtem darauf gründen wollte, ſo wäre dies Verfahren gewiß eben ſo zweckwidrig, als die Demonſtration der Elementarſätze der Geometrie durch Hülfe des Infiniteſimal-Kalkuls. Seine Wichtigkeit bey höheren Unterſuchungen zeigte zuerſt Lagrange in ſeiner Mechanik, und erregte dadurch das allgemeine Verlangen nach einem gründlichen Beweiſe deſſelben. Den er-

ſten Schritt hierzu that Foſſombroni *); erreichte aber doch bey weitem nicht, was nach ihm Laplace mit weit geringerem Aufwande von Kalkul geleiſtet hat **). Ich habe ſeinen Beweis, ſo weit er die feſten Körper betrifft, umſtändlich entwickelt, und zugleich den Gebrauch des Satzes in einzelnen Fällen zu zeigen geſucht.

Aus dem zweyten Theile will ich hier nur die beyden Hauptpunkte: d'Alemberts Princip, oder die Zurückführung der Bewegungsgeſetze auf das Gleichgewicht, und die Umdrehung der Körper um freye Axen, ausheben.

Was erſteres betrift, ſo ſcheint dies noch zur Zeit ſich nicht weit über Frankreichs Grenzen hinaus verbreitet zu haben. Weder Käſtner, Karſten, noch ſonſt ein Deutſcher Schriftſteller gedenken ſeiner auch nur mit einer Syl-

*) Sul princip. delle velocità virtuali.

**) Traité de mecanique céleſte Tom. I. Liv. I.

be, und ſelbſt Euler, der an der Erweiterung der Mechanik ſo thätigen Antheil nahm, fing erſt bey ſeinen ſpäteren Abhandlungen an, davon Gebrauch zu machen. Da ich dieſen wichtigen Grundſatz beym jetzigen Zuſtande der Mechanik für ganz unentbehrlich halte, ſo habe ich vom fünften Kapitel an alles Nachfolgende darauf gegründet; ſtelle ihn aber unter der Form dar, die Euler ihm gegeben hat, und die mir natürlicher zu ſeyn ſcheint, als die urſprüngliche d'Alembertiſche; wodurch ich zu ſeiner Aufnahme einiges beyzutragen hoffe.

Eine einfache Ableitung aus ihm iſt die Theorie des Beharrungszuſtandes (S. 128.), wovon man ſich ohne ſeine Hülfe durchaus keine richtige Einſicht verſchaffen kann. Auf dieſe Lehre habe ich das folgende Kapitel von den Arbeiten der Menſchen und Thiere gebauet, und die längſt adoptirte Formel (§. 133) der Empirie abgewonnen. Da die Unterſuchungen

Borelli's, Parent's und Lambert's über eben den Gegenſtand zu keinen Reſultaten führen, und auch zum Theil auf Vorausſetzungen beruhen, denen ich auf keine Weiſe beypflichten kann: ſo wird man es mir verzeihen, daß ich ihrer im Buche keine Erwähnung gethan habe.

Die Geſetze der Umdrehungen feſter Körper um Axen laſſen ſich ebenfalls auf das Gleichgewicht zurückführen, wie ich § 199. 240 u. f. gezeigt habe. Indeß wird doch dies Verfahren bey beweglichen Axen, wiewol es auch da noch vor allen ſonſt bekannten den Vorzug verdient, etwas komplicirt, und läßt ſich des vielen Kalkuls wegen, der dabey unvermeidlich iſt, nicht wohl in ein Lehrbuch aufnehmen. *) Das veranlaßte mich, einen ganz neuen Weg zu betreten, und von dem Grundſatze auszugehen, daß ſich die Winkel-

*) S. Eulers Theoria motus corp. rigid. Cap. XV.

geſchwindigkeiten, wie die geradlinigten, zu- ſammenſetzen und zerlegen laſſen. Dieſe un- gemein ſchöne Erfindung, die ſich aus Italien herſchreibt, macht die drehende Bewegung zu gleicher Behandlung fähig, als die fortrücken- de, und leitete mich auf die einfachſte Art zu allen den wichtigen Sätzen, zu denen Euler durch das vorhin gedachte Verfahren gelangt iſt.

Göttingen im Juni 1802.

J. J. A. Ide.

Inhalt
des erſten Theils.

Erſtes Kapitel. Allgemeine Betrachtung der Kräfte im Zuſtande des Gleichgewichts.

Kraft und Richtung derſelben . . . §. 1.
Gleiche und entgegengeſetzte Kräfte heben einander auf . . . . — 2.
Gleichgewicht . . . . — 4
Vereinigung, Trennung, Vergleichung der Kräfte — 6.
Druck; Widerſtand . . . . . . — 8.
Umänderung des Gleichgewichts ohne Störung deſſelben . . . . — 10.
Gleichgewicht dreyer Kräfte an der unbiegſamen Linie . . . . — 12.
Vertheilung einer Laſt auf zwey Punkte — 17.
Der Hebel . . . . — 20.
Aequipollente Kräfte . . . . . — 25.

Gleichgewicht mehrerer Kräfte am Hebel . §. 27.
— — an der unbiegſamen Linie überhaupt — 30.
Phyſiſcher Hebel . . . . . . — 34.
Der Winkelhebel . . . . . . — 42.

Zweytes Kapitel. Von der Zuſammenſetzung und Zerlegung der Kräfte.

Verlegung der Kraft auf beliebige Punkte ihrer Richtung . . . . . . — 45.
Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts dreyer auf einen Punſt wirkender Kräſte . . — 47.
Beſtimmung der mittlern Kraſt . . — 49.
Zerlegung der Kräfte . . . . . — 54.
Beſtimmung des wirkſamen Theils einer Kraſt — 56.
Schiefer Zug am Hebel, und krummlinigter Hebel . . . . — 57.
Zuſammenwirkung mehrerer Kräfte auf einen Punkt . . . . — 60.
Gleichgewicht der Kräfte an einer feſten Axe — 64.
Druck, den die Axe leidet
— von ſenkrechten Kräften . . . — 69.
— — ſolchen, die der Axe parallel ſind — 71.

Drittes Kapitel. Vom Schwerpunkte feſter Körper.

Feſter Körper im mechaniſchen Betracht. . — 73.
Allgemeine Beſtimmung des Schwerpunkts nach dreyen Koordinaten . . . . . . — 73.
Schwerpunkt homogener Körper . . . — 83.
Die Wage . . . . — 98.

Stabilität des Körpers auf horizontalem Boden . . . . §. 109.
Gleichgewicht auf der ſchiefen Fläche . — 116.
Stabilität eines Körpers auf derſelben . — 119.
Das Wälzen runder Körper . . . — 123.
Anzuwendende Kraft um Räder über hervorragende Hinderniſſe zu ziehen . . . — 125.
Vom Drucke der Dächer . . . . . — 128.
Sperrung derſelben . . . . . . — 132.
Gebrochene Dächer . . . . . . — 136.

Viertes Kapitel. Von der Vertheilung des Drucks auf mehrere Punkte und zuſammenhängende Flächen.

Vertheilung deſſelben auf drey Punkte, die nicht in gerader Linie liegen . . . . — 140.
Unzulänglichkeit der bisherigen Theorie, wenn ſie in eine gerade Linie fallen . . — 142.
Grundſatz der möglichſt gleichförmigen Vertheilung . . . . — 144.
Eulers Theorie . . . . . — 145.
Einheit des Drucks . . . . — 153.

Fünftes Kapitel. Von der Spannung biegſamer Fäden.

Spannung . . . . — 160.
Gleichgewicht dreyer Kräfte am Faden . — 162
Wirkung der Zugſeile beym Zuge der Thiere — 163.
Gleichgewicht mehrerer Kräfte am Faden . — 165.

Krümmung eines Fadens, der einer kontinuirlichen Reihe von Kräften ausgeſetzt iſt . §. 169.
Die Rolle . . . . — 173.
Die Schleiſe, oder der bewegliche Knoten . — 175.
Der Rollenzug . . . . — 178.
Der Flaſchenzug . . . . . . — 183
Krümmung des Fadens durch ſein eigenes Gewicht; Kettenlinie . . . . . . — 189.

Sechſtes Kapitel. Vom Räderwerke.

Das Rad an der Welle . . . . . — 193.
Verſchiedene Formen deſſelben . . . — 195.
Zuſammengeſetzte Winde . . . . . — 204.
Gezähntes Rad . . . . — 208.
Form der Radzähne . . . . . . — 213.
Pechſtämpfer . . . . — 230.
Eingreifen der Triebſtöcke. . . . . — 233.

Siebentes Kapitel. Von der Schraube.

Die Schraubenlinie . . . . . . — 236.
Die äußere Schraube . . . . . . — 239.
Die innere oder Schraubenmutter . . . — 241.
Arten der verbundenen Schraube,
wenn bloß die äußere beweglich iſt . — 243.
wenn bloß die innere beweglich iſt, die Preſſe — 245.
wenn beyde beweglich ſind, die Schraube an der Axe . . . . — 246.
Die Schraube ohne Ende . . . . . — 248.
Zuſammengeſetzte Schrauben . . . . — 251.

Achtes Kapitel. Vom Keile.
Wirkungsart deſſelben . . . . §. 256.
Gleichgewicht beym Keile . . . . — 257.
Druck der Gewölbe gegen ihre Widerlagen — 259.
Gedruckte Bögen . . . . . — 265.
Gewölbe mit Bekleidung . . . . — 268.

Neuntes Kapitel. Von der Cohäſion feſter Körper.
Abſolute Feſtigkeit undehnbarer Körper . — 272.
Stärke des Holzes . . . . — 275.
Stärke der Seile . . . . . — 277.
Reſpektive Feſtigkeit . . . . . — 281.
Feſtigkeit ſteinerner Mauern . . . — 286.
Feſtigkeit dehnbarer und elaſtiſcher Körper — 290.
Reſpektive Feſtigkeit des Holzes . . — 296.
— — cylindriſcher Körper — 300.
— — der Ketten . . — 301.
Widerſtand, den elaſtiſche Körper beym Zuſammendrücken ausüben . . . . — 302.

Zehntes Kapitel. Von der Friktion.
Geſetze derſelben . . . . . — 312.
Friktion eines Körpers, der auf horizontalem Boden fortgezogen wird . . . — 317.
Friktion auf der ſchiefen Fläche . . . — 319.
— bey der Schraube . . . — 322.
— eines Seiles, das ſich um einen cylindriſchen Körper ſchlägt . . . — 324.
— der Zapfen in den Pfannen . . — 326.

Friktion bey der Wage . . . . . §. 334.
— bey ſtehender Welle . . . . — 336.
— beym Räderwerke . . . . — 338.
— der wälzenden Bewegung . . . — 344.
Friktions-Kugeln . . . . . . — 349.
Friktions-Räder . . . . . . — 350.

Eilftes Kapitel. Prinzip der virtuellen Geſchwindigkeiten.

Gleichgewicht mehrerer auf einen Punkt wirkender Kräfte . . . . . . — 353.
— am feſten Körper . . . . — 355.
— an einem Syſteme, deſſen Punkte zum Theil in keiner Verbindung ſtehen . — 359.
— deſſen Punkte theils durch Fäden zuſammenhängen . . . . . — 361.
Der gemeinſchaftliche Schwerpunkt mehrerer Gewichte liegt dann entweder am höchſten oder tiefſten, wenn ſie mit einander im Gleichgewichte ſind. . . . . — 365.

Erſtes

Erſtes Kapitel.

Allgemeine Betrachtungen der Kräfte im Zuſtande des Gleichgewichtes.

§. 1.

Unter **Kraft** verſteht man im Allgemeinen jedes Beſtreben, Bewegung hervorzubringen, es ſey nun, daß Umſtände ſie zulaſſen, oder verhindern. Die gerade Linie, nach welcher eine Kraft den Körper, auf den ſie wirkt, forttreibt, heißt ihre **Richtung**.

So iſt das Fallen der Körper die Wirkung einer Kraft, die man die Schwere nennt, und deren Richtung vertikal niederwärts, oder nach einer auf den ebenen Boden ſenkrechten Linie geht. Ein Körper, der am Fallen gehindert wird, zeigt noch das Beſtreben zu ſinken durch ſein **Gewicht**, das nach Verhältniß ſeiner Maſſe, oder der größern und geringern Menge materieller Theile, die er in ſich enthält, verſchieden iſt. So wie nemlich die Maſſe eines Körpers durch Anhäufung fremder Theile zunimmt, vermehrt ſich ſein Gewicht; mehrere Körper, die man zugleich tragen will, erfordern die Vereinigung aller der Kräfte, die zu jedem,

einzeln genommen, nöthig wären. Dies könnte die Verſchiedenheit der Kräfte in Rückſicht ihrer Größe ſchon an ſich deutlich machen; allein da auf dieſen erſten Begriffen ſehr vieles beruht, ſo wird eine nähere Entwicklung derſelben nicht unnütz ſeyn.

§. 2.

Gleiche Kräfte heißen diejenigen, die auf einen und denſelben Punkt nach einerley Richtung angebracht, dieſelbe Wirkung hervorbringen, und alſo für einander ſubſtituirt werden können, ohne daß dadurch eine Aenderung verurſacht wird.

§. 3.

Zwey gleiche Kräfte, die auf einen materiellen Punkt nach entgegengeſetzten Richtungen wirken, erhalten denſelben in Ruhe.

Geſetzt nemlich, der Punkt bewegte ſich nach irgend einer Seite zu, ſo würde, wenn man die Kräfte verwechſelte, eben dieſe Bewegung nach entgegengeſetzter Seite erfolgen. Da nun die Verwechslung der Kräfte, ihrer Gleichheit zu Folge, die Wirkung derſelben nicht abändert, ſo folgt, daß auch ohne dieſe Verwechslung, beyde Bewegungen des Punktes nach entgegengeſetzten Richtungen ſtatt finden müßten. Dies iſt aber ein Widerſpruch, und alſo kann der Punkt nach keiner Seite ſich hinbewegen; er bleibt folglich in Ruhe.

§. 4.

Man ſagt allgemein von Kräften, die in einer ſolchen Verbindung ſtehen, daß ſie ihre Wirkungen ge-

gen einander aufheben, ſie ſtehen unter ſich im Gleichgewichte. Die Lehre vom Gleichgewichte macht einen beſondern Theil der Mechanik aus, den man die Statik nennt. Auf ihr beruhet die ganze übrige Theorie von den Kräften und ihren Wirkungen, weil ſie dieſelben gerade in dem Zuſtande betrachtet, der allein dazu paſſend iſt, ſie mit einander zu vergleichen, und unbekannte Kräfte aus bekannten zu beſtimmen.

§. 5.

Wenn zwey Kräfte, P und Q, die nach entgegengeſetzten Richtungen auf einen Punkt wirken, einander das Gleichgewicht halten, ſo müſſen ſie gleich groß ſeyn.

Man nehme eine dritte Kraft R = Q an, ſo kann man dieſe für Q ſubſtituiren, und es müſſen folglich auch P und R noch mit einander im Gleichgewichte ſeyn (2). Da nun auch Q und R gegeneinander gebracht, ſich im Gleichgewichte erhalten (3), ſo folgt, daß P und Q nach einerley Richtung dieſelbe Wirkung ausüben, und alſo gleich groß ſind (2).

§. 6.

Zwey Kräfte, die nach einerley Richtung auf Einen Punkt zuſammenwirken, vereinigen ſich zu Einer Kraft nach eben der Richtung: denn da beyde Kräfte den Punkt nach dieſer Richtung fortzutreiben ſtreben, ſo kann er nach keiner andern als dieſer fortgehen. Es muß alſo irgend eine Kraft geben, die eben das thut,

was beyde in Verbindung bewirken, und dieſe iſt ihnen zuſammengenommen gleich.

§. 7.

Hierauf gründet ſich die Vereinigung zweyer und mehrerer Kräfte zu einem Ganzen, wobey aber allemal erforderlich iſt, daß die einzelnen Theile nach gemeinſchaftlicher Richtung und auf einerley Punkt wirken. Zugleich erhellet nun auch, was es heiße, eine Kraft Q ſey n mal ſo groß, als eine andere P; ſie iſt es nemlich, wenn ſie ſich durch die Vereinigung von n Kräften hervorbringen läßt, deren jede = P iſt. Gegenſeitig iſt $Q = \frac{1}{n} P$, wenn n Kräfte, wovon jede ſo groß als Q iſt, erforderlich ſind, um zuſammengenommen eine Kraft = P zu geben.

§. 8.

Wenn eine Kraft mit andern im Gleichgewichte ſteht, ſo iſt ihre Wirkung zwar ſo lange aufgehoben, als das Gleichgewicht dauert, aber deshalb nicht vernichtet; man ſagt daher ſie übe gegen das, was ihr entgegenwirkt, einen **Druck** aus. Gewichte geben einen beſondern Fall der Art.

§. 9.

Ein ſolcher Druck kann auf zweyerley Art entſtehen; entweder durch Kräfte, die nach entgegengeſetzter Richtung ſtreben, und dabey gleich ſind (3), oder durch einen unbeweglichen Widerſtand. Wenn nem-

lich eine Kraft auf etwas wirkt, das nicht weichen kann, ſo wird ſie dadurch gehindert, eine Bewegung hervorzubringen, und artet ſo in einen Druck aus. Dieſes Aufheben der Kraft ſetzt aber von Seiten des Widerſtandes einen gleich großen Gegendruck voraus, ſo daß man unbewegliche Hinderniſſe als paſſive Kräfte zu betrachten hat, die ſich nur da äußern, wo eine Kraft auf ſie einwirkt, und dieſer alsdann gerade ſo ſtark widerſtehen, als ſie von derſelben gedrückt werden. Der Satz alſo: **daß jeder Druck allemal einen gleichen und entgegengeſetzten veranlaſſe,** paßt auf beyde Fälle, wo Druck ſtatt findet, und iſt daher allgemein.

§. 10.

Wenn man zu gegebenen Kräften, zwiſchen denen Gleichgewicht ſtatt findet, neue Kräfte hinzufügt, die ebenfalls unter ſich im Gleichgewichte ſtehen, ſo wird dadurch das Gleichgewicht nicht aufgehoben.

Weil nemlich dieſe hinzukommenden Kräfte ihre Wirkung gegeneinander aufheben, ſo werden ſie dadurch unfähig, auf die Verbindung der ſchon vorhandenen Kräfte auf irgend eine Art zu wirken, und es geſchieht alſo durch ihr Hinzukommen nichts, was das Gleichgewicht ſtören könnte.

§. 11.

Wenn gegenſeitig unter einer Verbindung von Kräften, die mit einander im Gleichge-

wichte ſtehen, einige vorhanden ſind, die für ſich einander das Gleichgewicht halten, ſo kann man dieſe von den übrigen trennen, ohne daß dadurch das Gleichgewicht unter den zurückbleibenden aufgehoben würde.

Denn dieſe Kräfte ſind für die andern ſo gut als nicht vorhanden, und können alſo zur Hervorbringung des Gleichgewichtes nichts beytragen, wenn es nicht zwiſchen den übrigen Kräften ſchon an ſich ſtatt findet.

§. 12.

Fig. 1. Es ſey ACB eine unbiegſame gerade Linie. An den Punkten A und B ziehen zwey gleiche Kräfte nach Richtungen Aa und Bb, die auf die Linie ſenkrecht ſind, niederwärts; dagegen ziehe in C, der Mitte von AB, eine doppelt ſo große Kraft nach entgegengeſetzter Richtung Cc aufwärts; ich behaupte, dieſe drey Kräfte werden einander gegenſeitig das Gleichgewicht halten.

Beweis 1) Man nehme Anfangs nur die beyden gleichen, auf A und B wirkenden Kräfte an, und betrachte den Punkt C als feſt, ſo daß die Linie ACB nicht weiter bewegbar bleibt, als daß ſie ſich um C drehen läßt.

2) Unter dieſen Umſtänden ſtehen die beyden Kräfte im Gleichgewichte: denn zöge die eine den Punkt A herab, ſo würde aus gleichem Grunde auch die andere den Punkt B herabziehen. Dadurch würde aber, weil C nicht weichen kann, die Linie gebogen; gegen die Vorausſetzung.

3) Beyde Kräfte ſtreben vereinigt, den Punkt C nach ihrer gemeinſchaftlichen Richtung fortzuziehen; er widerſteht alſo mit der doppelten Kraft nach entgegengeſetzter Richtung Cc.

4) Iſt daher dieſer Punkt beweglich, ſo erfordert das Gleichgewicht eine dritte Kraft nach Cc, doppelt ſo groß als jede der beyden andern: denn durch dieſe leidet der Punkt eben den Druck wie vorhin, und alles bleibt ungeändert.

5) Alſo halten genannte drey Kräfte einander an der Linie im Gleichgewichte.

§. 13.

Fig. 1. 1) Es ſey jetzt die Entfernung AC = 2 . CB; man mache EC = CB, ſo daß E die Länge des Arms AC halbirt, und laſſe auf E und B nach den ſenkrechten Richtungen Ee und Bb zwey Kräfte, jede = 2P, wirken, ſo hält eine Kraft = 4P, nach Cc angebracht, ihnen das Gleichgewicht (§. 12.).

2) Man bringe ferner auf A und C zwey Kräfte, jede = P, nach den ſenkrechten Richtungen Aa und Cγ, und dagegen in E eine Kraft = 2P nach Eε an, ſo heben auch dieſe ihre Wirkung gegen einander auf, und das Gleichgewicht bleibt noch wie vorhin. (§. 10.)

3) Unter dieſen Kräften heben ſich nun die in E von ſelbſt auf (1,2), und man kann ſie wegnehmen, ohne das Gleichgewicht dadurch zu ſtören (§. 11.). Eben ſo kann man der Kraft 4P, die nach Cc wirkt (1), den Theil P rauben, wenn man dagegen auch die

Kraft P, die nach Cγ angebracht war (2), fortnimmt.

4) Es bleiben alſo noch die Kräfte in A = P nach Aa; in B = 2P nach Bb, und in C = 3P nach Cc übrig, die mit einander im Gleichgewichte ſtehen. Von dieſen Kräften verhalten ſich, wie man ſieht, die in A und B verkehrt wie die Entfernungen AC und BC, und die mittlere, nach entgegengeſetzter Richtung, iſt ihnen zuſammen genommen gleich.

§. 14.

Geſetzt, es ſey für den Fall, wo AC = n . BC, und n irgend eine beſtimmte ganze Zahl iſt, erwieſen, daß an der Linie ACB die Kräfte P in A und nP in B, von der Summe beyder (n + 1) P, in C nach entgegengeſetzter Richtung angebracht, im Gleichgewichte erhalten werden, ſo gilt der Satz auch für n + 1, mithin für jede ganze Zahl n.

Es ſey nemlich AC = (n + 1) BC; man nehme wieder EC = BC, wie vorhin, ſo wird AE = n . BC. Bringt man daher auf A und C nach den Richtungen Aa und Cγ die Kräfte P und nP an, und ſetzt dieſen in E nach Eε ihre Summe (n + 1) P entgegen, ſo erhalten, der Annahme nach, dieſe drey Kräfte gegenſeitig einander im Gleichgewichte. Auch bleibt das Gleichgewicht, wenn man noch in E und B zwey Kräfte, jede = (n + 1) P, nach Ee und Bb, und in C die Kraft (2n + 2) P nach Cc hinzufügt, weil auch dieſe für ſich einander aufheben. Hier vernichten ſich nun

die gleichen und entgegengeſetzten Kräfte in E, und wenn man von der Kraft nach Cc ſo viel abnimmt, als die Kraft nach Cγ in ihr aufhebt, ſo bleibt nach Cc noch (n + 2) P übrig; alſo ſind wieder die Kräfte P und (n + 1) P in A und B mit der Kraft (n + 2) P in C nach entgegengeſetzter Richtung, im Gleichgewichte.

Das angegebene Geſetz erſtreckt ſich alſo auch auf die nächſte Zahl n + 1, wenn man es für irgend ein n vorausſetzt. Da es nun für n = 2 bewieſen iſt (§. 13.), ſo gilt es auch für n = 3 u. ſ. f., alſo überhaupt für jede ganze Zahl.

§. 15.

Man nehme jetzt an, die Entfernungen AC und BC haben das Verhältniß m : n zweyer ganzen Zahlen zu einander, und ſetze AC = m . EC, BC = n . EC, ſo ſtehen zwey Kräfte P und (m — 1) P, die auf A und C nach Aa und Cγ angebracht werden, mit ihrer Summe mP, die man ihnen in E nach Eε entgegenſetzt, im Gleichgewichte. Zu dieſen Kräften kann man noch zwey andere Q und nQ in B und E, nach den Richtungen Bb und Ee hinzufügen, ohne das Gleichgewicht zu ſtören, wenn man dagegen nur auf den Punkt C die Summe beyder = (n + 1) Q nach entgegengeſetzter Richtung Cc wirken läßt. Man ſetze nun nQ = mP, ſo heben ſich die entgegengeſetzten Kräfte in E einander auf, und zugleich wird die Kraft in B $= \frac{m}{n} . P$, und die in C nach Cc gerichtete, =

$\frac{(n+1)\,mP}{n} = (m + \frac{m}{n})\,P$. Nimmt man von letzterer den Theil $(m - 1)\,P$ hinweg, den die nach Cγ gehende Kraft in ihr aufhebt, ſo bleibt nach Cc noch die Kraft $(1 + \frac{m}{n})\,P$ übrig; alſo ſind auch hier die beyden Kräfte P und $\frac{m}{n}$ P nach Aa und Bb, die im verkehrten Verhältniſſe der Entfernungen AC und BC ſtehen, mit ihrer nach Cc wirkenden Summe $(1 + \frac{m}{n})\,P$ im Gleichgewichte; wodurch ſich das Geſetz (§. 14.) allgemein auf jedes Verhältniß der Entfernungen ausdehnt.

Es iſt nemlich klar, daß auch irrationale Verhältniſſe hierunter begriffen ſind, weil man jedes irrationale Verhältniß m:n als ein rationales anſehen kann, deſſen Glieder m und n unendlich ſind, oder dem man ſich dadurch ins Unendliche nähern kann, daß man eins von ihnen n, ins Unendliche wachſen läßt.

§. 16.

Fig. 1. **Gegenſeitig folgt, daß wenn zwiſchen drey Kräften P, Q und R, die an einer unbiegſamen geraden Linie AB nach ſenkrechten Richtungen Aa, Bb, Cc ziehen, Gleichgewicht ſtatt findet, die beyden äußern P und Q zuſammen genommen ſo groß als die mittlere R ſeyn, und ſich verkehrt wie die Entfernungen AC und BC verhalten müſſen.**

Beweis 1) Die Kräfte P und Q, da ſie der Kraft R das Gleichgewicht halten, wirken auf den Punkt C mit einer Kraft = R nach entgegengeſetzter Richtung Cγ. Wenn man alſo die Kraft R wegnimmt, und ſtatt ihrer den Punkt C befeſtigt, ſo übt derſelbe als unbeweglicher Widerſtand einen Druck = R nach Cc aus (§. 9.), und das Gleichgewicht bleibt nach wie vor.

2) Man bringe auf die Punkte A und B nach den entgegengeſetzten Richtungen Aα und Bβ zwey neue Kräfte M und N an, die das Verhältniß BC : AC zu einander haben, ſo wird durch dieſe das Gleichgewicht nicht aufgehoben, weil ſie wegen des feſten Punktes C für ſich im Gleichgewichte ſtehen.

3) Setzt man nun M = P, ſo heben ſich beyde einander auf, folglich müſſen dann auch Q und N einander aufheben, und, da ſie entgegengeſetzte Richtung haben, gleich groß ſeyn.

4) Subſtituirt man alſo für M und N in der Proportion (2) die gleichen Kräfte P und Q, ſo erhält man:

$$P : Q = BC : AC.$$

5) Man betrachte nunmehr wieder den Punkt C als beweglich, und alle drey Kräfte P, Q und R gegeneinanderwirkend. Das zwiſchen ihnen ſtatt findende Gleichgewicht wird nicht geſtört, wenn man auf die Punkte A und B nach den Richtungen Aα und Bβ zwey andere Kräfte, ſo groß als P und Q, und auf C nach Cγ ihre Summe P + Q anbringt; auch bleibt es noch,

wenn die ſich aufhebenden Kräfte in A und B weggenommen werden, wodurch das Gleichgewicht auf die beyden Kräfte R und P + Q zurückgeführt wird.

6) Da dieſe nun entgegengeſetzte Richtung haben, ſo hat man R = P + Q, als die zweyte Bedingung des Gleichgewichts.

Vertheilung der Laſt auf zwei Punkte.

§. 17.

Aufgabe. Die Kräfte P und Q ziehen an der unbiegſamen Linie AeB bey A und B nach den ſenkrechten Richtungen Aa und Bb; man ſucht den Punkt C, wo ihre Summe P + Q nach entgegengeſetzter Richtung angebracht werden muß, um beiden das Gleichgewicht zu halten.

Auflöſung. 1) Es ſey die Länge AB = a, AC = x, ſo iſt BC = a — x, und folglich nach den Bedingungen des Gleichgewichtes $P(a - x) = Qx$ (§. 16.).

2) Alſo $Pa = (P + Q)x$, und daher AC =

$$x = \frac{Pa}{P+Q},\ BC = a - x = \frac{Qa}{P+Q}$$

§. 18.

Geſetzt, zwey Menſchen, deren Kräfte ſich wie m : n verhalten, ſollen auf einer Stange oder Tragbohre von gegebener Länge AB, eine Laſt tragen, ſo hat man aus vorigem §. die Auflöſung der Frage, auf

welchen Punkt dieſe Laſt angebracht werden muß, damit ſie zwiſchen beyden, ihren Kräften gemäß, vertheilt werde. Die Kräfte, die ſie dabey anwenden, ſind nemlich vertikal aufwärts gerichtet, und müſſen der Laſt, die vertikal niederwärts zieht, an der Stange das Gleichgewicht halten; wir erhalten alſo dieſem zu Folge

$$AC = \frac{ma}{m+n}, \text{ und } BC = \frac{na}{m+n}$$

§. 19.

Eine Frage derſelben Art iſt, wie ſtark zwey Unterlagen bey A und B gedrückt werden, die vermittelſt einer unbiegſamen Stange oder dergleichen eine Laſt O tragen, welche an dieſer irgendwo in C aufgehängt iſt.

Hier vertreten die Unterlagen die Stelle zweyer vertikal aufwärts gerichteten Kräfte, die der Laſt O das Gleichgewicht halten, indem ſie nach dieſer Richtung einen Druck ausüben. Der geſuchte Druck alſo, den ſie leiden, iſt jenem gleich und entgegengeſetzt. Nennt man daher P den Druck, der auf A kommt, Q den, der auf B kommt, und die Entfernungen $AC = f$, $BC = g$, ſo hat man:

$$Pf = Qg,\ P + Q = O.$$

Man multiplicire in letzterer Gleichung allenthalben durch g, und ſubſtituire dann für Qg den Werth Pf, ſo bekommt man: $P(f+g) = Og$, alſo:

$$P = \frac{Og}{f+g}, \text{ und eben ſo } Q = \frac{Of}{f+g}$$

Der geradlinigte Hebel.

§. 20.

Die unbiegſame Linie ACB bekommt den Namen eines geradlinigten Hebels, wenn ſie in irgend einem Punkte C befeſtigt iſt, ſo daß ſie ſich um denſelben nach Gefallen drehen läßt. Der feſte Punkt C heißt ſein **Ruhepunkt**; auch wohl, wenn man die Kräfte als Gewichte betrachtet, der **Unterſtützungspunkt**, die **Unterlage**.

§. 21.

Die Bedingungen des Gleichgewichts zweyer Kräfte am Hebel, ſind bloße Folgerungen aus dem, was bereits vorgetragen iſt. Da nemlich die Befeſtigung des Punktes C ſtatt der Kraft R dient (§. 16. 1.), ſo fällt dieſe aus der Betrachtung weg, und die allgemeinern Sätze des §. 15 und §. 16. lauten hier folgendermaßen:

1. **Zwey Kräfte P und Q, die an den Punkten A und B eines Hebels nach ſenkrechten Richtungen Aa und Bb ziehen halten einander das Gleichgewicht, wenn P : Q = BC : AC d. i. wenn ſie ſich verkehrt, wie ihre Entfernungen vom Ruhepunkte verhalten; und umgekehrt**

2) **wenn am Hebel die Kräfte P und Q miteinander im Gleichgewichte ſeyn ſollen, ſo muß P : Q = BC : AC ſeyn.**

3. Der Ruhepunkt C leidet von den beyden Kräften einen Druck $P+Q$ nach einer Richtung $C\gamma$, die ebenfalls ſenkrecht auf den Hebel iſt, und übt folglich einen gleichen Gegendruck aufwärts nach Cc aus.

§. 22.

Aus der Proportion $P : Q = BC : AC$ erhält man die Gleichung $P . AC = Q . BC$, welche näher zu erkennen giebt, wonach man eigentlich die Wirkung der Hebelkräfte zu ſchätzen habe. Geſetzt nemlich, die Kraft P ſey an ſich kleiner als Q, ſo kann demungeachtet das Produkt $P . AC > Q . BC$ ſeyn, und in dieſem Falle müßte alſo Q dennoch vermehrt werden, um unter dieſen Umſtänden der Kraft P das Gleichgewicht zu halten. Man ſieht daher, daß die Wirkung einer Kraft am Hebel allein auf das Produkt aus ihr in die Entfernung derſelben vom Ruhepunkte ankomme. Dies Produkt heißt das **Moment** der Kraft.

§. 23.

Bey der unbiegſamen Linie, woran ſich gegenſeitig drey Kräfte das Gleichgewicht halten, kann man jede derſelben ſo betrachten, als ſey ſie die Gegenkraft, welche das Gleichgewicht bewirkt. Man nehme die Kraft bey B für dieſe an, ſo folgt, daß die andern beyden in Verbindung ſo auf den Punkt B wirken müſſen, als eine Kraft es thun würde, die jener gleich, und nach entgegengeſetzter Richtung $B\beta$ angebracht wäre. Befeſtigt man alſo den Punkt B, mit Weglaſſung der

Kraft Q, ſo leidet derſelbe einen Druck = Q nach der Richtung Bβ, und ſetzt dieſem einen gleichen Druck entgegen; wirkt alſo durch ſeine Feſtigkeit eben das, was vorhin die Kraft that, ſo daß das Gleichgewicht dadurch nicht unterbrochen wird. Dies bildet eine zweyte Art von Hebel, der in B ſeinen Ruhepunkt hat, und an welchem die Kräfte P und R nach den entgegengeſetzten Richtungen Aa und Cc ſich im Gleichgewichte erhalten. Man nennt ihn den **einarmigen Hebel.**

§. 24.

Aus $P : Q = BC : AC$ folgt:

$$P : (P + Q) = BC : AB.$$

Setzt man hierinn für $P + Q$ ſeinen Werth R, ſo erhält man folgende Gleichung: $P . AB = R . BC$.

Alſo ſind auch beym einarmigen Hebel im Falle des Gleichgewichtes die Produkte aus den Kräften in die Entfernungen vom Ruhepunkte, oder die Momente der Kräfte einander gleich.

§. 25.

Fig. 1. **In einem Syſteme von Kräften, die unter ſich im Gleichgewichte ſtehen, kann man ohne Verletzung deſſelben mehreren von dieſen Kräften eine einzige ſubſtituiren, wofern dieſe ſo beſchaffen iſt, daß ſie nach entgegengeſetzter Richtung angebracht, den erwähnten Kräften das Gleichgewicht halten würde.**

Beweis 1) Es ſeyen die Kräfte P und Q, die zu einem Syſteme mehrerer im Gleichgewichte ſtehender

Kräfte

Kräfte gehören, und auf die Punkte A und B nach den Richtungen Aa und Bb wirken, mit einer fremden nach Cc gerichteten Kraft R für ſich im Gleichgewichte, ſo halten auch dieſelben Kräfte P, Q, R, oder drey andere, die ihnen gleich ſind, nach den entgegengeſetzten Richtungen Aα, Bβ und Cγ auf die Punkte A, B und C angebracht, einander das Gleichgewicht.

2) Man bringe dieſe drey letztern in der angegebenen Verbindung auf das Syſtem an, ſo wird durch ſie das Gleichgewicht nicht geſtört (§. 10.). Da aber zwey von ihnen den Kräften P und Q gleich und entgegengeſetzt ſind, ſo heben ſie ſich mit dieſen auf, und das Gleichgewicht bleibt alſo auch noch, wenn beyde Paare aus dem Syſteme weggenommen werden.

3) Alsdann bleibt aber bloß die Kraft R nach der Richtung Cγ zurück, die alſo noch eben ſo auf das Syſtem wirkt, als es vorhin die Kräfte P und Q thaten, folglich ihnen als gleichgültig ſubſtituirt werden kann.

4) Es ſind hier nur zwey Kräfte aus dem Syſteme genommen, und ſo vorgeſtellt, als wirkten ſie am freyen Hebel. Man ſieht aber, daß beydes auf die Sache ſelbſt keinen Einfluß hat, und daß der Beweis von mehrern Kräften, die in jedem andern Zuſammenhange ſtehen, ſich eben ſo führen läßt.

§. 26.

Von einer Kraft, die einer oder mehreren andern Kräften ſubſtituirt werden kann, ohne daß dadurch das

Gleichgewicht verletzt würde, ſagt man, ſie ſey ihnen äquipollent. Es können auch mehrere Kräfte zugleich andern äquipollent ſeyn, wofern ſie nur die Eigenſchaft haben, jenen das Gleichgewicht zu halten, wenn man ſie nach entgegengeſetzter Richtung auf eben die Punkte anbringt. Aequipollente Kräfte ſind in der Mechanik eben ſo zu betrachten, als bey Gleichungen Ausdrücke verſchiedener Art, die einerley Werth haben; ſie können für einander geſetzt werden, ohne daß die Wirkung, auf der hier alles allein beruhet, dadurch verändert würde.

Gleichgewicht mehrerer Kräfte am Hebel.

§. 27.

Wenn auf der einen Seite eines Hebels ACB, der in C ſeinen Unterſtützungspunkt hat, mehrere Kräfte P, P′, P″ ... die wir als Gewichte anſehen wollen, in den Entfernungen f, f′, f″ u. ſ. f. von C angebracht ſind, ſo iſt eine einzige Kraft V auf der andern Seite vermögend, ihnen allen das Gleichgewicht zu halten. Man denke ſich nemlich dieſe Kraft in ſo viele Theile p, q, r u. ſ. f. getheilt, als einzelne Gewichte vorhanden ſind, ſo daß der Theil p auf das Gewicht P, q auf P′ u. ſ. f. verwandt werden kann, ſo wird zwiſchen der ganzen Kraft V und dem Syſteme von Gewichten Gleichgewicht ſtatt finden, wenn es zwiſchen den einzelnen Theilen der Kraft und den Gewichten, jedes beſonders genommen, ſtatt hat (§. 10.).

Es ſey A der Punkt, worauf die Kraft V angebracht werden muß, und AC = u, ſo iſt vermöge der Vorausſetzung des Gleichgewichtes zwiſchen den einzelnen Theilen:

$pu = Pf$, $qu = P'f'$ u. ſ. f. alſo:

$(p + q + r\,..)\,u = Pf + P'f' + P''f''$ u. ſ. f.

oder, da $p + q + r + .. = V$ iſt:

$Vu = Pf + P'f' + P''f''\ldots$

woraus erhellet, daß das Moment dieſer Kraft = der Summe der Momente aller der einzelnen Gewichte ſeyn muß, denen gemeinſchaftlich ſie das Gleichgewicht hält.

§. 28.

Es iſt alſo auch mehreren Gewichten, die auf einer Seite des Ruhepunktes in verſchiedenen Entfernungen von demſelben hängen, ein einziges Gewicht an eben dem Hebelarme äquipollent, wenn ſein Moment der Summe ihrer einzelnen Momente gleich iſt (§. 25.).

§. 29.

Aufgabe. Es ſind an dem einen Arme eines Hebels die Gewichte P, P', P'' u. ſ. f. in den Entfernungen f, f', f'' u. ſ. f., und am andern die Gewichte Q, Q', Q'' u. ſ. f. in den Entfernungen g, g', g'' u. ſ. f. vom Ruhepunkte befindlich; man fragt, unter welchen Bedingungen beyde Seiten einander das Gleichgewicht halten werden.

Auflöſung 1) Es ſey den Gewichten P, P', P'' u. ſ. f. eine Kraft M in der Entfernung a vom Ruhe-

punkte äquipollent, ſo hat man $Ma = Pf + P'f' + P''f'' + \ldots$ (§. 28.)

2) Eben ſo iſt auch, wenn man annimmt, es ſey die Kraft N in der Entfernung b vom Ruhepunkte den Gewichten Q, Q', Q'' u. ſ. f. äquipollent:

$$Nb = Qg + Q'g' + Q''g'' + \text{u. ſ. f.}$$

3) Herrſcht nun zwiſchen den Gewichten P, P', P''.. und Q, Q', Q''.. Gleichgewicht, ſo findet dies auch zwiſchen den Kräften M und N ſtatt, weil man dieſe jenen ſubſtituiren kann, und dem zu Folge iſt $Ma = Nb$, alſo auch

$$Pf + P'f' + P''f'' + \ldots = Qg + Q'g' + Q''g'' + \ldots$$

4) Die Summe der Momente der einzelnen Gewichte muß daher auf der einen Seite ſo groß ſeyn, als auf der andern, wenn ſie einander aufwiegen ſollen.

Gemeinſchaftlicher Schwerpunkt mehrerer Kräfte an einer unbiegſamen Linie.

§. 30.

Die vorhin angeſtellte Betrachtung des Gleichgewichtes mehrerer Kräfte am Hebel bezieht ſich auf die Vorausſetzung eines feſten Punktes, und kann daher nicht geradezu auf den Fall angewandt werden, wenn der Hebelarm frey iſt, und bloß durch die gegenſeitige Wirkung der Kräfte in Ruhe erhalten werden muß. Wir wollen zu dieſer Abſicht nun ein anderes Verfahren wählen, welches allgemeiner iſt, und zugleich auch zu den weitern Unterſuchungen in der Folge den Weg eröffnen wird.

Fig. 2. Wir wollen mit zweyen Kräften P und P′ den Anfang machen, die an der geraden Linie AG auf die Punkte M und N nach den ſenkrechten Richtungen Mm und Nn angebracht ſind, und von einer dritten Kraft S nach entgegengeſetzter Richtung Gg im Gleichgewichte erhalten werden. Die Entfernungen der Punkte M und N von einem willkührlichen Anfangspunkte A ſeyen $= x$, und x'; die Entfernung $Ag = f$, ſo haben wir $MG = f - x$, $GN = x' - f$, alſo nach den Erforderniſſen des Gleichgewichtes

$$P(f-x) = P'(x'-f), \text{ und } S = P + P'$$

Erſtere Gleichung giebt $(P + P')f = Px + P'x'$, daher hat man $f = \frac{Px + P'x'}{P + P'}$, die Entfernung von A in der die Summe der beyden Kräfte P und P′ angebracht werden muß, um ihnen das Gleichgewicht zu halten, oder ihnen äquipollent zu ſeyn, je nachdem man ihr die entgegengeſetzte oder dieſelbe Richtung giebt, welche die Kräfte haben.

§. 31.

Fig. 2. Es ſeyen jetzt drey Kräfte P, P′, P″ auf die Punkte M, N und O der geraden Linie AG in den Entfernungen x, x', x'' von A angebracht, und eine vierte Kraft S, die auf den Punkt G nach entgegengeſetzter Richtung Gg wirkt, halte ihnen zuſammen das Gleichgewicht. Den erſtern beyden P und P′ iſt ihre Summe in irgend einem Punkte der geraden Linie äquipollent, und man kann ſie daſelbſt ſtatt der einzel-

nen Kräfte P und P′ ſubſtituiren, ohne das Gleichgewicht aufzuheben. Es ſey H dieſer Punkt, ſo hat man für denſelben: $AH = \frac{Px + P'x'}{P + P'}$.

Jetzt bleiben alſo nur noch die beyden Kräfte $P + P'$ nach Hh und P″ nach Oo übrig, denen die Kraft S nach Gg das Gleichgewicht halten muß. Dieſem zu Folge iſt S = ihrer Summe, oder $= P + P' + P''$, und $(P + P' + P'')\, f = (P + P') \cdot \frac{Px + P'x'}{P + P'} + P''x'' = Px + P'x' + P''x''$, folglich:

$$f = \frac{Px + P'x' + P''x''}{P + P' + P''}.$$

§. 32.

Hieraus läßt ſich ſchon ſchließen, wie für mehrere Kräfte die zum Gleichgewichte erforderliche Gegenkraft, und der Punkt G auf den ſie angebracht werden muß, beſtimmt werde. Nennt man nemlich $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)} \ldots P^{(n)}$ die vorhandenen Kräfte, $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)} \ldots x^{(n)}$ die Entfernungen der Punkte von A in der geraden Linie, S die Gegenkraft, f die Entfernung AG, ſo ſieht man leicht, daß

$$S = P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)} \ldots + P^{(n)} \text{ und}$$
$$Sf = P^{(1)}x^{(1)} + P^{(2)}x^{(2)} + P^{(3)}x^{(3)} \ldots + P^{(n)}x^{(n)}$$

ſeyn werde.

Um dies allgemein zu zeigen, ſetze man, es ſey dieſe Vermuthung für irgend eine Anzahl von n Kräften bereits gerechtfertigt. Man bringe ſodann noch eine

Kraft $P^{(n+1)}$ auf die Linie in der Entfernung $x^{(n+1)}$ von A an, und nenne S', f' die veränderten Werthe, welche S und f dadurch bekommen, ſo daß jetzt S' die Kraft iſt, welche allen den Kräften $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)} \ldots P^{(n+1)}$ das Gleichgewicht hält. Da nun S vorhin mit $P^{(1)}, P^{(2)} \ldots P^{(n)}$ im Gleichgewichte war, ſo iſt ſie ihnen nach entgegengeſetzter Richtung $G\gamma$ angebracht, äquipollent, und kann für ſie, ohne Verletzung des Gleichgewichtes, ſubſtituirt werden, wodurch das Gleichgewicht auf die drey Kräfte S, $P^{(n+1)}$ und S' gebracht wird. Daraus folgt nun

$$S' = S + P^{(n+1)}$$

$$S'f' = Sf + P^{(n+1)} . x^{(n+1)} \quad (\S. 30.)$$

oder, wenn man für S und Sf ihre Werthe ſubſtituirt

$$S' = P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)} \ldots + P^{(n+1)}$$

$$S'f' = P^{(1)} x^{(1)} + P^{(2)} x^{(2)} \ldots + P^{(n+1)} . x^{(n+1)}.$$

Alſo erſtreckt ſich das Geſetz jedesmal auf n + 1 Kräfte, wenn man es für n Kräfte vorausſetzt, und gilt folglich, weil es für 2 und 3 Kräfte erwieſen iſt, auch für 4, 5 Kräfte u. ſ. f. und überhaupt für jede beliebige Anzahl.

§. 33.

Wenn daher an einer unbiegſamen geraden Linie mehrere Kräfte, ſo viel derer auch ſeyn mögen, nach ſenkrechten Richtungen ziehen, ſo giebt es allemal einen Punkt in derſelben, worauf die Summe derſelben nach entgegengeſetzter Richtung angebracht, ihnen allen das Gleichgewicht hält, oder wenn man ſie nach derſelben

Richtung ziehen läßt, ihnen äquipollent iſt. Man nennt ihn den **gemeinſchaftlichen Schwerpunkt** der Kräfte.

Phyſiſcher Hebel.

§. 34.

Aus dem, was §. 22. vom Hebel geſagt iſt, ſieht man die Möglichkeit, wie man einer Laſt durch eine viel geringere Kraft das Gleichgewicht halten könne. Es läßt ſich alſo mit einem kleinen Gewichte vermittelſt des Hebels ein größeres aufwiegen, und folglich durch das kleinere ſchätzen, wie groß es ſeyn müſſe. In der Anwendung kommt nur dabey noch in Betracht, daß der Hebelarm, damit er das Erforderniß der Unbiegſamkeit erfülle, eine körperliche Dicke haben muß, und folglich vermöge ſeines Gewichtes auf das Gleichgewicht der an ihm befindlichen Kräfte Einfluß hat.

§. 35.

Fig. 1. Wir wollen ſetzen, der Hebel AB ſey ſeiner ganzen Länge nach von gleicher Dicke, ſo kann man ihn als eine gerade Linie betrachten, die allenthalben mit gleichen Gewichten beſchwert iſt. Um den gemeinſchaftlichen Schwerpunkt aller dieſer unendlich kleinen Gewichte zu finden, laſſe man den Anfangspunkt (§. 32.) in die Mitte C der Linie fallen; alsdann iſt die Summe der Produkte Px auf beyden Seiten derſelben gleich groß, und entgegengeſetzt, folglich die Summe aller Px längſt dem ganzen Hebel = o, mithin auch ξ = o.

Der Schwerpunkt des Hebels fällt daher in die Mitte deſſelben, und man kann ihn alſo als eine Linie anſehen, in deren Mitte ſein ganzes Gewicht vereinigt iſt.

§. 36.

Fig. 3. Es ſey nun der Hebel AOB in O unterſtützt, und in horizontaler Lage, ſo daß die Gewichte P und Q, welche in M und F einander aufwiegen, nach ſenkrechten Richtungen $M\mu$ und $F\varphi$ wirken. Man ſetze die ganze Länge des Hebels $AB = a$, ſein Gewicht $= G$, das man als eine Kraft anzuſehen hat, die in C, der Mitte von AB angebracht iſt; außerdem ſey $MO = f$, $OF = g$, $OB = b$, ſo iſt $CO = \frac{1}{2} a - b$, und man bekommt daher folgende Gleichung (§. 29.):

$$Pf + G(\tfrac{1}{2} a - b) = Qg.$$

§. 37.

Die Länge des andern Armes AO iſt $= a - b$, alſo beyder Unterſchied $= a - 2b$. Nennt man dieſen d, ſo wird:

$$Pf + \tfrac{1}{2} Gd = Qg.$$

Man ſieht hieraus, daß der Einfluß, den das Gewicht des Hebels auf das Gleichgewicht der an ihm befindlichen Kräfte hat, ſich nach dem Unterſchiede der Hebelarme in Anſehung ihrer Längen richtet. Beym gleicharmigen Hebel kommt alſo dies Gewicht gar nicht in Betracht, und man hat für denſelben $Pf = Qg$, wie beym mathematiſchen Hebel.

§. 38.

Iſt die Laſt im Endpunkte B aufgehängt, ſo wird $g = b$, folglich $Pf + \frac{1}{2} Gd = Qb$. Dieſer Fall findet bey der ſogenannten Schnellwage ſtatt, welche dazu dient, mit einem bekannten Gewichte P, das ſich auf dem längern Arme AO hin und her ſchieben läßt, jede noch ſo große Laſt Q abzuwiegen. Man nennt P bey ihr das **Laufgewicht**.

§. 39.

Für $P = 0$ wird $Qb = \frac{1}{2} Gd$, alſo $Q = \frac{Gd}{2b}$, wodurch das Gewicht beſtimmt wird, das ohne Gegengewicht bloß auf die Ueberwucht des längern Armes AO verwandt werden muß. Dies läßt ſich leicht durch einen Verſuch finden, und kann daher als eine bekannte Größe in die Gleichung hineingebracht werden. Man ſetze es $= H$, ſo erhält man $Hb = \frac{1}{2} Gd$, alſo:

$Pf = (Q - H) b$, und wenn man den Quotienten $\frac{P}{b}$, der hier beſtändig iſt, A nennt, ſo wird $Q = Af + H$.

Das Gewicht Q beſteht alſo aus zwey Theilen, dem veränderlichen Af, der ſich wie f verhält, und dem unveränderlichen H, und kann daher nach dieſer Formel ſehr leicht berechnet werden.

§. 40.

Gegenſeitig wird $f = \frac{(Q - H) b}{P}$, oder, wenn

man $\frac{Q}{P} = m$, und $\frac{Hb}{P} = c$ ſetzt, ſo giebt dies für f den einfachen Ausdruck $mb - c$, nach dem ſich auf dem Arme AO folgendermaaßen eine Scale zur Angabe des Gewichtes entwerfen läßt.

Fig. 4. Man ſchneide auf einer Linie DA von unbeſtimmter Länge von D aus die Stücke b, 2b, 3b u. ſ. f. ab, welches die Punkte 1, 2, 3, 4 u. ſ. f. geben mag, und nehme DO = c; ſo ſind O2, O3, O4 u. ſ. f. die Entfernungen, die den Werthen 2P, 3P, 4P u. ſ. f. für Q entſprechen. Man kann nun noch die gleichen Zwiſchenräume zwiſchen den Punkten 1, 2, 3 u. ſ. f. ferner eintheilen, und ſo durch dieſe Theilungspunkte das Gewicht Q mit einer Genauigkeit beſtimmen, wie nur irgend verlangt werden kann.

§. 41.

Fig. 1. Es ſey ACB ein einarmiger Hebel, der in dem Endpunkte B unterſtützt iſt, und an deſſen anderem Endpunkte A eine Kraft nach vertikaler Richtung Aα aufwärts drückt, um einer Laſt Q, die in C nach Cγ den Hebel nieder zu ziehen ſtrebt, das Gleichgewicht zu halten. Man ſetze die Länge AB = f, das Gewicht des Hebels, das dieſer Länge proportional iſt, $= \varkappa f$, CB = b, ſo hat man die Gleichung:

$$Pf = Qb + \tfrac{1}{2}\varkappa f^2, \text{ und dieſe giebt } P = \frac{Qb}{f} + \tfrac{1}{2}\varkappa f.$$

Sowohl für ein unendlich großes als unendlich kleines f wird dieſer Ausdruck unendlich; alſo erhellet,

daß er für irgend ein f ein Minimum ſeyn müſſe, oder daß eine Länge des Hebels ſtatt finde, bey welcher die Kraft auf die Laſt am vortheilhafteſten wirkt. Um dieſe zu finden, differenziire man obige Gleichung, indem man bloß P und f als veränderlich anſieht, ſo erhält man $Pdf + fdP = \kappa f$. Hierin $dP = o$ geſetzt, giebt $P = \kappa f$, d. i. die Kraft muß = dem Gewichte des Hebels ſeyn. Man ſubſtituire für P dieſen Werth in der Gleichung, ſo wird $\frac{1}{2} \kappa f^2 = Qb$, folglich $f = \sqrt{\frac{2Qb}{\kappa}}$

Winkelhebel.

§. 42.

Fig. 5. Es ſey AOB ein Winkel mit unbiegſamen Schenkeln, und um den feſten Punkt O beweglich, ohne daß ſeine Größe ſich ändern kann. Wenn an dieſem zwey Kräfte in gleichen Entfernungen AO und BO vom Umdrehungspunkte nach Richtungen Aa und Bb ziehen, die ſenkrecht auf die Arme ſind, und in der Ebene des Winkels liegen, ſo iſt klar, daß ſolche einander das Gleichgewicht halten müſſen: denn es geſchieht hier, wie beym geradlinigten Hebel, auf beyden Seiten ganz daſſelbe; alſo hat der Winkel eben ſo viel Beſtreben nach der einen Seite ſich zu drehen, als nach der andern, und bleibt daher ruhen.

§. 43.

Fig. 5. **Lehrſatz. Sind an dem Winkelhebel**

zwey Kräfte P und Q in ungleichen Entfernungen AO und BO vom Ruhepunkte nach ſenkrechten Richtungen Aa, Bb angebracht, ſo halten ſie einander das Gleichgewicht, wenn ſie ſich, wie beym geradlinigten Hebel, verkehrt verhalten, wie ihre Entfernungen.

Beweis. 1) Man mache EO = OB, und bringe in A die Kraft P nach Aa und in E eine Kraft = Q nach der Richtung Ee an, ſo ſtehen dieſe am einarmigen Hebel AO im Gleichgewichte, weil P : Q = EO : AO iſt.

2) Dies Gleichgewicht bleibt noch, wenn in B die Kraft Q nach Bb, und in E eine gleich große nach Eε angebracht wird (§. 42.).

3) Dann aber heben ſich die beyden gleichen und entgegengeſetzten Kräfte in E, und können folglich weggenommen werden; ſo daß auch die beyden übrigbleibenden Kräfte P und Q in A und B noch mit einander im Geichgewichte ſeyn müſſen.

§. 44.

Fig. 5. Gegenſeitig: wenn die Kräfte P und Q am Winkelhebel ſich das Gleichgewicht halten, ſo folgt, daß P:Q = BO:AO ſeyn müſſe.

Man bringe nemlich auf den Punkt A noch eine Kraft = P, nach entgegengeſetzter Richtung Aα, und in B eine Kraft R nach Bβ an, die das Verhältniß BO:AO zu einander haben. Dieſe beyden Kräfte ſind für ſich im Gleichgewichte, und ſtören alſo das ſchon

vorhandene Gleichgewicht zwiſchen P und Q nicht. Da nun die Kräfte in A ſich aufheben, ſo folgt, daß auch die beyden Kräfte Q und R bey B im Gleichgewichte ſtehen, und, weil ſie einander entgegengeſetzt ſind, gleich groß ſeyn müſſen. Man hat folglich: $Q = R$, und dieſer Werth für R in vorhergehende Proportion ſubſtituirt, giebt $P : Q = BO : AO$.

Zweytes Kapitel.

Von der Zuſammenſetzung und Zerlegung der Kräfte.

---

§. 45.

Fig. 6. **Lehrſatz. Zwey gleiche Kräfte P und Q, die auf zwey Punkte A und B einer feſten geraden Linie A B nach Richtungen Aα und Bβ wirken, welche mit der Linie gleichlaufend aber entgegengeſetzt ſind, halten einander an dieſer Linie das Gleichgewicht.**

Beweis. 1) Wäre die Kraft P allein vorhanden, ſo würde ſie den Punkt A nach Aα wirklich fortbewegen. Dies würde zur Folge haben, daß auch der nächſte Punkt a in dieſer Linie, weil er wegen der Feſtigkeit derſelben von A unzertrennlich iſt, dieſem folgen, und um eben ſo viel nach aα fortrücken würde als A.

2) Was von a gilt, erſtreckt ſich auf jeden zu⸗nächſtliegenden Punkt, folglich auch auf den Punkt B.

3) Eben dieſe Bewegung würde B aber auch nach entgegengeſetzter Richtung Bβ durch die Kraft Q be⸗kommen; da nun beydes nicht zugleich geſchehen kann, ſo bleibt derſelbe, ſo wie die ganze Linie, unbeweglich, oder die beyden Kräfte ſtehen mit einander an der Linie im Gleichgewichte.

§. 46.

Folgerung 1. Wenn eine Kraft auf den Punkt A einer feſten geraden Linie angebracht iſt, und ihre Richtung Aα in dieſe Linie hineinfällt, ſo iſt eine eben ſo große Kraft in jedem andern Punkte B derſelben ihr äquipollent, wofern ſie dieſelbe Richtung Bα hat (§. 25.).

2. **Man kann daher eine Kraft, die mit an⸗dern im Gleichgewichte ſteht, auf jeden beliebi⸗gen Punkt ihrer Richtung anbringen, ohne daß dadurch das Gleichgewicht aufgehoben wird:** denn man kann ohne Verletzung des Gleichgewichtes zwey Punkte ihrer Richtung durch eine feſte gerade Li⸗nie in Verbindung bringen, und an dieſer, da ſie in die Richtung der Kraft fällt, die Kraft von einem Punkte auf den andern verlegen.

§. 47.

Fig. 7. **Lehrſatz. Wenn von dreyen Kräften P, Q, R, die gemeinſchaftlich auf einen Punkt C nach den Richtungen Cα, Cβ und Cγ wirken,**

die eine R den andern beyden P und Q das Gleichgewicht halten ſoll, ſo muß ihre Richtung den Winkel ACB ſo theilen, daß P . Sin ACO = Q . Sin BCO iſt.

Beweis. 1) Man verlängere $C\gamma$, die Richtung der Kraft R rückwärts über C hinaus willkührlich bis O, fälle aus dieſem Punkte auf AC und $C\beta$ die Perpendikel OA und OB, und lege durch die Punkte A, O, B einen Winkelhebel.

2) Da dieſe Punkte in den Richtungen der Kräfte liegen, ſo kann man auf ſie die Kräfte hinverlegen, ohne das Gleichgewicht dadurch zu ſtören (§. 46.), alſo müſſen ſich die drey Kräfte auch noch an dem Winkelhebel nach den Richtungen $A\alpha$, $B\beta$ und $C\gamma$ das Gleichgewicht halten.

3) Da die Kraft R von den andern beyden aufgehoben wird, ſo müſſen letztere auf den Punkt O mit einer Kraft = R nach entgegengeſetzter Richtung γO wirken.

4) Befeſtigt man daher den Punkt O mit Weglaſſung der Kraft R, ſo leidet dieſer Punkt von den Kräften P und Q einen Druck = R nach γO, und wirkt alſo mit eben der Kraft nach $O\gamma$ zurück. Es wird folglich den beyden Kräften noch eben der Widerſtand geleiſtet, als vorhin, und daher das Gleichgewicht nicht aufgehoben.

5) Da nun die Richtungen $A\alpha$ und $B\beta$ der Kräfte P und Q auf die Arme des Winkelhebels ſenkrecht ſind, ſo hat man als Bedingung des Gleichgewich-

wichtes: (§. 44.) P : Q = BO : AO oder P . AO = Q . BO.

6) Nun iſt AO = OC . Sin ACO und BO = OC . Sin BCO; ſubſtituirt man dieſe Werthe für AO und BO in die Gleichung (5), und dividirt dann auf beyden Seiten durch OC, ſo erhält man

P . Sin ACO = Q . Sin BCO.

§. 48.

Die dritte Kraft R kann demnach nur unter der Bedingung den beyden andern P und Q das Gleichgewicht halten, wenn ihre Richtung den Winkel ACB ſo theilt, daß ſich die Sinus der Theile verkehrt verhalten, wie die Kräfte, deren Richtungen daran grenzen. Das Verhältniß der Kräfte P und Q, und der Winkel, den ihre Richtungen einſchließen, beſtimmen alſo die Richtung der dritten Kraft, indem dieſe einen der Lage und Größe nach gegebenen Winkel nach einem gegebenen Verhältniſſe theilen muß. Wir wollen nun ſehen, wie die Kraft ſelbſt durch eben die Stücke beſtimmt werde.

§. 49.

Aufgabe. Die Größe der Kraft R zu finden, die den gegebenen Kräften P und Q am Punkte C das Gleichgewicht hält.

Auflöſung. 1) Aus der Forderung, daß R den Kräften P und Q das Gleichgewicht halten ſoll, fließt die Gleichung

P . Sin ACO = Q . Sin BCO (§. 47.).

2) Die drey Kräfte halten einander gegenſeitig das Gleichgewicht; verlängert man alſo AC über C hinaus, und ſieht P als die Gegenkraft an, die den beyden übrigen das Gleichgewicht hält, ſo giebt dies eine zweyte Gleichung

Q . Sin BCN = R . Sin γCN, oder da Sin BCN = Sin ACB, und Sin γCN = Sin ACO, ſo hat man auch

$$Q \,.\, \text{Sin}\, ACB = R\, \text{Sin}\, ACO.$$

3) Da P und Q, und der Winkel ACB gegeben ſind, ſo enthalten die beyden Gleichungen (1) und (2) nur zwey unbekannte Größen, nemlich den Winkel ACO und die Kraft R, die ſich alſo beyde daraus finden laſſen.

§. 50.

Man ſetze den Winkel ACB = α, ACO = ϑ; alsdann iſt BCO = $\alpha - \vartheta$, und man hat:

$$P\, \text{Sin}\, \vartheta = Q\, \text{Sin}\, (\alpha - \vartheta)$$
$$Q\, \text{Sin}\, \alpha = R\, \text{Sin}\, \vartheta$$

Aus erſterer Gleichung wird:

$$P\, \text{Sin}\, \vartheta = Q\, \text{Sin}\, \alpha\, \text{Cos}\, \vartheta - Q\, \text{Cos}\, \alpha\, \text{Sin}\, \vartheta$$

$$\text{alſo}\ (P + Q\, \text{Cos}\, \alpha)\, \text{Sin}\, \vartheta = Q\, \text{Sin}\, \alpha\, \text{Cos}\, \vartheta$$

und daher $\text{tang}\, \vartheta = \dfrac{Q\, \text{Sin}\, \alpha}{P + Q\, \text{Cos}\, \alpha}$ wodurch die Direktion der Kraft R beſtimmt wird. Dieſe Gleichung mit der zweyten verbunden, giebt nun ferner:

$$R\, \text{Cos}\, \vartheta = P + Q\, \text{Cos}\, \alpha$$

Man hat daher:

$$R^2 \cos\vartheta^2 = P^2 + 2PQ \cos\alpha + Q^2 \cos\alpha^2$$

und $R^2 \sin\vartheta^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots Q^2 \sin\alpha^2$

folglich $R^2 = P^2 + 2PQ \cos\alpha + Q^2$

und $R = \sqrt{(P^2 + 2PQ \cos\alpha + Q^2}$

§. 51.

Fig. 8. Vermittelſt der beyden Gleichungen (1) und (2) des §. 49. läßt ſich auch die Richtung und Größe der Kraft R auf ſehr einfache Weiſe geometriſch darſtellen. Man nehme nemlich auf den Richtungen der Kräfte P und Q die Punkte A und B ſo, daß die Längen AC und BC ſich wie die Kräfte P und Q verhalten, und ergänze das Parallelogram ACBD, ſo iſt:

$P : Q = AC : AD = \text{Sin } BCD\ (CDA) : \text{Sin } ACD$ alſo

$P \text{ Sin } ACD = Q \text{ Sin } BCD.$

Daher theilt die Diagonale des Parallelograms den Winkel ACB nach eben dem Verhältniſſe, als die Richtung der mittlern Kraft, und fällt folglich mit dieſer zuſammen.

Ferner iſt $CB : CD = \text{Sin } BDC : \text{Sin } CBD = \text{Sin } ACD : \text{Sin } ACB$, zugleich aber auch $Q : R = \text{Sin } ACO : \text{Sin } ACB$, folglich $CB : CD = Q : R$.

Die mittlere Kraft wirkt alſo nach der Diagonale des konſtruirten Parallelograms und verhält ſich auch wie dieſe Diagonale.

§. 50.

Wir haben die beyden Gleichungen $P \text{ Sin } ACO = Q \text{ Sin } BCO$ und $Q \text{ Sin } ACB = R \text{ Sin } ACO$ aus

der Annahme des Gleichgewichtes zwiſchen den drey Kräften P, Q und R abgeleitet; es kann alſo da, wo ſie nicht erfüllt werden, kein Gleichgewicht ſtatt finden. Gegenſeitig läßt ſich nun zeigen, daß ſie die einzigen Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes ſind, oder daß daſſelbe allemal vorhanden ſeyn müſſe, wo ihnen Genüge geſchieht. Man laſſe nemlich (Fig. 7.) auf den Punkt C zwey Kräfte P′ und Q′ = den Kräften P und Q, nach den Richtungen CN und CI an, und nach einer mittlern Richtung γC eine Kraft R′, die ihnen das Gleichgewicht hält, ſo iſt P′ Sin γCN = Q′ Sin γCI, und Q′ Sin γCN = R′ Sin γCN. Der Winkel ICN wird alſo nach eben dem Verhältniſſe getheilt, als der ihm gleiche Winkel ACB; daher hat man γCN = ACO, und mithin R′ = R.

Bringt man demnach auf den Punkt C auch die Kräfte P und Q nach den entgegengeſetzten Richtungen CA und CB, und außer dieſen die dritte Kraft R ſo an, daß ihre verlängerte Richtung mit AC den Winkel ACO macht, wie ihn die Gleichung P Sin ACO = Q Sin BCO beſtimmt, ſo fällt CO mit Cγ zuſammen, und die drey Kräfte P, Q, R halten erſtern dreyen P′, Q′, R′ das Gleichgewicht, weil immer eine der andern gleich und entgegengeſetzt iſt. Man kann nun die erſtern P′, Q′, R′ wegnehmen, ohne das Gleichgewicht zu ſtören, weil ſie für ſich im Gleichgewichte ſtehen, und ſo muß auch noch zwiſchen den zurückbleibenden Kräften P, Q und R Gleichgewicht ſtatt finden.

§. 53.

Die Kraft R nach entgegengeſetzter Richtung CO auf den Punkt C angebracht, iſt den andern beyden P und Q äquipollent (§. 26.) und heißt die **mittlere Kraft.** Man kann ſich daher vorſtellen, es entſtehe aus den Kräften P und Q durch ihr Zuſammenwirken auf den Punkt C eine einzige Kraft R nach der mittlern Richtung CO, und kann dieſe jenen beyden allemal als gleichgültig ſubſtituiren. Dies nennt man eine Kraft aus zweyen andern **zuſammenſezen.**

§. 54.

Gegenſeitig kann jede einfache Kraft R ſo angeſehen werden. als ſey ſie aus der Zuſammenſetzung zweyer andern, die gegebene Richtungen CA und CB haben, entſtanden. Um dieſe Kräfte zu finden, darf man nur in CD, der Richtung von R, einen Punkt D annehmen, und aus dieſem mit den Richtungen der geſuchten Kräfte Parallelen ziehen, ſo verhalten ſich dieſe Kräfte zu R, wie die Seiten AC und BC des dadurch entſte-
Fig. 8. henden Parallelograms zur Diagonale CD. Man ſagt in dieſem Falle, die Kraft R ſey in die Kräfte nach CA und CB **zerlegt.** Dieſe Zerlegung iſt offenbar eine bloße Zurückführung der Kraft auf ihre Theile, aus denen ſie zuſammengeſetzt iſt.

§. 55.

Es ſey CD die Richtung einer gegebenen Kraft P, die man in zwey andere nach den Richtungen CA und

CB, welche in derſelben Ebene liegen, zerlegen will. Man ſetze den Winkel ACD $= \eta$, BCD $= \vartheta$, und nenne die geſuchten Kräfte M und N, ſo hat man:

$M \operatorname{Sin} \eta = N \operatorname{Sin} \vartheta$, $P \operatorname{Sin} \eta = N \operatorname{Sin} (\eta + \vartheta)$, alſo:

$$N = \frac{P \operatorname{Sin} \eta}{\operatorname{Sin} (\eta + \vartheta)}, \quad M = \frac{N \operatorname{Sin} \vartheta}{\operatorname{Sin} \eta} = \frac{P \operatorname{Sin} \vartheta}{\operatorname{Sin} (\eta + \vartheta)}$$

Sind die Richtungen CA und CB aufeinander ſenkrecht, ſo iſt $\eta + \vartheta = 90°$, $\vartheta = 90° - \eta$, folglich alsdann $M = P \operatorname{Cos} \eta$ und $N = P \operatorname{Sin} \eta$. Ein andrer oft vorkommender Fall iſt der, wo CD den Winkel ACB halbirt. Hier hat man $\eta = \vartheta$, alſo $M = N = \frac{P \operatorname{Sin} \eta}{\operatorname{Sin} 2\eta} = \frac{P}{2 \operatorname{Cos} \eta}$

§. 56.

Um zu ſehen, wie eine Kraft auf einen Punkt wirken kann, der nur nach einer gewiſſen Richtung bewegbar iſt, zerlege man ſie in eine nach dieſer Richtung, und in eine darauf ſenkrecht. Erſtere kann den Punkt frey bewegen, wofern ſie nicht von einer andern Kraft daran gehindert wird. Dagegen wird letztere durch die Feſtigkeit des Punktes, der nach dieſer Richtung nicht weichen kann, ganz aufgehoben, und da ſie nicht weiter ſo zerlegt werden kann, daß noch irgend ein Theil zu erſterer hinzukäme, ſo enthält dieſe den völligen Antheil der Kraft, der hier als wirkſam anzuſehen iſt.

Fig. 9. Wir wollen ſetzen, die Kraft P ſey an dem Hebelarme AC, der in C ſeinen Ruhepunkt hat, auf den Punkt A nach der ſchiefen Richtung AF angebracht.

Der Punkt A kann nur allein nach der auf AC ſenkrechten Richtung Aa fortrücken; alſo hat die Kraft nur in ſo fern ein Beſtreben, den Hebel zu drehen, als ein Theil von ihr P Sin FAC, wenn ſie nach Aa und AC zerlegt wird, auf erſtere Richtung fällt. Der andere Theil P Cos FAC drückt den Hebelarm nach AC an den feſten Punkt C, der deshalb einen gleichen Gegendruck nach CA ausübt, und ihn folglich aufhebt. Die Kraft P hat demnach bloß das Moment P . AC Sin FAC den Hebel zu drehen.

Eben dies fließt auch aus folgender Betrachtung:

Man fälle aus C auf die Richtung der Kraft das Perpendikel CG, und lege durch ACF einen Winkelhebel, ſo kann man die Kraft auf den Punkt F verſetzen, ohne daß ihre Wirkung dadurch geändert würde (§. 46.). Sie hat nun am Arme CF ſenkrechte Richtung, und ihr Moment iſt daher P . CF = P . AC . Sin FAC, wie vorhin.

§. 57.

Fig. 9. **Lehrſatz.** Wenn an einer geraden Linie ACB zwey Kräfte P und Q, die nach willkührlichen aber parallelen Richtungen Aα und Bβ ziehen, einer dritten Kraft R nach entgegengeſetzter Richtung Cγ das Gleichgewicht halten, ſo wird dies auch noch geſchehen, wenn man alle drey Kräfte an eben den Punkten ſenkrecht auf die Linie anbringt.

Beweis. 1) Man ziehe durch C eine auf Cγ ſenkrechte Linie FCG, die die Richtungen Aα und Bβ

in F und G ſchneiden mag, ſo kann man die Kräfte auch auf dieſe Punkte verlegen, ohne dadurch das Gleichgewicht zu ſtören.

2) Sie müſſen ſich alſo auch noch an der Linie FCG, auf die ſie ſenkrecht gerichtet ſind, das Gleichgewicht halten; folglich muß $P + Q = R$ und $FC . P = GC . Q$ ſeyn.

3) Man ſetze nun den Winkel $FAC = \alpha$, ſo iſt $FC = AC \text{ Sin } \alpha$ und $GC = BC \text{ Sin } \alpha$. Dies in die Gleichung (2) ſubſtituirt, und dann mit Sin α dividirt, giebt: $AC . P = BC . Q$.

§. 58.

Gegenſeitig folgt, daß drey Kräfte, die ſich an der Linie ACB, auf die ſie ſenkrecht gerichtet ſind, das Gleichgewicht halten, auch dann noch im Gleichgewichte ſeyn müſſen, wenn ſie auf eben die Punkte nach jeden andern parallelen Richtungen angebracht werden. Denn nach dieſer Vorausſetzung hat man $AC . P = BC . Q$, welches mit Sin α multiplicirt, $FC . P = GC . Q$ giebt: alſo ſtehen dieſe Kräfte auch an der Linie FCG nach ſenkrechten Richtungen $F\alpha$, $G\beta$ und $C\gamma$ im Gleichgewichte, folglich auch nach eben den Richtungen an ACB. Man ſieht leicht, daß dieſer Satz, ſo wie der im vorigen §, ſich auf mehrere parallele Kräfte ausdehnen laſſen, die an einer geraden Linie von einer entgegengeſetzten Kraft im Gleichgewichte erhalten werden.

§. 59.

Wenn drey oder mehrere Kräfte an einem Winkel-

Hebel AOB angebracht ſind, ſo kann man durch zwey Punkte deſſelben A und B eine gerade Linie AB ziehen, und auf dieſe die Kräfte nach ihren Richtungen verlegen, woraus ſich alsdann die Umſtände beurtheilen laſſen, unter denen ſie ſich an dem Winkelhebel das Gleichgewicht halten: ſollen nemlich die Kräfte an ihm in Gleichgewichte ſeyn, ſo muß das Gleichgewicht auch an AB ſtatt finden, und umgekehrt. Da hierbey die Form des Hebels gar nicht in Betracht kommt, ſo gelten dieſe Schlüſſe auch für den krummlinigten Hebel, ſeine Arme mögen gebogen ſeyn, wie ſie wollen.

Zuſammenwirkung mehrerer Kräfte auf einen Punkt.

§. 60.

Die Größe und Richtung der mittlern Kraft mehrerer, auf einen Punkt C wirkender Kräfte, deren Richtungen in einer Ebene liegen, beſtimmt man am leichtſten dadurch, daß man jede derſelben nach zweyen ſenkrechten Richtungen CA und CB, die nach Gefallen angenommen werden können, zerlegt, dann die Kräfte nach jeder dieſer Richtungen beſonders ſummirt, und aus beyden Summen eine dritte Kraft zuſammenſetzt. Es mögen M und N dieſe Summen heißen, S die mittlere Kraft, die aus beyden entſpringt, und ϑ der Winkel, den ihre Richtung mit CA einſchließt, ſo hat man $S = \sqrt{(M^2 + N^2)}$, und $M \sin \vartheta = N \cos \vartheta$, alſo

$$\tang \vartheta = \frac{N}{M}.$$

Wir wollen ſetzen, es ſeyen drey Kräfte P, Q und R gegeben, deren Richtungen mit CA die Winkel α, β, γ machen, ſo ſind die Theile, worinn P nach CA und CB zerfällt, P Cos α und P Sin α u. ſ. f., alſo

$$M = P \operatorname{Cos} \alpha + Q \operatorname{Cos} \beta + R \operatorname{Cos} \gamma$$

$$N = P \operatorname{Sin} \alpha + Q \operatorname{Sin} \beta + R \operatorname{Sin} \gamma$$ folglich

$$M^2 = P^2 \operatorname{Cos} \alpha^2 + Q^2 \operatorname{Cos} \beta^2 + R^2 \operatorname{Cos} \gamma^2 + 2PQ \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \beta + 2PR \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \gamma + 2QR \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \gamma$$

$$N^2 = P^2 \operatorname{Sin} \alpha^2 + Q^2 \operatorname{Sin} \beta^2 + R^2 \operatorname{Sin} \gamma^2 + 2PQ \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \beta + 2PR \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \gamma + 2QR \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Sin} \gamma$$

und demnach $S^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ \operatorname{Cos} (\beta - \alpha) + 2PR \operatorname{Cos} (\gamma - \alpha) + 2QR \operatorname{Cos} (\gamma - \beta)$

indem $\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \beta - \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \beta = \operatorname{Cos} (\beta - \alpha)$, u. ſ. f. Man ſieht leicht, daß $\beta - \alpha$, $\gamma - \alpha$, $\gamma - \beta$ die Winkel ſind, welche zwey und zwey Kräfte mit einander einſchließen; daher beſteht das Quadrat der mittlern Kraft aus den Quadraten der einzelnen Kräfte, und den doppelten Produkten je zweyer, multiplicirt durch die Coſinuſſe der Winkel, die ihre Richtungen miteinander machen. Dieſer Satz erſtreckt ſich, wie man leicht darthun kann, auch auf mehrere Kräfte, und iſt ganz allgemein.

Ferner hat man $\operatorname{tang} \vartheta = \dfrac{P \operatorname{Sin} \alpha + Q \operatorname{Sin} \beta + R \operatorname{Sin} \gamma}{P \operatorname{Cos} \alpha + Q \operatorname{Cos} \beta + R \operatorname{Cos} \gamma}$ und wenn man CA in die Richtung von P fallen läßt, ſo wird dadurch $\alpha = 0$, alſo

$$\operatorname{tang} \vartheta = \frac{Q \operatorname{Sin} \beta + R \operatorname{Sin} \gamma}{P + Q \operatorname{Cos} \beta + R \operatorname{Sin} \gamma}$$

§. 61.

Fig. 10. **Aufgabe.** Es ſey die Lage von OD gegen drey in O aufeinander ſenkrecht ſtehende Linien OA, OB und OC gegeben; eine gegebene Kraft P wirke nach dieſer Richtung auf den Punkt O, man ſucht die Kräfte, die aus der Zerlegung derſelben nach jenen drey Linien entſpringen.

Auflöſung. 1) Es ſey der Neigungswinkel DOF der Linie OD gegen die Ebene AOB = q, der Winkel FOA in dieſer Ebene = p.

2) Da die Ebene DOF auf AOB ſenkrecht iſt, ſo liegt CO in derſelben; man kann alſo die Kraft nach den Richtungen OC und OF zerlegen, und da COF = 90° iſt, ſo wird erſtere nach OC = P Sin q, letztere nach OF = P Cos q.

3) Die Richtung OF liegt in der Ebene AOB, und die Kraft P Cos q kann alſo ferner nach OA und OB zerlegt werden; es wird nemlich die nach AO = P Cos q Cos p, und die nach BO = P Cos q Sin p.

4) Die Kräfte, welche aus der gegebenen Kraft P entſpringen, ſind alſo:

nach OA = P Cos q Cos p
nach OB = P Cos q Sin p und
nach OC = P Sin q.

§. 62.

Einfacher laſſen ſich dieſe Kräfte noch dadurch ausdrücken, daß man die Lage der Linie OD durch die Winkel α, β und γ beſtimmt, die ſie mit den Richtungen

OA, OB und OC einſchließt. Es iſt nemlich in der Ecke, welche OD, OF und OA an O bilden, und die an OF rechtwinklicht iſt: Cos DOA $=$ Cos DOF . Cos FOA oder Cos $\alpha =$ Cos p Cos q; ferner in der Ecke BDOF : Cos BOD $=$ Cos BOF . Cos DOF, oder Cos $\beta =$ Sin p Cos q, und endlich Cos COD $=$ Sin DOF, oder Cos $\gamma =$ Sin q, alſo ſind die drey Kräfte folgende: die nach OA $=$ P Cos α, die nach OB $=$ P Cos β und die nach OC $=$ P Cos γ.

Hierbey iſt nur zu bemerken, daß die Lage der Linie OD ſchon durch die Winkel α und β beſtimmt wird, alſo γ von α und β abhängt. Es iſt nemlich Cos α^2 $+$ Cos $\beta^2 =$ (Sin $p^2 +$ Cos p^2) Cos $q^2 =$ Cos q^2, folglich Cos $\alpha^2 +$ Cos $\beta^2 +$ Cos $\gamma^2 = 1$.

§. 63.

Gegenſeitig, wenn drey Kräfte P, Q und R nach ſenkrechten Richtungen OA, OB und OC auf einen Punkt wirken, und man nennt S die mittlere Kraft, die aus ihrer Zuſammenſetzung entſpringt, α, β, γ die Winkel, welche ihre Richtung mit jenen dreyen macht, ſo hat man P $=$ S Cos α, Q $=$ S Cos β, R $=$ S Cos γ, alſo $P^2 + Q \;\; + R^2 = S^2$ (Cos $\alpha^2 +$ Cos $\beta^2 +$ Cos γ^2) $= S^2$, folglich $S = \surd\,(P^2 + Q^2 + R^2)$. Ferner iſt dann Cos $\alpha = \frac{P}{S}$, Cos $\beta = \frac{Q}{S}$, Cos $\gamma = \frac{R}{S}$, wodurch die Lage ihrer Richtung beſtimmt wird.

Sind die Richtungen der Kräfte P, Q, R nicht ſenkrecht aufeinander, ſo zerlege man ſie erſt nach dreyen

ſenkrechten Richtungen, und ſetze dann die nach jeder dieſer Richtungen enthaltenen Summen zu einer Kraft zuſammen.

Gleichgewicht der Kräfte an einer feſten Axe.

§. 64.

Fig. 11. Es ſey AZ eine unbiegſame gerade Linie, und dabey nach keiner Seite zu beweglich, ſo daß die Hebelarme MP, NQ, die in P und Q ſenkrecht daran befeſtigt ſind, ſich nur um dieſe Punkte in Ebenen, ſenkrecht auf AZ, drehen laſſen; dieſe Linie heißt alsdann eine feſte Axe.

§. 65.

Lehrſatz. Wenn die Hebelarme MP und QN in einer gemeinſchaftlichen Ebene liegen, und auf die Punkte derſelben M und N zwey Kräfte P und Q nach Richtungen Mm und Nn wirken, die in den Umdrehungsebenen der Hebelarme ſenkrecht auf ſie ſind, ſo halten dieſe einander das Gleichgewicht, wenn P . MP = Q . NQ iſt.

Beweis 1) Wenn zwey Ebenen ſich ſenkrecht ſchneiden, ſo ſteht eine Linie, die in der einen dieſer Ebenen auf ihrem Durchſchnitte ſenkrecht iſt, auf der andern Ebene ſenkrecht.

2) Die Umdrehungsebene des Hebelarms MP ſchneidet die Ebene MPQN in MP ſenkrecht, und die Richtung Mm ſteht in erſterer ſenkrecht auf MP, alſo

iſt ſie auf der Ebene MPQN ſelbſt ſenkrecht. Eben dies folgt für die Richtung Nn.

3) Man ziehe die Linie MN, die die Axe AZ in o ſchneiden mag, und betrachte ſie als unbiegſam, ſo iſt dieſe Linie für die Kräfte P und Q ein Hebel, der in o ſeinen Ruhepunkt hat, und auf den ihre Richtungen Mm, Nn ſenkrecht ſind.

4) Nun iſt vermöge der Vorausſetzung P : Q = MP : NQ, und in den ähnlichen Dreyecken MPo und NQo, MP : NQ = Mo : No, alſo auch P : Q = Mo : No, folglich ſind die Kräfte im Gleichgewichte.

§. 66.

Folgerung. 1. Sollen die Kräfte P und Q an der Axe AZ einander das Gleichgewicht halten, ſo kann dies nur geſchehen, wenn P . Mo = Q . No, oder, da Mo : No = MP : NQ, wenn P . MP = Q . NQ iſt.

2. Die Wirkung einer Hebelkraft an der Axe richtet ſich alſo nach dem Produkte aus ihr in die Entfernung von dieſer Axe. Man nennt dies Produkt das Moment der Kraft gegen die Axe.

3. Beyden Kräften iſt in o ihre Summe äquipollent, die aber, wenn ſie auf die Punkte P und Q vertheilt wird, wieder in dieſelben Kräfte P und Q zerfällt, weil Po : Qo = MP : NQ iſt. Wäre alſo die Axe beweglich, ſo würden zwey Kräfte = P und Q in den Punkten P und Q nach entgegengeſetzter Richtung angebracht, den Kräften P und Q in M und N das Gleichgewicht halten.

4. Die Axe leidet alſo durch die Kräfte P und Q denſelben Druck, als wenn ſie nach ihrer Richtung unmittelbar auf die Punkte P und Q angebracht wären.

§. 67.

Fig. 12. Es ſey wie vorhin die Richtung Nn der Kraft Q am Hebelarme NQ in der Umdrehungsebene deſſelben, auf ihn ſenkrecht; nur liege der Hebelarm nicht mit dem andern PM in einer Ebene; ich behaupte, es werde auch alsdann noch Gleichgewicht zwiſchen den Kräften P und Q ſtatt finden, wofern $P . MP = Q . NQ$ iſt. Die Umdrehungsebene des Hebelarmes NQ ſchneide die Ebene ZPM in OQR. Man mache $QR = QN$, und bringe in erſterer Ebene auf R eine Kraft $= Q$ nach Rr, ſenkrecht auf QR an, ſo hält dieſe am Winkelhebel NQR der Kraft Q das Gleichgewicht. Iſt nun $P . MP = Q . NQ = Q . RQ$, ſo iſt der Kraft Q am Punkte R die Kraft P äquipollent, folglich ſind auch dann P an M, und Q an N im Gleichgewichte.

§. 68.

Die Kräfte P und Q ſtreben die Hebelarme MP und NQ nach verſchiedener Seite zu drehen; würde dagegen Q nach entgegengeſetzter Richtung auf N angebracht, ſo geſchähe durch ſie die Umdrehung nach Einer Seite zu, und ſie wären dann einander äquipollent. Man kann daher P und Q für einander an ihren Orten ſubſtituiren, wofern ſie einerley Moment haben, und die Umdrehung nach einerley Seite zu bewirken ſuchen.

Geſetzt alſo, es ſind mehrere Kräfte auf die Weiſe wie P und Q an der feſten Axe AZ im Gleichgewichte, ſo laſſen ſich die, welche die Umdrehung nach der Seite Mm hin hervorzubringen ſtreben, auf eine einzige Kraft zurückführen, die ihnen äquipollent iſt. Heißen nemlich dieſe Kräfte P, P′, P″ u. ſ. f. und ihre Entfernungen von der Axe p, p′, p″ . ., ſo ſind ihnen in M, am Hebelarme MP = f, die Kräfte $\frac{Pp}{f}$, $\frac{P'p'}{f}$ u. ſ. f. äquipollent, wodurch eine einzige Kraft entſteht, die das Moment $Pp + P'p' + P''p''$ u. ſ. f. hat.

Eben ſo kann man auch den andern Kräften, die nach entgegengeſetztem Sinne wirken, eine einzige in M nach mM ſubſtituiren. Man nenne die Kräfte Q, Q′, Q″ u. ſ. f., und die Entfernungen von der Axe q, q′, q″ u. ſ. f., ſo hat die ihnen äquipollente Kraft das Moment $Qq + Q'q' + Q''q''$ . . .

Man hat daher, weil die Kräfte in M einander aufheben müſſen:

$$Pp + P'p' + P''p'' \ldots = Qq + Q'q' + Q''q'' \ldots \text{ u. ſ. f.}$$

gerade wie beym einfachen Hebel.

§. 69.

Fig. 12. **Aufgabe.** Den Druck zu finden, den die Kräfte P und Q (§. 67.) auf die Axe AZ ausüben.

Auflöſung. 1) Man bringe Q nach verlängerter Richtung in O an, ſo wirkt ſie auf den Hebelarm OQ unter dem Winkel qOn.

2) Sie zerfällt alſo in eine = Q Sin qOn nach

Op,

Op, ſenkrecht auf OQ, und in eine = Q Cos qOn nach Oq mit OQ parallel.

3) Erſtere hat das Moment Q . OQ Sin qOn = Q . NQ, und ſteht mit P im Gleichgewichte; daher ſie den Druck Q Sin qOn auf den Punkt Q hervorbringt. (66. 4.)

4) Die andere Q Cos qOn wirkt geradezu auf den Punkt Q, indem ſie den Hebelarm OQ von ihm loszureißen ſtrebt; folglich bewirken beyde in Verbindung an dieſem Punkte der Axe den Druck Q nach einer mit On parallelen Richtung.

5) Die Kräfte P und Q drücken demnach die Axe ſo, als wären ſie nach parallelen Richtungen unmittelbar auf die Punkte P und Q der Axe angebracht.

6) Der Satz (66. 4.) wird hierdurch auf ſenkrechte Hebelkräfte an der Axe überhaupt ausgedehnt; man ſieht nemlich, daß er auch dann noch gelte, wenn mehrere dergleichen Kräfte an ihr im Gleichgewichte ſtehen.

§. 70.

Fig. 13. **Aufgabe.** An der Axe AB, die in den Punkten A und B gehalten wird, befindet ſich ein Hebelarm DF; im Punkte F zieht eine Kraft P nach der Richtung Ff, die mit der Axe parallel iſt; man ſucht den Druck, den die Axe in A und B durch dieſe Kraft leidet.

Auflöſung 1) Man zerlege die Kraft P in zwey andere M und N nach den Richtungen FA und FB, die mit der Richtung Ff die Winkel AFf = BAF, und

D

ſFl = ABF machen; ſo wird, wenn wir BAF = η, ABF = ϑ ſetzen: $M = \frac{P \operatorname{Sin} \vartheta}{\operatorname{Sin}(\eta + \vartheta)}$, $N = \frac{P \operatorname{Sin} \eta}{\operatorname{Sin}(\eta + \vartheta)}$ (§. 55.)

2) Da die Richtungen dieſer Kräfte M und N durch die Punkte A und B gehen, ſo kann man ſie unmittelbar auf dieſelben anbringen. (66.)

3) Man zerlege erſtere nach Aα, ſenkrecht auf die Axe, und nach Aa, längs derſelben, ſo wird die ſenkrechte $= M \operatorname{Sin} \eta = \frac{P \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Sin} \vartheta}{\operatorname{Sin}(\eta + \vartheta)}$ und die der Axe parallele $= M \operatorname{Cos} \eta = \frac{P \operatorname{Cos} \eta \operatorname{Sin} \vartheta}{\operatorname{Sin}(\eta + \vartheta)}$

4) Eben ſo entſpringt aus N eine nach Bβ, ſenkrecht auf die Axe, $= N \operatorname{Sin} \vartheta = \frac{P \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Sin} \vartheta}{\operatorname{Sin}(\eta + \vartheta)}$, und eine nach BA $= N \operatorname{Cos} \vartheta = \frac{P \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Cos} \vartheta}{\operatorname{Sin}(\eta + \vartheta)}$.

5) Die beyden Kräfte längs der Axe geben zuſammen die Kraft $\frac{P(\operatorname{Sin} \eta \operatorname{Cos} \vartheta + \operatorname{Cos} \eta \operatorname{Sin} \vartheta)}{S(\eta + \vartheta)}$ $= P$, welche auf den Punkt A kommt. Die Axe muß alſo in A mit der ganzen Kraft P nach der Richtung AB gehalten werden, d. i. ſie wird eben ſo in A gedrückt, als wenn die Kraft P unmittelbar auf einen ihrer Punkte nach ihrer Richtung angebracht wäre.

6) Außerdem leiden nun noch die Punkte A und B nach den entgegengeſetzten Richtungen Aα und Bβ

den Druck $\frac{P \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Sin} \vartheta}{\operatorname{Sin}(\eta + \vartheta)}$ (3. 4.), und da $\frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Sin}(\alpha + \beta)}$ $= \frac{BF}{AB}$ iſt, ſo wird dieſer $= \frac{P \cdot BF \operatorname{Sin} \beta}{AB} = \frac{DF}{AB} \cdot P$

§. 71.

Der Seitendruck, den die Punkte A und B leiden, liegt alſo mit dem Hebelarme DF in Einer Ebene, und iſt ſeiner Länge proportional; außerdem verhält er ſich direkt wie die Kraft, und verkehrt wie die Entfernung der Punkte A und B.

Hiernach läßt ſich z. B. beurtheilen, welche Gewalt die Angeln einer Thür durch das Gewicht derſelben leiden; oder bey Stampfmühlen: wie ſtark die Stempel gegen die Leitungen drücken, und wie dieſer Druck geringer oder größer ſey, je nachdem die beyden Leitungen weiter auseinander, oder näher zuſammenliegen.

§. 72.

Fig. 14. **Aufgabe.** Auf einer unbeweglichen Axe AB ſind mehrere Hebelarme ſenkrecht befeſtigt, an denen Kräfte nach willkührlichen Richtungen ziehen, und ſich im Gleichgewichte erhalten; man fragt, welchen Druck die Punkte A und B, wo die Axe gehalten wird, leiden werden.

Auflöſung 1) Es ſey an einem dieſer Hebelarme DM die Kraft P befindlich. Man zerlege ſie nach §. 61. in drey andere, nach den Richtungen MD, Mm und Mn, wovon erſtere beyden in der Umdrehungsebene

des Hebelarmes ſenkrecht auf einander ſind, und letztere auf dieſer Ebene ſelbſt, ſenkrecht ſteht.

2) Die erſtere wirkt geradezu auf die Axe; die zweyte drückt dieſelbe ebenfalls ſo, als ſey ſie nach paralleler Richtung unmittelbar darauf angebracht, und auch von der dritten gilt dies (§. 70.), weil ſie mit der Axe auf einerley Ebene ſenkrecht ſteht, und ihr alſo parallel iſt. Daher kann man die ganze Kraft P in Anſehung des Druckes, den ſie auf die Axe ausübt, ſo betrachten, als ſey ſie nach gleicher Richtung auf den Punkt D angebracht.

3) Wie dieſer Druck auf die Punkte A und B ſich vertheile, iſt §. 19. gezeigt worden.

4) Außerdem leiden die Punkte A und B durch die der Axe parallele Kraft noch den Druck $\frac{DM}{AB}.P$ nach Richtungen, die mit DM parallel ſind.

5) Was von P gezeigt iſt, gilt auch von den übrigen noch vorhandenen Kräften.

Drittes Kapitel.

Vom Schwerpunkte feſter Körper.

---

§. 73.

Ein feſter Körper läßt ſich als ein Syſtem von Punkten, oder, wenn man will, unendlich kleinen Maſſen

anſehen, die durch unbiegſame Linien ſo mit einander verbunden ſind, daß keins dieſer Theilchen ſich bewegen kann, ohne alle die andern zugleich aus ihrer Lage zu bringen.

Das Weſentliche eines feſten Körpers beſteht nemlich darinn, daß ſeine Theile unter allen Umſtänden einerley Lage gegeneinander behalten, gerade ſo als hingen ſie durch unbiegſame Linien miteinander zuſammen. Was eigentlich dieſen Zuſammenhang zwiſchen den Theilen bewirkt, kommt hier nicht weiter in Betracht; genug, daß in jener Vorſtellung die Bedingung der Feſtigkeit ganz enthalten iſt.

§. 74.

Aufgabe. In einem ſolchen Syſteme von körperlichen Punkten werden die einzelnen Elemente von Kräften m, m′, m″ u. ſ. f. nach parallelen Richtungen ſollicitirt; man ſucht den Punkt in demſelben, wo die Summe aller dieſer Kräfte nach entgegengeſetzter Richtung angebracht, ihnen allen das Gleichgewicht hält.

Auflöſung. 1) Man nehme eine Ebene an, worauf die gemeinſchaftliche Richtung der Kräfte ſenkrecht iſt, ziehe in dieſer nach Gefallen die gerade Linie AB (Fig. 15.) und wähle in derſelben irgend einen Punkt A zum Anfangspunkte.

2) Aus einem Punkte Z des Syſtems fälle man auf dieſe Ebene das Perpendikel ZY, und in der Ebene aus Y auf AB das Perpendikel YX, ſo wird die Lage

dieſes Punktes Z gegen A durch die drey Ordinaten $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ beſtimmt.

3) Für einen andern Punkt Z′ ſeyen eben dieſe Coordinaten $AX' = x'$, $X'Y' = y'$, $Y'Z' = z'$.

4) Die Punkte Z, Z′ ſind der Bedingung zu Folge durch eine unbiegſame gerade Linie ZZ′ verbunden, und das angenommene Gleichgewicht bleibt alſo noch, wenn man den beyden Kräften m und m′, welche auf dieſe Punkte nach parallelen Richtungen wirken, in ihrem gemeinſchaftlichen Schwerpunkte ζ ihre Summe nach eben der Richtung ζυ ſubſtituirt. Für dieſen Punkt hat man nun

$$Z\zeta : Z'\zeta = m' : m \text{ alſo:}$$
$$Z\zeta : ZZ' = m' : m + m'$$

5) Das Perpendikel Zz, aus Z auf Z′Y′ gefällt, werde von der darauf ſenkrechten Richtung ζυ in o geſchnitten, ſo folgt aus der Aehnlichkeit der Dreyecke Zζo und ZZ′z

$$Z\zeta : ZZ' = Zo : Zz; \text{ alſo iſt auch}$$
$$Zo : Zz = m' : m + m' \text{ und eben ſo:}$$
$$\zeta o : z' = m' : m + m', \text{ oder}$$
$$\zeta o : (Z' - z) = m' : m + m', \text{ folglich}$$

$$\zeta o = \frac{m'(z' - z)}{m + m'}, \text{ und } \zeta\upsilon = z + \frac{m'(Z' - Z)}{m + m'}$$
$$= \frac{mz + m'z'}{m + m'}$$

6) Weil $Y\upsilon = Zo$, und $YY' = Zz$, ſo iſt ferner

$$Y\upsilon : YY' = m' : (m + m')$$

Wenn nun υξ ſenkrecht auf AB gezogen wird, und das

aus Y auf Y′X′ gefällte Perpendikel dieſelbe in l ſchneidet, ſo iſt auf gleiche Art:

$Yv : YY' = vl : Y'y = Yl : Yy$ alſo:

$vl : Y'y = m' : (m + m')$ folglich

$$vl = \frac{(y' - y)\, m'}{m + m'},\ \text{und}\ v\xi = \frac{my + m'y'}{m + m'}$$

7) Da endlich $X\xi = Yl$ und $XX' = Yy$, ſo hat man auch:

$x\xi : XX' = m' : (m + m')$, alſo

$$x\xi = \frac{m\,(x' - x)}{m + m'}\ \text{und}\ A\xi = \frac{mx + m'x'}{m + m'}$$

8) Mit der Kraft $m + m'$ im Punkte ζ, deſſen Coordinaten wir eben beſtimmt haben, kann man nun ferner die Kraft m'', die auf den nächſten Punkt Z'' nach eben der Richtung wirkt, ſo verbinden, daß dadurch eine einzige äquipollente Kraft hervorgebracht wird. Dieſe iſt nemlich $= m + m' + m''$, und iſt auf den gemeinſchaftlichen Schwerpunkt von ζ und Z'' gerichtet.

9) Geſetzt, es ſind auf ſolche Weiſe von i Punkten die Kräfte $m, m' \ldots m^{(i)}$ zuſammen in eine Kraft M vereinigt, und die Coordinaten des Punktes, worauf ſie angebracht werden muß $= X, Y$ und Z, ſo wird, wenn noch eine Kraft $m^{(i+1)}$ eines fremden Punktes, deſſen Coordinaten $x^{(i+1)}, y^{(i+1)}, z^{(i+1)}$ ſind, hinzukommt, dieſe ſich ſo mit M verbinden, daß die neue Kraft $M' = M + m^{(i+1)}$ ſeyn, und auf einen Punkt wirken muß, der zu Coordinaten $X' = \frac{MX + m^{(i+1)}x^{(i+1)}}{M + m^{(i+1)}}$,

$$Y' = \frac{MY + m^{(i+1)} y^{(i+1)}}{M + m^{(i+1)}}, Z' = \frac{MZ + m^{(i+1)} z^{(i+1)}}{M + m^{(i+1)}}$$

hat (5. 6. 7.).

10) Iſt daher für i Kräfte die Totalkraft M, die ihnen ſubſtituirt werden kann = der Summe aller einzelnen, ſo gilt dies auch für i + 1 Kräfte; und was die Lage des Punktes betrifft, auf den ſie wirkt, ſo iſt klar, daß wenn $MX = mx + m'x' .. + m^{(i)} x^{(i)}$, auch eben dies Geſetz für X′ gelten werde, indem $M'X' = MX + m^{(i+1)} x^{(i+1)}$ iſt. Ein Gleiches gilt auch für die andern Coordinaten dieſes Punktes.

11) Dies Geſetz, ſowohl in Anſehung der Größe der Kraft, als der Lage des Punktes auf den ſie anzubringen iſt, erſtreckt ſich alſo auf i + 1 Kräfte, wenn es für i Kräfte ſtatt findet. Von zweyen Kräften iſt es aber (5. 6. 7.) erwieſen, alſo iſt es für jede willkührliche Anzahl von Kräften wahr.

12) Man kann daher, ohne das Gleichgewicht zu ſtören, einer Anzahl von i Kräften allemal die Summe derſelben in einem einzigen Punkte nach gleicher Richtung ſubſtituiren, der zu Coordinaten

$$X = \frac{mx + m'x' .. + m^{(i)} x^{(i)}}{m + m' .. + m^{(i)}},$$

$$Y = \frac{my + m'y' .. + m^{(i)} y^{(i)}}{m + m' .. + m^{(i)}}, \text{ und}$$

$$Z = \frac{mz + m'z' .. + m^{(i)} z^{(i)}}{m + m' .. + m^{(i)}} \text{ — hat.}$$

13) Hat man auf ſolche Art alle Kräfte des Syſtems in eine zuſammengebracht, ſo muß dieſe allein

der Gegenkraft das Gleichgewicht halten. Dies kann aber nicht anders geſchehen, als wenn beyde gleich groß ſind, und in entgegengeſetzter Richtung auf einerley Punkt wirken. Die Gegenkraft muß daher = der Summe aller Kräfte des Syſtems ſeyn, und eine ihnen entgegengeſetzte Richtung haben. Iſt außerdem G der geſuchte Punkt, auf den ſie angebracht werden muß, und AD, DF, FG deſſen Coordinaten, ſo hat man

$$AD = \frac{mx + m'x' + m''x'' + \ldots}{m + m' + m'' + \ldots}, DF = \frac{my + m'y' + \ldots}{m + m' + \ldots},$$

$$FG = \frac{mz + m'z' + \ldots}{m + m' + \ldots}$$

§. 75.

Dieſer Punkt G hat alſo die Eigenſchaft, daß die Summe aller einzelnen parallelen Kräfte des Syſtems auf ihn nach entgegengeſetzter Richtung angebracht, ihnen allen das Gleichgewicht hält. Aus der Art wie ſeine Lage beſtimmt iſt, könnte man ſchließen, daß er von der Richtung der Kräfte abhänge, weil die Ebene, auf welche die Coordinaten ſich beziehen, ſenkrecht auf dieſe Richtung genommen iſt, folglich eine andere Richtung der Kräfte, andere Coordinaten für die Punkte des Syſtems hervorbringt. Es entſteht alſo die Frage, ob die Richtung der Kräfte auf die Lage des Punktes G Einfluß hat? Um einzuſehen, daß dies nicht der Fall ſey, darf man nur darauf zurückgehen, wie der Punkt gefunden iſt. Wir ſuchten erſt von zweyen Punkten des Syſtems Z, Z' den gemeinſchaftlichen Schwerpunkt.

Dieſer fällt an einen beſtimmten Ort ζ zwiſchen die beyden Punkte, die Richtung der Kräfte mag ſeyn, welche ſie will; und ſo ſind auch die folgenden Punkte, in denen nach und nach mehrere Kräfte des Syſtems vereinigt wurden, durchaus beſtimmt. Da man nun nach Verbindung aller Kräfte des Syſtems endlich einen Punkt erhält, der mit G zuſammenfallen muß, ſo folgt, daß auch G unwandelbar, und von der Richtung der Kräfte ganz unabhängig ſey.

§. 76.

Die Betrachtung des Syſtems paralleler Kräfte findet ihre Anwendung bey allen feſten Körpern, in ſo fern ſie der Wirkung der Schwere unterworfen ſind. Dieſe Kraft wirkt nemlich in jedes Element des Körpers, denn ſie äußert ſich noch in dem kleinſten Theilchen, das man vom Körper trennt: alſo ſieht man offenbar, daß ſein Gewicht aus der Zuſammenwirkung aller einzelnen Gewichte ſeiner Elemente entſtehe, und daß er folglich als ein Syſtem von lauter parallelen Kräften anzuſehen ſey. Daher giebt es in jedem feſten Körper einen Punkt, worauf eine Kraft nach vertikaler Richtung angebracht werden kann, die ihm das Gleichgewicht zu halten im Stande iſt. Dieſen Punkt nennt man den **Schwerpunkt** des Körpers.

§. 77.

Folgerung 1. Das Gewicht des Körpers iſt ein Compoſitum aus den Gewichten aller ſeiner Theile; man kann aber dafür eine ihm gleiche Kraft in ſeinem

Schwerpunkte als äquipollent ſubſtituiren, oder das Gewicht ſelbſt als eine einfache Kraft betrachten, die anf den Schwerpunkt nach vertikaler Richtung wirkt.

2. Der Körper bleibt in Ruhe, oder ſeine Kraft zu ſinken wird im Gleichgewichte erhalten, wenn ſein Schwerpunkt durch eine vertikale Kraft unterſtützt wird, die ſeinem ganzen Gewichte gleich iſt. Dieſe Kraft kann entweder von unten hinauf wirken, oder durch einen Faden aufwärts ziehen, der im Schwerpunkte, oder in jedem andern Punkte der Vertikale, die durch den Schwerpunkt geht, befeſtigt iſt.

3. Man kann auch den Körper auf einer feſten Unterlage ruhen laſſen; alsdann wird dieſe von ſeinem ganzen Gewichte gedrückt, und der Schwerpunkt leidet dadurch einen gleichen und entgegengeſetzten Druck.

Spezifiſches Gewicht der Körper.

§. 78.

Es giebt keinen Körper, in dem die Theile ſo innig mit einander verbunden wären, daß ſie ſich von allen Seiten genau berührten, oder, wie die Theile des geometriſchen Körpers, ein Continuum bildeten. Sie laſſen bald größere bald geringere Zwiſchenräume zwiſchen ſich, je nachdem ihre Struktur anders iſt, und geben dadurch dem Körper eine Ausdehnung, die er mit ſeiner Maſſe nur zum Theil ausfüllt. Dies macht, daß der eine Körper bey eben dem Volumen mehr wiegt, als der andere.

§. 79.

Der Erfahrung nach haben gleich große Stücke eines homogenen Körpers einerley Gewicht; alſo muß ein doppelt ſo großes Stück doppelt ſo viel wiegen, und überhaupt das Gewicht von einerley Materie dem Volumen proportional ſeyn. Weiß man daher, wieviel das Gewicht G von dem Cubikfuße einer Materie beträgt, ſo kann man daraus beſtimmen, wieviel jedes andere Stück von ihr wiegen muß; es ſey nemlich das Volumen deſſelben = u in Cubikfußen ausgedrückt, ſo iſt ſein Gewicht = Gu.

Exempel. Ein eichener Balken habe 24 Fuß Länge, jede Seite ſeines Querſchnittes ſey = 5 Zoll, uud der Cubikfuß von dieſem Holze wiege 60 ℔, ſo iſt

$u = 24 \cdot \frac{25}{144} = \frac{50}{12}$, und G = 60 ℔; alſo das Gewicht des Balken Gu = 250 ℔.

§. 80.

Dies Gewicht für die Einheit des Volumens iſt nun bey Körpern von verſchiedener Art ungleich, und muß daher für jede beſondere Materie beſonders beſtimmt werden; man nennt es das **eigenthümliche** oder **ſpezifiſche Gewicht** der Körper.

Da das Gewichtsmaaß, deſſen man ſich zu ſeiner Angabe bedient, ſo wie die Einheit des Volumens willkührliche Dinge ſind, ſo kann man auch das ſpezifiſche Gewicht irgend einer Materie, z. B. des reinen Waſſers = 1 ſetzen, und darauf das von andern Körpern

beziehen, wobey aber alsdann in der Ausübung eine Reduktion auf übliche Maaße erforderlich iſt, die ſo geſchieht:

Das ſpezifiſche Gewicht einer Materie ſey $= \pi$, das des Waſſers $= 1$ geſetzt; das Gewicht eines Pariſer Cubikfußes von dieſer Materie $= G$; ſo hat man, da nach Briſſon der Cubikfuß Waſſer 70 ℔ wiegt: $1 : \pi = 70$ ℔ $: G$, alſo $G = 70\,\pi$ in Pfunden.

§. 81.

Bey einem Körper, der nicht gleichförmig dicht iſt, fällt der Begriff vom ſpezifiſchen Gewichte eigentlich weg. Iſt jedoch die Verſchiedenheit in der Dichte ſeiner Theile nicht ſehr groß, ſo kann man ſie in den meiſten Fällen als homogen anſehen, und dem ganzen Körper ein mittleres ſpezifiſches Gewicht beylegen. So z. B. fand Muſchenbroek von dem Stamme einer alten Eiche

das ſpezifiſche Gewicht des Splintes	=	1,039
des innern Holzes	=	1,076
des Markes	=	1,116

Dies Dreyes zuſammen genommen, und durch 3 dividirt, gäbe das mittlere Gewicht des ganzen Stammes = 1,077.

§. 82.

In vielen Körpern giebt es außer den unbemerkbaren Zwiſchenräumen noch andere des Gewebes und der Cryſtalliſation, wodurch ſie lockerer und folglich ſpezifiſch leichter werden, als ihre kleinern Theile es ei-

gentlich ſind. So z. B. ſinken Sägeſpäne von manchem Holze, das auf dem Waſſer ſchwimmt, in demſelben nieder; Kreide, Zucker u. a. ſind im Stücke ſpezifiſch leichter, als wenn ſie zu Pulver zerſtoßen werden.

Solche gröberen Poren finden ſich ſelbſt bey Körpern, an denen man ſie nicht unmittelbar wahrnimmt: die meiſten Metalle werden durch den Hammer merklich verdichtet, ſo daß man bey der Angabe ihres ſpezifiſchen Gewichtes wohl darauf zu ſehen hat, ob ſie geſchlagen oder bloß gegoſſen ſind. Nach Briſſon iſt z. B. das ſpezifiſche Gewicht

des gegoſſenen Silbers	=	10,4743
des geprägten	=	10,5107
des Gußeiſens	=	7,2070
des Stangeneiſens	=	7,7879.

Schwerpunkt homogener Körper.

§. 83.

Bey der Anwendung der §. 74. gefundenen Formeln, die zur Beſtimmung des Schwerpunktes im Körper dienen, bedeuten m, m′, m″ die Gewichte der einzelnen Elemente des Körpers. Eigentlich müßte man nun hiezu die kleinſten materiellen Theile nehmen, wie ſie, durch Zwiſchenräume zerſtreut, im Körper nebeneinander liegen. Dieſe kennen wir aber nicht; alſo iſt ein ſolches Verfahren nicht gedenkbar. Die Eigenſchaft homogener Körper, daß jedes Stück ein, ſeinem Volumen proportionales Gewicht hat, berechtigt uns ſtatt

deſſen, den Körper als ein ſtetiges Ganze anzuſehen, worinn allenthalben Theile anzutreffen ſind, die von einer größern oder geringern Schwere getrieben werden, je nachdem das ſpezifiſche Gewicht des Körpers beſchaffen iſt.

Man ſetze das Gewicht eines homogenen Körpers für das Volumen 1, $= p$, ſo iſt das Gewicht eines Theiles von der Größe $m = mp$, das man in den erwähnten Formeln für m ſetzen müßte. Der Faktor p kommt aber ſodann im Zähler und Nenner vor, und fällt alſo, wenn mit ihm dividirt wird, ganz hinaus. Man kann daher $p = 1$ ſetzen, oder Raum und Gewicht miteinander verwechſeln.

§. 84.

Die rechtwinklichten Coordinaten x, y, z gehen durch den ſtetigen Körper in unendlich kleinen Aenderungen dx, dy, dz fort, und die Elemente m, m' u. ſ. f. in die der Körper dadurch abgetheilt wird, ſind rechtwinklichte Parallelepipeda, deren Inhalt $= dxdydz$ iſt, den wir dM nennen wollen. Die Summe aller dieſer dM iſt $= M =$ der Maſſe oder dem Inhalte des ganzen Körpers; ferner iſt die Summe aller Produkte $mx = \int xdm$, und ſo auch bey den übrigen. Heißen alſo a, b, c die Coordinaten AD, DF, FG, die den Schwerpunkt G des Körpers beſtimmen, ſo hat man

$$a = \frac{\int xdM}{M},\ b = \frac{\int ydM}{M},\ c = \frac{\int zdM}{M}.$$

§. 85.

Fig. 16. Der Schwerpunkt einer ebenen Fläche von unendlich geringer Dicke fällt in dieſelbe hinein, denn man nehme ſie zur Ebene der Coordinaten x und y an, ſo iſt $z = 0$, alſo auch $c = \frac{\int z dM}{M} = 0$. Es bleiben alſo hier für den Schwerpunkt bloß die Coordinaten $AD = a$, und $DG = b$ zu beſtimmen übrig; außerdem iſt jetzt $dM = dxdy$, folglich $a = \frac{\iint xdxdy}{\iint dxdy}$, und $b = \frac{\iint ydxdy}{\iint dxdy}$. Man ſummire nun zuerſt die Differenzialgrößen längs Xy, indem man x als beſtändig annimmt, ſo wird $\iint dxdy = \int ydx$, $\int xdxdy = \int yxdx$, und bis $XY = Y$ genommen, erſteres Integral $= \int Ydx$, letzteres $= \int Yxdx$, mithin $a = \frac{\int Yxdx}{\int Ydx}$; und eben ſo erhält man $b = \frac{\int Y^2 dx}{2\int Ydx}$

Exempel. Es ſey die Fläche AOS der Quadrant eines Kreiſes, deſſen Halbmeſſer $= f$, ſo hat man

$$Y^2 = 2fx - x^2$$
$$YdY = fdx - xdx$$
$$Y^2 dY = fYdx - Yxdx$$

folglich $\int Yxdx = f.\int Ydx - \frac{1}{3} Y^3$, und daher $\frac{\int Yxdx}{\int ydx} = f - \frac{Y^3}{3\int Ydx}$. Setzt man nun $x = f$, ſo wird auch $Y = f$, und $\int Ydx$, als der Inhalt des Quadranten, $= \frac{1}{4}\pi f^2$, folglich

a = f

$$a = f - \frac{4f}{3\pi} = 0{,}5755868184 \ldots f.$$

Ferner iſt $Y^2 dx = 2fxdx - x^3$, alſo $\int Y^2 dx = fx^2 - \frac{1}{3}x^3$, welches $= \frac{2}{3}f^3$ wird, wenn man $x = f$ ſetzt. Demnach iſt $b = \frac{4f}{3\pi}$, und folglich $a + b = f$, wie auch ſeyn muß: denn nimmt man SO zur Abſciſſenlinie an, ſo iſt alles wie vorhin, und man erhält daher $DO = b$.

Anmerkung. Wenn auf beyden Seiten der Abſciſſenlinie Theile der Fläche liegen, ſo ſind die y des entgegengeſetzten Theiles negativ. Man muß ſich aber hüten, dies unmittelbar auf die Formeln für a und b anzuwenden: denn das Element $DM = dxdy$ iſt allemal poſitiv; alſo, wenn y negativ iſt, auch $\iint y\,dxdy = \int Y^2 dx$ negativ, ſtatt daß es, nach dem Quadrate Y^2 zu urtheilen, poſitiv ſeyn müßte. Dagegen iſt $\iint x\,dxdy = \int Y^2 dx$ allemal poſitiv, wofern x poſitiv iſt. Wenn daher die Abſciſſenlinie AP, die Fläche MAN in gleiche und ähnliche Theile theilt, ſo iſt jedesmal ein $Y^2 dx$ dem ihm gleichen auf der andern Seite entgegengeſetzt, folglich die Summe aller $Y^2 dx = 0$, mithin auch $b = 0$. Der Schwerpunkt fällt alsdann in den Durchmeſſer AP, und ſeine Entfernung a vom Scheitel A iſt $= \frac{2\int Yxdx}{2\int Ydx} = \frac{\int Yxdx}{\int Ydx}$.

§. 86.

Fig. 17. Der Schwerpunkt eines Dreyecks fällt in die Linie CD, welche aus der Spitze C gezogen, die Grundlinie AB halbirt: denn zieht man MN mit AB parallel, ſo wird auch dieſe von ihr halbirt, alſo liegt in ihr der Schwerpunkt des unendlich ſchmalen Streifes MNmn; folglich, weil dies von allen ſolchen Streifen gilt, in die das Dreyeck ſich theilen läßt, auch der gemeinſchaftliche Schwerpunkt G aller, oder der des gan-

zen Dreiecks. Man kann daher die Linie CD ſo betrachten, als ſey ſie in allen ihren Punkten mit den Gewichten der dadurch gehenden Streifen belaſtet.

Es ſey nun CD = f, CG = a, CI = x, der Inhalt des ganzen Dreieckes = A, der des Theiles MCN = S, ſo iſt das Stück MNmn = dS, alſo $Aa = \int x dS$: aber $S = \frac{Ax^2}{f^2}$, folglich $dS = \frac{2Axdx}{f^2}$, mithin $\int x dS = \frac{2A}{f^2} . \int x^2 dx = \frac{2Ax^3}{3f^2}$, welches x = f geſetzt, $Aa = \frac{2}{3} Af$, oder $a = \frac{2}{3} f$ giebt.

Der Schwerpunkt des Dreyecks liegt alſo in der Linie CD um $\frac{2}{3}$ ihrer Länge von der Spitze entfernt.

§. 87.

Fällt man daher aus C und G auf die Grundlinie die Perpendikel CO und HG, und zieht GI der Grundlinie parallel, ſo hat man, wenn AO = g, OC = h, und AB = b geſetzt wird: $CI = \frac{2}{3} h$, alſo $GH = IO = \frac{1}{3} h$, und $DH = \frac{1}{3} DO = \frac{1}{3} (g - \frac{1}{2} b)$, folglich $AH = \frac{1}{2} b + \frac{1}{3} (g - \frac{1}{2} b) = \frac{1}{3} (b + g)$.

Für das gleichſchenklichte Dreyeck iſt $g = \frac{1}{2} b$, alſo $AH = \frac{1}{2} b$. Beym rechtwinklichten Dreyecke AOB iſt g = b, alſo $AH = \frac{2}{3} b$, wie auch ſeyn muß, weil $HO = \frac{1}{3} b$ wird, wenn man AO als ſeine Höhe anſieht.

§. 88.

Wenn zwey Körper ſo mit einander verbunden ſind, daß ſie ein feſtes Ganze ausmachen, ſo findet man

deſſen Schwerpunkt folgendermaßen: Man ſuche die Schwerpunkte A und B der beyden Körper einzeln, und ſehe eines jeden Gewicht in dem ſeinigen als vereinigt an; alsdann läßt ſich der gemeinſchaftliche Schwerpunkt C der Punkte A und B in der geraden Linie AB nach §. 17. beſtimmen. Heißen nemlich P und Q die Gewichte der beyden Körper, ſo iſt $AC = \frac{Q \cdot AB}{P+Q}$

Gegenſeitig leitet dies auf ein Verfahren, den Schwerpunkt eines Körpers zu finden, der als Theil eines Ganzen anzuſehen iſt, deſſen Schwerpunkt man bereits kennt, z. B.

Man ſucht den Schwerpunkt G des Trapeziums MNAB.

Da daſſelbe durch Wegnahme des ΔMEN vom ΔACB entſteht, und beyder Schwerpunkte in die Linie CD fallen, ſo muß auch G in dieſe Linie fallen. Setzt man alſo $CD = f$, $CI = g$, $CG = x$, den Inhalt des $\Delta ACB = F$, den des $\Delta MCN = G$, ſo hat man (§. 30.) $\frac{2}{3} Gg + x (F - G) = \frac{2}{3} Ff$, alſo $x = \frac{2}{3} \frac{(Ff - Gg)}{F - G}$. Man nenne nun $AB = a$, $MN = b$, und $ID = c$, ſo iſt:

$f : g = a : b$; $F : G = a^2 : b^2$; $Ff : Gg = a^3 : b^3$, folglich $c = f - g = \frac{(a - b) f}{a}$, $F - G = \frac{(a^2 - b^2) F}{a^2}$, $Ff - Gg = \frac{(a^3 - b^3) Ff}{a^3}$. Dies giebt $x = \frac{2}{3}$

$\frac{f(a^3-b^3)}{a(a^2-b^2)}=\frac{2}{3}f(\frac{a^2+ab+b^2}{a^2+ab})$, und DG $=$

$f-x=\frac{1}{3}f(\frac{a^2+ab-2b^2}{a^2+ab})$. Wird nun für f

ſein Werth $\frac{ac}{a-b}$ geſetzt ſo bekommt man DG $=\frac{1}{3}c$.

$\frac{a^2+ab-2b^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{1}{3}c(\frac{a+2b}{a+b})$

In dieſer Formel bedeutet c die Länge der Linie, welche durch die Mitte der beyden parallelen Seiten geht; beym ſenkrechten Trapezium iſt dies ſeine Höhe.

§. 89.

In jedem Körper, deſſen Oberfläche ein ſtetiges Ganze ausmacht, giebt es eine zuſammenhängende Linie, in welcher die Schwerpunkte aller ſeiner Querſchnitte liegen, die aber zugleich auf ihr ſenkrecht ſeyn müſſen. Sie heißt die centriſche Linie des Körpers. Um ſie zu finden, darf man, wegen letzterer Bedingung, den Körper nicht in willkührliche Querſchnitte abtheilen, daher ihre Angabe oft Schwierigkeiten unterworfen ſeyn kann. Hat man ſie aber einmal beſtimmt, ſo kann man den Körper, in ſo fern er ſchwer iſt, ſich unter dieſer Linie vorſtellen, indem man in ihren Punkten die Gewichte der durch ſie gehenden Querſchnitte als vereinigt anſieht, und der Schwerpunkt der centriſchen Linie iſt alsdann auch zugleich der des Körpers.

§. 90.

Der Schwerpunkt einer Linie, deren Elemente verſchiedenes Gewicht haben, läßt ſich nun ſo finden:

Fig. 15. 1) Man nehme eine Ebene nach Gefallen an, und beſtimme die Punkte Z der Curbe durch die drey rechtwinklichten Coordinaten $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, ſo ſind y und z Funktionen von x.

2) Das Element bey Z ſetze man $= ds$, ſein Gewicht $= pds$, ſo iſt auch p von x abhängig, und man hat nach §. 83.

$a = \frac{\int xpds}{\int pds}$, $b = \frac{\int ypds}{\int pds}$, $c = \frac{\int zpds}{\int pds}$ für die drey Coordinaten AD, DF, FG des Schwerpunktes G dieſer Curbe.

3) Sind die Querſchnitte des Körpers gleich groß, ſo fällt auf jeden Punkt der centriſchen Linie gleiches Gewicht, und alsdann iſt p eine beſtändige Größe, folglich

$$a = \frac{\int xds}{s},\ b = \frac{\int yds}{s},\ c = \frac{\int zds}{s}$$

4) Iſt die Linie von einfacher Krümmung, d. i. fällt ſie ganz in eine Ebene, ſo nehme man in dieſer die beyden Coordinaten x und y an, wodurch $z = 0$, alſo auch $c = 0$ wird. Der Schwerpunkt fällt nemlich alsdann in dieſelbe Ebene hinein.

Exempel. Den Schwerpunkt eines Kreisbogens zu finden. Man ſetze den Halbmeſſer des Kreiſes $= f$, die Sehne des Bogens $= c$, ihre Entfernung vom Mittelpunkte $= g$, und nehme den Punkt A in ihrer Mitte an, ſo hebt ſich jedes Paar xds für gleiche und entgegengeſetzte x, alſo iſt $\int xds = 0$, folglich

auch $a = o$. d. h. der Schwerpunkt des Bogens fällt in den Halbmeſſer, der die Sehne halbirt.

Man ziehe ferner aus dem Mittelpunkte mit der Sehne eine Parallele, und nehme auf dieſer die Abſciſſen x, ſo iſt das zu jedem x gehörige $Y = g + y$, und $Y^2 = f^2 - x^2$, woraus $ds = \frac{fdx}{Y}$ folgt. Dies giebt alſo $fdx = Yds = (g + y)\,ds$, und $yds = fdx - gds$, folglich $\int yds = fx - gs$. Hierin $x = c$ geſetzt, wegen der Verdopplung der Summe durch beyde Seiten, erhält man für s die Länge des ganzen Bogens, und $b = \frac{cf}{s} - g$, alſo die Entfernung des geſuchten Schwerpunktes vom Mittelpunkte $= b + g = \frac{cf}{s}$.

Für den halben Kreis iſt dieſe Entfernung $= \frac{2f}{\pi} = 0{,}636619772 \ldots f$.

§. 91.

Oft verſteht man unter centriſcher Linie auch diejenige, welche durch die Schwerpunkte paralleler Querſchnitte geht, in die man den ganzen Körper eintheilt. Alsdann iſt die Vorſtellung von ihr einfacher, und es gilt noch eben das, was vorhin geſagt iſt: ſie vereinigt das ganze Gewicht des Körpers in ſich, und hat mit ihm einerley Schwerpunkt.

§. 92.

Die centriſche Linie eines Prisma's iſt offenbar

eine gerade Linie; denn ſie wird durch den Schwerpunkt ſeiner Grundfläche beſchrieben, die man an einer der Seitenflächen des Prisma's parallel hinunter bewegt, und die auf ſolche Art nach und nach in die übrigen, ihr parallelen, Querſchnitte zu liegen kommt, Man erhält ſie alſo, wenn man die Schwerpunkte der beyden parallelen Grundflächen des Prisma's zuſammenzieht.

Beym geraden Prisma erfüllt ſie zugleich die Bedingung des §. 88.

Da die parallelen Querſchnitte des Prisma's gleich groß ſind, ſo iſt die centriſche Linie deſſelben in allen Punkten mit gleichen Gewichten beſchwert, deren gemeinſchaftlicher Schwerpunkt alſo in ihre Mitte fällt. **Daher liegt der Schwerpunkt eines Prisma's in der Mitte ſeiner centriſchen Linie.**

§. 93.

Aufgabe. Den Schwerpunkt einer Pyramide zu finden.

Aufl. 1) Die centriſche Linie der Pyramide iſt ebenfalls gerade, und geht durch die Spitze derſelben und den Schwerpunkt der Grundfläche: denn da die der Grundfläche parallelen Querſchnitte ähnlich ſind, ſo haben ihre Schwerpunkte ähnliche Lagen in denſelben, wodurch ſie in eine gerade Linie zu liegen kommen.

2) Nun ſey ihre Länge, die ſich vermöge ihrer Conſtruction leicht finden läßt, $= f$, ein beliebiges Stück von ihr $= x$, der Inhalt des obern Pyramidenſtückes, wozu dies gehört $= P$, ſo iſt der Inhalt des

zunächſt liegenden Querſchnittes von unendlich geringer Dicke $= dP$. Heißt alſo nun noch F der Inhalt der ganzen Pyramide, a die Entfernung des Schwerpunktes in der eentriſchen Linie von der Spitze, ſo hat man

$Fa = \int x dP$.

3) Nun iſt $F : P = f^3 : x^3$, alſo $P = \frac{Fx^3}{f^3}$,

$dP = \frac{3Fx^2}{f^3}$, und $\int x dP = \frac{3F}{f^3} . \int x^3 dx = \frac{3Fx^4}{4f^3}$, das für $x = f$ der Werth $\frac{3}{4} Ff$ bekommt. Man hat daher: $Fa = \frac{3}{4} Ff$ er $a = \frac{3}{4} f$.

4) **Der Schwerpunkt der Pyramide liegt alſo in der centriſchen Linie um $\frac{3}{4}$ ihrer Länge von der Spitze entfernt.**

§. 94.

Demnach iſt auch die centriſche Linie einer abgekürzten Pyramide gerade, und es iſt leicht, in ihr den Schwerpunkt derſelben zu finden. Heißen nemlich die Längen der centriſchen Linie für die ganze Pyramide, und das fehlende obere Pyramidenſtück f und g, ihre Inhalte F und G, ihre Grundflächen, wodurch das abgekürzte Stück begrenzt wird, B und S, und endlich die Entfernung ſeines Schwerpunktes von der Spitze x, ſo hat man nach §.

$$\frac{3}{4} Gg + x (F - G) = \frac{3}{4} Ff, \text{ alſo } x = \frac{3}{4} . \frac{Ff - Gg}{F - G}.$$

Da nun $f : g = B^{\frac{1}{2}} : S^{\frac{1}{2}}$, $F : G = B^{\frac{3}{2}} : S^{\frac{3}{2}}$, und $Ff : Gg = B^2 : S^2$ ſo wird $x = \frac{3}{4} f \frac{B^2 - S^2}{(B^{\frac{3}{2}} - S^{\frac{3}{2}}) . \sqrt{B}}$.

Man nenne c die Länge der centriſchen Linie innerhalb der beyden Grundflächen, ſo iſt $c = f - g = f \frac{(B^{\frac{1}{2}} - S^{\frac{1}{2}})}{B^{\frac{1}{2}}}$, und $f = \frac{B^{\frac{1}{2}}\,c}{B^{\frac{1}{2}} - S^{\frac{1}{2}}}$, folglich $x = \frac{3}{4}\,c.\ \frac{(B^2 - S^2)}{(B^{\frac{3}{2}} - S^{\frac{3}{2}})\,(B^{\frac{1}{2}} - S^{\frac{1}{2}})}$, und die Entfernung des Schwerpunktes vom Schwerpunkte der untern Baſis $= f - x = \frac{1}{4}\,c.\ \frac{B^2 - 4B^{\frac{1}{2}}\,S^{\frac{3}{2}} + 3S^2}{(B^{\frac{3}{2}} - S^{\frac{3}{2}})\,(B^{\frac{1}{2}} - S^{\frac{1}{2}})}$, oder wenn man mit $(B^{\frac{1}{2}} - S^{\frac{1}{2}})^2$ dividirt, $= \frac{1}{4}\,c.\ \frac{B + 3S + 2\sqrt{BS}}{B + S + \sqrt{BS}}$

§. 95.

Lehrſatz. Bey ebenen Figuren oder Körpern, welche einen Mittelpunkt, d. i. einen Punkt von ſolcher Beſchaffenheit enthalten, daß allemal zwey entgegengeſetzte Radien, die von ihm aus nach dem Umfange, oder beym Körper, bis zur Oberfläche gehen, einander gleich ſind, fällt der Schwerpunkt in dieſen Mittelpunkt hinein.

Fig. 18. Beweis 1) Es ſey MSN der Umfang einer ſolchen Figur, C ihr Mittelpunkt; man ziehe durch C die gerade Linie MCN, und eine andere mCn ihr unendlich nahe, ſo iſt der Vorausſetzung nach, CM = CN, Cm = Cn, und die Dreyecke CMm, CNn ſind alſo congruent.

2) Die centriſche Linie des △MCm halbirt ſeine Grundlinie in O, und fällt daher mit der des △CNn zuſammen, weil ſie verlängert auch Nn halbirt.

3) Nun ſeyen G und g die Schwerpunkte der beyden Dreyecke, ſo hat man $CG = \frac{2}{3} CO$, $Cg = \frac{2}{3} Co$, alſo, weil $CO = Co$ iſt, auch $CG = Cg$; mithin ſind in gleichen Entfernungen von C gleiche Gewichte befindlich, und C iſt folglich ihr gemeinſchaftlicher Schwerpunkt.

4) Eben dies gilt ſo von jedem Paare ſolcher entgegengeſetzten Dreyecke, in die ſich die ganze Figur theilen läßt; alſo fällt auch der Schwerpunkt der ganzen Figur in C.

5) Beym Körper ziehe man aus dem Mittelpunkte C vier ſolcher unendlich nahe liegenden Radien, und verlängere ſie nach entgegengeſetzten Richtungen über C hinaus, ſo entſtehen dadurch zwey gleiche und ähnliche Pyramiden in entgegengeſetzter Lage, deren centriſche Linien alſo in Eine durch C gehende Linie zuſammenfallen, und von gleicher Länge ſind.

6) In dieſen liegen die Schwerpunkte der Pyramiden gleich weit von C entfernt (§. 92.), und haben folglich in C ihren gemeinſchaftlichen Schwerpunkt. Da nun der ganze Körper in ſolche einander entgegenliegende Pyramiden ſich theilen läßt, ſo folgt, daß deſſen Schwerpunkt ebenfalls in C hineinfalle.

§. 96.

Folg. 1. Zu den ebenen Figuren der Art gehören: das reguläre Vieleck; das Parallelogram, deſſen Schwerpunkt deshalb in den Durchſchnitt der beyden Diagonalen fällt; der Kreis, die Ellipſe u. a. m.

2. Die centriſche Linie des Cylinders geht daher durch die Mittelpunkte ſeiner Grundflächen, und da er zu den prismatiſchen Körpern gehört, ſo liegt ſein Schwerpunkt in der Mitte derſelben.

3. Eben ſo geht die centriſche Linie des ſchiefen ſowohl als geraden Kegels durch deſſen Spitze und den Mittelpunkt ſeiner Grundfläche, und ſein Schwerpunkt liegt in ihr um $\frac{1}{4}$ ihrer Länge von der Spitze entfernt. Beym geraden Kegel iſt die centriſche Linie alſo mit der Höhe oder Axe einerley.

4. Zu den Körpern, die einen Mittelpunkt haben, gehört die Kugel, und das elliptiſche Sphäroid.

§. 97.

Fig. 19. Ueberhaupt iſt bey allen runden Körpern, d. h. ſolchen, die durch Umdrehung einer Fläche AMSX um ihre Axe AX entſtehen, die Axe zugleich die centriſche Linie derſelben. Denn jeder auf die Axe ſenkrechte Querſchnitt des Körpers iſt ein Kreis, deſſen Mittelpunkt in der Axe liegt.

Man ſetze daher die rechtwinklichten Coordinaten AP und PM, wodurch die Beſchaffenheit der Linie AMS beſtimmt wird, $= x$ und y, ſo iſt das Element des Körpers, welches von den beyden unendlich nahe liegenden Querſchnitten, die durch P und p gehen, begrenzt wird, und die Dicke $Pp = dx$ hat, $= \pi y^2 dx$, und man folglich, wenn die Entfernung AG des Schwerpunktes vom Scheitel $= a$ geſetzt wird: $a = \frac{\pi \int y^2 x dx}{\pi \int y^2 dx} = \frac{\int y^2 x dx}{\int y^2 dx}$, wo ſowohl im Integrale des

Zählers als des Nenners x = der ganzen Länge der Axe oder centriſchen Linie geſetzt werden muß.

Z. E. Es ſey der Körper ein Kugelſegment von der Höhe AX = h, und der Halbmeſſer der Kugel = f, ſo iſt:

$y^2 = 2fx - x^2$, folglich $\int y^2 dx = fx^2 - \frac{1}{3}x^3$, und $\int y^2 x dx = \frac{2}{3} fx^3 - \frac{1}{4} x^4$, und daher für x = h,

$a = \frac{8fh - 3h^2}{12f - 4h}$. Für die Halbkugel iſt h = f, alſo

$a = \frac{5}{8}$ f.

Die Wage.

§. 98.

Um zu erfahren, wie viel ein Körper wiege, darf man nur bekannte Gewichte, oder auch andere Kräfte, die man kennt, mit ihm ins Gleichgewicht bringen, und das kann auf ſehr mannigfaltige Art geſchehen. Beyſpiele davon geben außer dem gemeinen Hebel, Lamberts ſchwere Ebene *), die Federwaage, der von Ludlam angegebene Winkelhebel **) u. a. m. Unter allen dieſen behält aber doch immer der Hebel wegen ſeiner Einfachheit den Vorzug, und iſt deshalb als Werkzeug zum Abwiegen allgemein aufgenommen. Man kann durch ihn, wie man will, entweder Genauigkeit in Beſtimmung des Gewichts erlangen, oder, wie dies von der Schnellwage §. 36. gezeigt iſt, den Vortheil, daß

*) S. Acta Helvetica Tom. 3.

**) Phil. Transact. Vol. 55.

man bey großen Laſten mit geringern Gewichten aus- reicht. Beyde Zwecke ſind von entgegengeſetzter Art, und laſſen ſich nicht zu gleicher Zeit erfüllen: denn um aus dem kleinern Gewichte auf das größere zu ſchlie- ßen, muß man es multipliciren, wodurch ein an ſich unbemerkbarer Fehler, den man beym Abwiegen be- geht, zu einer beträchtlichen Größe anwachſen kann. Man würde alſo, wo Genauigkeit das Haupterforder- niß iſt, die Schnellwage umkehren, und zur Beſtim- mung einer Laſt, ein noch größeres Gewicht anwenden müſſen; aber dies Verfahren, außerdem daß es manche Unbequemlichkeiten haben würde, könnte doch ſelbſt auch wegen der Eintheilung des kleinern Armes neue Fehler veranlaſſen. Man wählt daher zwiſchen beyden Einrichtungen das Mittel, und nimmt die Hebelarme gleich lang, wodurch die ſogenannte **Wage** entſteht. Jeder kennt dies Inſtrument, alſo iſt ſeine Beſchrei- bung unnöthig, und wir können uns hier darauf ein- ſchränken zu beſtimmen, was die Erforderniſſe ſeiner Vollkommenheit ſind, und wie ſich dieſe erreichen laſſen.

§. 99.

Ein gleicharmiger Wagebalken, deſſen Schwer- punkt in ſeine Axe fällt, wird in jeder Lage bey gleichen Gewichten ruhen (§. 58.), alſo iſt ſeine horizontale Lage kein ausſchließendes Zeichen des Gleichgewichts. Aus eben dem Grunde kann er auch bey keiner Lage in Ruhe treten, wenn die Gewichte ungleich ſind, und muß ſich daher in dem Falle ſo lange drehen, bis er ver-

tikal zu ſtehen kommt. Da dies das Abwiegen ſehr beſchwerlich machen würde, ſo muß man nothwendig den Wagebalken ſo einrichten, daß er für ungleiche Gewichte dennoch in irgend einer ſchiefen Lage ſtehen bleibt, und folglich nur in dem einen Falle die Gewichte gleich ſeyn können, wenn er ſich horizontal ſtellt.

§. 100.

Fig. 20. Es ſey O der Ruhepunkt des Wagebalken, g ſein Schwerpunkt; in jedem der Punkte A und B, die in einer Horizontale AB liegen ſollen, hänge ein gleich großes Gewicht p vermittelſt zweyer Schaalen, deren Gewichte wir = m und n ſetzen wollen. Das Gewicht des Balken ſey = G, und wenn man OC und gl auf AB ſenkrecht zieht, CG = lg macht; OG = f, Gg = Cl = g. Der einfache Hebel, an dem dieſe Kräfte einander das Gleichgewicht halten, iſt ſodann als ein Winkelhebel AOB anzuſehen, und da ihre ſenkrechten Entfernungen vom Ruhepunkte AC, BC und Cl ſind, ſo hat man

$$(p+m)\,AC = (p+n)\,BC + Gg, \text{ folglich}$$
$$p\,(AC - BC) = n\,.\,BC - m\,AC + Gg.$$

Da dieſe Gleichung für jedes p ſtatt finden ſoll, ſo muß jede Seite für ſich = o ſeyn, alſo wird

$$p\,(AC - BC) = o \text{ und}$$
$$n\,.\,BC - m\,.\,AC + Gg = o$$

Erſtere Gleichung giebt AC = BC, woraus erhellet, daß nur die gleicharmige Wage für gleiche angehängte Gewichte bey horizontaler Lage in Ruhe ſeyn kann.

Aus der andern Gleichung erhält man:

$$mAC = nBC + Gg$$

alſo müſſen die Gewichte der Schalen ſo beſchaffen ſeyn, daß ſich die Wage auch dann horizontal ſtellt, wenn ſie mit gar keinen Gewichten beſchwert iſt.

Fällt daher der Schwerpunkt g in G, oder mit dem Aufhängepunkte in einerley Vertikale, ſo hat man $g = o$, folglich $m = n$.

§. 101.

Die erſte Bedingung bey einer Wage iſt alſo die, daß ſie gleicharmig ſeyn muß, d. h. daß ein Perpendikel aus dem Ruhepunkte O auf die Linie AB durch die Aufhängepunkte gezogen, dieſe halbiren muß. Es können nemlich nur alsdann zwey gleiche Gewichte bey horizontaler Lage der Linie AB einander aufwiegen. Um genau zu wiſſen, wann der Wagebalken horizontal liegt, hat man die Zunge auf ihn angebracht, die auf AB ſenkrecht ſeyn muß, weil man unter dem Wagebalken, wenn von ſeiner Lage die Rede iſt, allemal die Linie AB zu verſtehen hat. Da die Zunge bey horizontaler Lage des Wagebalken vertikal iſt, und ſich alſo hinter der Scheere, die ebenfalls vertikal hängt, verbirgt, ſo macht man bey genauen Wagen an der Stelle, wo die Spitze der Zunge durchgeht, in der Scheere eine Oeffnung. Die Zunge muß ſich, wenn ſie vollkommen vertikal ſteht, in dieſer Oeffnung zeigen, und in die Linien fallen, welche die Scheere ihrer Länge nach halbirt.

§. 102.

Wenn die Theile AC und BC ungleich lang ſind, ſo heißt die Wage falſch. Man nenne p und q die ungleichen Gewichte, die bey ihr, wenn ſie horizontal iſt, im Gleichgewichte ſtehen, ſo hat man: $(p + m) AC = (q + n) BC + Gg$.

Hat ſie für ſich, wenn ſie von den Gewichten frey iſt, horizontalen Stand, ſo iſt $m . AC = n . BC + Gg$, und ſetzt man

$$m = n,\ m (AC - BC) = Gg.$$

alſo für $m = o$, auch $Gg = o$, d. i. wenn die Wage auch nach Wegnahme der Schalen noch horizontal ſeyn ſoll, ſo muß der Schwerpunkt des Balken in die Vertikale OC fallen: alsdann aber kann ſie nicht mehr in dieſer Lage bleiben, ſobald die Schalen angehängt werden, wodurch ſie ihre Unrichtigkeit gleich offenbart.

§. 103.

Die Bedingungsgleichung $m . AC = n . BC + Gg$ von der erſtern abgezogen, läßt übrig $p . AC = q . BC$. Dieſe Eigenſchaft der falſchen Wage giebt ein Mittel, die ungleiche Länge ihrer Arme zu erforſchen, und das wahre Gewicht eines Körpers durch ſie dennoch zu finden. Man ſetze nemlich, der Körper habe nach der Wage das Gewicht p, wenn er in die Schale bey B, und das Gewicht q, wenn er in die bey A gelegt wird; ſein wahres Gewicht ſey $= x$, ſo iſt:

$$p . AC = x . BC \text{ und}$$

$$x . AC = q . BC$$

alſo

alſo $x.AC.BC = pAC^2 = q.BC^2$, folglich $AC : BC = \sqrt{q} : \sqrt{p}$; und $x^2 = pq$, oder $x = \sqrt{pq}$.

Hat man erſt durch einen Verſuch das Verhältniß der Arme gefunden, ſo hat man nachher nicht wieder nöthig, das doppelte Wiegen in beyden Schalen anzuſtellen. Wem es beſchwerlich fallen ſollte, Wurzeln auszuziehen, der könnte auch ſo verfahren: Man wiege den Körper durch irgend eine Sache, ſie ſey Gewicht, oder ſonſt etwas, auf; nehme ihn von der Schale weg, und lege dafür ſo viel Gewicht hinein, daß die Wage wieder horizontal zu ſtehen kommt, ſo iſt letzteres Gewicht dem des Körpers äquipollent, und folglich mit ihm einerley.

§. 104.

Aufgabe. Bey der gleicharmigen Wage den Neigungswinkel der ſchiefen Lage des Wagebalken gegen die horizontale zu beſtimmen, in der ſie ſtehen bleibt, wenn zu p auf der einen Seite B noch ein Gewicht π hinzukommt.

Aufl. 1) Man betrachte jetzt die Lage von AB als ſchief, und $A\alpha$, $B\beta$, Oc, $g\lambda$ als die Vertikalen nach denen die Gewichte ziehen, und der Ruhepunkt widerſteht. Dieſe machen alsdann mit den auf AB ſenkrechten Linien Aa, Bb, OC, gl den geſuchten Neigungswinkel, den wir F nennen wollen.

2) Die Kraft, womit der Ruhepunkt O zurückwirkt, und die nach cO gerichtet iſt, kann man auf den Punkt c reduciren, und da auf ſolche Weiſe die Ge-

wichte nach parallelen Richtungen an dem Hebel AcB ziehen, ſo würde das Gleichgewicht noch bleiben, wenn man ſie nach ſenkrechten Richtungen auf eben die Punkte anbrächte. Dieſem zu Folge hat man:

$$(p+m)\,Ac=(p+\pi+n)\,Bc+G.c\lambda.$$

3) Nun ſetze man $OC=h$, $AC=BC=a$, ſo iſt $Cc=h \tang I$, $l\lambda=CG \tang I=(f-h) \tang I$, folglich $Ac=a+h \tang I$, $Bc=a-h \tang I$, $c\lambda=g-f \tang I$, und daher:

$$(p+m)(a+h \tang I)=(p+\pi+n)(a-h \tang I)+G(g-f \tang I).$$

4) Daraus wird

$[(2p+\pi+m+n)\,h+Gf] \tang I+(m-n-\pi)\,a=Gg$ folglich da $(m-n)\,a=Gg$ (§. 99.)

$$\tang I=\frac{\pi a}{(2p+\pi+m+n)\,h+Gf}$$

Oder, wenn man den Druck, den der Ruhepunkt leidet, $=P$ ſetzt: $\tang I=\dfrac{\pi a}{Ph+Gf}$

§. 105.

Folgerung. 1. Da $\tang I$ ſich wie π verhält, ſo kann dieſer Winkel nicht anders $=0$ werden, als wenn $\pi=0$ iſt, d. h. der Wagebalken kann ſich nicht anders horizontal ſtellen, als wenn beyde Gewichte gleich groß ſind, daher iſt ſeine horizontale Lage ein ausſchließendes Zeichen der Gleichheit der Gewichte.

2. Man kann gegenſeitig aus dem Winkel I den Unterſchied π der Gewichte beſtimmen, wofern man die

Werthe von a, f, h und G weiß, und dieſe laſſen ſich durch Verſuche mit Gewichten finden. Da es ſchwer hält, das Gleichgewicht ſo zu treffen, daß die Zunge völlig vertikal zu ſtehen kommt, ſo könnte dies bey Abwägungen, wo große Genauigkeit gefordert wird, von Nutzen ſeyn, indem ſich die Abweichung der Zunge von der Vertikale durch einen an der Scheere angebrachten Gradbogen ſehr genau meſſen ließe.

3. Es iſt gut, wenn die Wage für einen geringen Unterſchied der Gewichte um einen merklichen Winkel aus der horizontalen Lage weicht: denn alsdann läßt ſich dieſer Unterſchied leichter beobachten und erſetzen. Da ſich nun tang I auch wie a verhält, ſo ſieht man, daß die Wage eine deſto genauere Beſtimmung des Gewichtes zuläßt, je länger ihre Arme ſind.

4. Fällt der Schwerpunkt in den Aufhängepunkt, und dieſer zugleich in die Linie AB, ſo iſt $h = f = 0$, *alſo* $\tang I = \infty$, und $I = 90°$, d. h. die Wage ſchlägt in dieſem Falle bey der mindeſten Verſchiedenheit der Gewichte ſogleich um, und ſtellt ſich vertikal, wie ſchon §. 98. angemerkt iſt.

5. Da g in der Formel nicht vorkommt, ſo iſt es in Rückſicht des Erforderniſſes (3) einerley, ob die Arme der Wage gleich ſchwer ſind, oder nicht. Haben ſie ungleiches Gewicht, ſo müſſen nur die Schalen ſo genommen werden, daß die Gleichung $(m - n) a = Gg$ erfüllt wird, und das kann oft zweckmäßig ſeyn: weil nemlich die Gewichte gewöhnlich aus Bley beſtehen, ſo haben ſie meiſt ein weit größeres ſpecifiſches Gewicht,

als das, was man durch ſie wiegt, und nehmen alſo viel weniger Raum ein; daher kann die Schale für ſie weit kleiner ſeyn, als die andere, wodurch P vermindert wird.

§. 106.

Aufgabe. Wenn die Wage gleiche Gewichte trägt, und in eine ſchiefe Lage gebracht wird, die Kraft zu beſtimmen, womit ſie gehalten werden muß, um in dieſer zu bleiben.

Aufl. 1) Der Wagebalken ſey unter dem Winkel I inclinirt; auf OB ſey die geſuchte Kraft V ſenkrecht angebracht, und da es bloß auf ihr Moment ankommt, ſo heiße dies M. Alsdann iſt $M = V . OB$.

2) Man ſetze, ein Gewicht π ſey ihr äquipollent, und zerlege dies nach OB und der darauf ſenkrechten Richtung, ſo iſt letzterer Theil, wenn man den Winkel $CBO = \omega$ ſetzt, $= \pi \operatorname{Cos} (I + \omega)$, weil die Verlängerung von OB mit der Vertikale $B\beta$ den Winkel $I + \omega$ macht; alſo $V = \pi \operatorname{Cos} (I + \omega)$.

3) Demnach iſt $M = OB . \pi \operatorname{Cos} (I + \omega) = \pi \operatorname{Cos} I . OB (\operatorname{Cos} \omega - \operatorname{Sin} \omega \operatorname{tang} I) = \pi \operatorname{Cos} I$ $(a - h \operatorname{tang} I)$, und $\pi . Bc = \frac{M}{\operatorname{Cos} I}$.

4) Da die Gewichte nach parallelen Richtungen ziehen, ſo kann man ſie auf eben die Punkte nach ſenkrechten Richtungen anbringen, ohne das Gleichgewicht zu ſtören, alſo hat man:

$$(p+m)(a+h\,\mathrm{tang}\,I) = (p+n)(a-h\,\mathrm{tang}\,I)$$
$$+Gg(g-f\,\mathrm{tang}\,I)+\frac{M}{\mathrm{Cos}\,I};$$

folglich $\frac{M}{\mathrm{Cos}\,I} = (m-n)a - Gg + [(2p+m+n)$
$h + Gf]\,\mathrm{tang}\,I$

oder, weil $(m-n)a - Gg = 0$ iſt:

$$M = (2p+m+n)\,h + Gf)\,\mathrm{Sin}\,I.$$

§. 107.

Zu den Eigenſchaften einer guten Wage gehört auch die, daß ſie, wenn die Gewichte gleich ſind, dies ſo ſchnell als möglich anzeige; und dazu wird erfordert, daß alsdann ihr Beſtreben, ſich horizontal zu ſtellen, ſo groß als möglich ſey. Da nun dies Beſtreben auf dem von M beruhet, ſo ſieht man, daß die Wage ſo eingerichtet werden müſſe, daß der Ausdruck $(2p+m+n)$ $h+Gf$ einen möglichſt größten Werth bekomme. Aber dies ſtreitet geradezu mit der Bedingung §. 104. 3. nach der tang I ſo groß als möglich, folglich $Ph + Gf$ ſo klein als möglich ſeyn ſoll. Man kann daher keinem dieſer beyden Requiſite völlig Genüge leiſten, wofern man nicht das eine dem andern nachſetzen will, welches doch nicht geſchehen darf, da ſie beyde gleich weſentlich ſind. Am beſten thut man alſo, wenn man die Werthe h, f und g weder zu groß noch zu klein annimmt.

§. 108.

Aus dem gefundenen Werthe für M laſſen ſich noch folgende Betrachtungen ziehen:

1. Fällt der Ruhepunkt über die Linie AB, ſo iſt h poſitiv, alſo die Wage deſto raſcher, je größer die Gewichte ſind, womit ſie beladen wird.

2. Iſt OG = o, ſo iſt M = Gf tang I, alſo ihr Beſtreben bey gleichen Gewichten ſich horizontal zu ſtellen, für große und kleine Gewichte gleich groß. Da die Friction die Trägheit der Wage vermehrt, und für größere Gewichte größer iſt, ſo iſt eine Wage, bey der O in AB fällt, für kleinere Gewichte brauchbarer.

3. Wenn ſowol C als G über O liegt, ſo ſind h und f beyde negativ, alſo auch M. Das heißt nun, wenn der Balken einer ſolchen Wage aus der horizontalen Lage gebracht wird, ſo hat er ein Beſtreben, ſich noch weiter davon zu entfernen, und ſich ganz herumzudrehen, bis der Ruhepunkt über die Punkte C und G zu liegen kommt. Dieſer Fehler, der durchaus nicht ſtatt finden darf, macht dergleichen Wagen ganz untauglich.

4. Iſt bloß OC negativ, ſo iſt die Wage für kleinere Gewichte brauchbar, indem dann M einen mittlern Werth bekommt, wofern Gf nicht zu klein iſt. Für größere Gewichte hingegen wird ſie träge, und kann ſelbſt zum Umſchlagen geneigt werden.

5. Iſt ſtatt deſſen OG bloß negativ, ſo iſt die Wage für Gewichte, die kleiner als $\frac{Gf}{2h}$ ſind, dem Umſchlagen ausgeſetzt; für etwas größere wird ſie träge, und für noch größere brauchbar. Man kann alſo die

Wagen ſo einrichten, daß ſie entweder zu größeren oder kleinern Gewichten taugen.

Anmerk. Das Bisherige iſt zum Theil aus Eulers Abhandlung de Bilancibus genommen, die in den Coment. Petropol. Tom. X. ſteht. Andere nöthige Betrachtungen über dies Inſtrument kommen in der Folge vor, weil ſie noch weitere Vorkenntniſſe vorausſetzen. Wer ſich mit der genauern Einrichtung deſſelben, und der Verfertigung ſeiner Theile bekannt machen will, der leſe folgende Schriftſteller darüber nach:

Bülfinger, Comment. Petropol. Tom. II.
Leutmann, Comment. Petropol. Tom. X.
Kuhn, Verſuche der naturforſchenden Geſellſchaft in Danzig Tom. I.

Stabilität der Körper auf feſtem Boden.

§. 109.

Die äußerſten Punkte eines Körpers, womit er den horizontalen Boden berührt, auf dem er ruhet, ſchließen einen beſtimmten Raum ein, den wir die Baſis des Körpers nennen wollen.

Der Körper kann durch Füße oder Stützen nur in einigen Punkten den Boden berühren, alsdann erhält man den Umfang der Baſis, wenn man je zwey der nächſten Berührungspunkte durch gerade Linien verbindet.

§. 110.

Wenn der Körper vermöge ſeiner Stellung vor dem Umſchlagen geſichert iſt, ſo muß doch irgend eine Kraft, die ſeitwärts auf ſeinen Schwerpunkt wirkt, ihn um eine der Seiten ſeiner Baſis zu drehen im Stande ſeyn, wofern er nicht den Boden parallel fortrücken

kann. Dieſe Kraft, wenn ſie gerade ſo groß genommen wird, als nöthig iſt, den Widerſtand des Körpers zu überwinden, beſtimmt die Feſtigkeit ſeines Standes in Anſehung der Seite, nach der die Umdrehung geſchieht, oder, wie man ſich ausdrückt, ſeiner Stabilität.

§. 111.

Aufgabe Die Stabilität eines Körpers, der auf horizontalem Boden ſteht, in Rückſicht einer Seite AB ſeiner Baſis zu finden.

Fig 21. Aufl. 1) Man fälle aus ſeinem Schwerpunkte G auf den Boden ſowohl als auf die Linie AB die Perpendikel GO und GD, und lege durch beyde eine Ebene, ſo ſchneidet dieſe die Linie AB in D ſenkrecht.

2) Wenn man daher in derſelben GI mit DO parallel zieht, und darauf das Perpendikel DI fällt, ſo ſind DO und DI ebenfalls beyde ſenkrecht auf AB.

3) Es wirke nun eine Kraft S auf den Schwerpunkt G nach der horizontalen Richtung GI, und werde durch den Körper vermöge ſeiner Stabilität im Gleichgewichte erhalten, ſo kann man dieſe auf den Punkt I anbringen, und ſie hat daſelbſt das Moment S . DI den Körper um AB zu drehen.

4) Das Gewicht des Körpers ſey P, ſo hat dies in O das Moment P . DO, den Körper nach entgegengeſetzter Seite um AB zu drehen.

5) Sollen alſo beyde Kräfte an der Axe AB im Gleichgewichte ſeyn, ſo hat man $S . DI = P . DO$ (§. 67.), alſo $S = \frac{DO}{DI} . P = \frac{DO}{GO} . P.$

6) Wäre $S > \frac{DO}{GO} . P$; ſo wäre das Moment $S . DI > P . DO$, und es erfolgte wirklich eine Umdrehung des Körpers nach außen zu: alſo iſt die Kraft $\frac{DO}{GO} . P$ gerade ſo groß, als nöthig iſt, den Widerſtand des Körpers, den er der Umdrehung entgegenſetzt, aufzuheben, und zeigt daher ſeine Stabilität an.

§. 112.

Folgerung. 1. Fällt der Punkt O innerhalb der Baſis, ſo iſt DO für jede ihrer Seiten poſitiv; es gehört folglich alsdann allemal eine Kraft dazu, den Körper nach irgend einer Seite umzuſtoßen, und er ſteht daher für ſich feſt. Da alſo in dieſem Falle der Widerſtand des Bodens dem Körper das Gleichgewicht hält, ſo muß deſſen mittlere Richtung durch den Schwerpunkt des Körpers gehen.

2. Für $DO = 0$, d. h. wenn O in den Umfang der Baſis fällt, iſt auch $S = 0$. Der Körper ſchlägt in dieſem Falle zwar nicht um, wenn er ſich ſelbſt überlaſſen bleibt, er wird aber durch die mindeſte Kraft, die nach der Seite, wo D liegt, auf ſeinen Schwerpunkt wirkt, dazu gebracht.

3. Fällt O außerhalb der Baſis, ſo iſt OD negativ; alsdann muß alſo der Körper gehalten werden, wenn er nicht umſchlagen ſoll, d. i. er kann für ſich ſeine Stellung nicht behaupten, ſondern dreht ſich um diejenige Kante der Baſis, die dem Punkte O am nächſten liegt.

4. Ein Körper ſteht auf horizontalem Boden deſto feſter, je größer ſein Gewicht iſt, je niedriger ſein Schwerpunkt über der Baſis liegt, und je weiter allenthalben der Punkt, wo das aus ſeinem Schwerpunkte herabgefällte Loth den Boden trifft, vom Umfange der Baſis entfernt iſt.

5. Ein runder Körper (§. 96.), der auf einem durch ſeine Axe ſenkrecht gehenden Querſchnitte ruhet, hat nach allen Seiten zu gleiche Stabilität: denn ſein Schwerpunkt fällt in die Axe, und folglich O in den Mittelpunkt ſeiner kreisförmigen Baſis. Seine Stabilität iſt bey übrigens gleichen Umſtänden deſto größer, je größer der Halbmeſſer des Kreiſes iſt. Bey runden Körpern, die ähnlich ſind, verhält ſie ſich wie derren Gewichte.

6. Bey einer Kugel iſt die Stabilität $= 0$, d. h. ſie liegt zwar ruhig, ſo lange ſie unberührt bleibt, aber bey dem geringſten Stoße, den man ihr giebt, kommt ſie ins Rollen.

7. Es ſey die Höhe einer cylindriſchen Säule $= h$, der Halbmeſſer der Baſis $= r$, das ſpezifiſche Gewicht der Materie, aus der ſie beſteht, $= G$; ſo iſt $P = \pi G r^2 h$, alſo $S = 2\pi G r^3$. Die Stabilität derſelben iſt alſo von ihrer Höhe unabhängig, und bey cylindriſchen Säulen von einerley Materie verhält ſie ſich wie der Cubus des Halbmeſſers.

§. 113.

Da Fuhrwerke bey größerer Breite und kleinern Rädern weniger dem Umſchlagen ausgeſetzt ſind, ſo

muß man ihre Breite faſt in eben dem Verhältniſſe vermehren, als man ihnen größere Räder giebt, wofern man an Stabilität nicht verlieren will. Die inclinirte Lage der Speichen an den Rädern gewährt, wie in mancher andern Rückſicht, auch hier weſentliche Vortheile. Außerdem kommt viel darauf an, wie auf dem Wagen die Laſt vertheilt wird: damit nemlich der Schwerpunkt des Ganzen ſo tief als möglich und in die Mitte zu liegen komme, müſſen die ſchwereren Sachen unten hingebracht werden, und keine Seite darf mehr bepackt ſeyn als die andere. Zur Beurtheilung des Effekts, den in dieſem Betracht die Verlegung der Sachen an andern Stellen hervorbringt, dient folgender Satz:

§. 113. a.

Fig. 22. Wenn in einem Behältniſſe, deſſen Gewicht P iſt, eine Laſt p aus dem Orte M nach m verlegt wird, ſo verrückt ſich der Schwerpunkt G des ganzen Behältniſſes nach der mit Mm parallelen Richtung um $Gg = \frac{pMm}{P}$

Beweis. 1) Es ſey O der Schwerpunkt der Maſſe P — p, wenn die Laſt p aus dem Behältniſſe ganz weggenommen wird, ſo iſt G der gemeinſchaftliche Schwerpunkt von O und M; es liegen alſo O, G und M in gerader Linie, und zwar ſo daß

$$OG : GM = p : P - p, \text{ oder } OG : OM = p : P.$$

2) Eben ſo fällt, wenn p in m gelegt wird, der gemeinſchaftliche Schwerpunkt in der geraden Linie Om

irgendwo in g, und es iſt wieder Og : Om = p : P, folglich hat man:

OG : OM = Og : Om.

3) Zieht man alſo die geraden Linien Gg und Mm, ſo ſind die Dreyecke OGg und OMm ähnlich: daher iſt Gg mit Mm parallel, und Gg : Mm = OG : OM = p : P, folglich

$$P \cdot Gg = p \cdot Mm, \text{ oder } Gg = \frac{p \cdot Mm}{P}$$

Alſo kommt beym Umpacken einer Sache, in Anſehung des Ganzen, ihre Stelle gar nicht in Betracht, ſondern nur allein ihr Gewicht, und die Richtung und Größe ihrer Ortsveränderung.

§. 114.

Es ſey der Querſchnitt einer Mauer ein Trapezium, deſſen obere Breite = f, die untere = g; die Höhe der Mauer ſey = h, ihre Maſſe oder ihr Gewicht = M, ſo iſt bey ihr (§. 111.) DO = $\frac{1}{2}$ g, GO = $\frac{1}{3}\frac{h(2f+g)}{f+g}$ (§. 87.), folglich ihre Stabilität = $\frac{3Mg(f+g)}{2h(2f+g)}$.

Hätte die Mauer allenthalben die Dicke $\frac{1}{2}$ (f + g), ſo wäre ihre Maſſe noch dieſelbe, und ihre Stabilität = $\frac{M(f+g)}{2h}$; alſo verhält ſich die Stabilität der gleichdicken Mauer zu der einer trapezenförmigen bey gleicher Maſſe und Höhe, wie 2f + g zu 3g, ſo daß folglich letztere immer größer als erſtere iſt, ſo lange g > f.

§. 115.

Setzt man das ſpezifiſche Gewicht = 1, ſo iſt die Maſſe des Trapeziums = $\frac{1}{2}$ h (f + g), alſo ſeine Stabilität = $\frac{3g(f+g)^2}{4(2f+g)}$. Da dieſer Ausdruck kein h enthält, ſo folgt: **daß zwey ſenkrechte Trapezia auf gleicher Grundlinie einerley Stabilität haben, wofern nur ihre obere Breite dieſelbe iſt.**

Bringt man den Ausdruck auf die Form $\frac{3}{4}$ g $(g + \frac{f^2}{2f+g})$, ſo ſieht man, daß er mit f zugleich abnehme und wachſe; daher hat von zweyen ſenkrechten Trapezien, die einerley Baſis haben, das die größte Stabilität, welches oben breiter iſt.

Alſo ſteht auf eben der Grundfläche eine gleiche dicke Mauer feſter, als eine andere, die nach oben zu ſchmaler iſt.

Schiefe Fläche.

§. 116.

Wenn die Ebene, auf der ſich der Körper befindet, gegen den Horizont geneigt iſt, ſo hat er vermöge ſeiner Schwere, wenn er auch vor dem Umſchlagen geſichert iſt, doch immer ein Beſtreben längs derſelben hinunter zu gleiten. Denn der Widerſtand, den die Fläche dem Körper entgegenſetzt, iſt ſenkrecht auf die Fläche; alſo geſetzt auch, dieſe Kraft geht durch den Schwerpunkt des Körpers, ſo iſt ihre Richtung doch nicht vertikal,

folglich kann ſie ſein Gewicht nur zum Theil aufheben, und bildet mit dieſem eine zuſammmengeſetzte Kraft, die den Körper parallel der Fläche herabtreibt.

§. 117.

Aufgabe. Die Kraft zu beſtimmen, die den Körper auf der ſchiefen Fläche im Gleichgewichte erhält.

Fig. 23. Aufl. 1) Es ſey EF der Durchſchnitt einer nach Gefallen angenommenen horizontalen Ebene mit der ſchiefen; G der Schwerpunkt des Körpers; GCE = 90°, und dann auch in der horizontalen Ebene ECB = 90°, ſo ſteht EF, alſo auch die Ebene BCE, auf der Ebene GCB ſenkrecht, d. h. ſie iſt vertikal.

2) Sie ſchneide die ſchiefe Ebene in AC, ſo iſt auch ACE = 90°, folglich ACB der Neigungswinkel der ſchiefen Ebene gegen die horizontale; dieſer heiße I.

3) Es ſey ferner GD vertikal; GO auf AC ſenkrecht, ſo iſt dieſe Linie die Normale der ſchiefen Ebene in O, und liegt mit GD in einerley vertikalen Ebene GCB.

4) Vorausgeſetzt alſo, daß O innerhalb der Baſis des Körpers fällt, worinn er die ſchiefe Fläche berührt, ſo wirkt dieſe mit der ganzen Kraft, womit ſie gedrückt wird, auf G nach OG zurück (§. 112. 1.). Wir wollen dieſen Druck Π nennen.

5) Es ſey Gn die verlängerte Richtung deſſelben, ſo iſt noch irgend eine andere Kraft nach einer willkührlichen Richtung Gf in der Ebene GCB erforderlich, der Kraft P, die der Körper nach GD ausübt, das Gleichgewicht zu halten.

6) Man ſetze dieſe Kraft $= V$, und den Winkel GHB, den ihre verlängerte Richtung mit der Horizontale macht, $= I'$, ſo hat man

$$V \text{ Sin HGB} = \Pi \text{ Sin DGO} \text{ oder}$$

$$V \text{ Cos } I' = \Pi \text{ Sin } I, \text{ und}$$

$$P \text{ Sin DGO} = V \text{ Sin HGO} \text{ (§. 52.), oder}$$

$$P \text{ Sin } I = V \text{ Cos } (I' - I)$$

$$\text{folglich } V = \frac{P \text{ Sin } I}{\text{Cos } (I' - I)}$$

§. 118.

Hieraus laſſen ſich folgende Bemerkungen ziehen:

1. Die Richtung der Kraft V muß in GCB, der Neigungsebene der ſchiefen Fläche gegen die horizontale, liegen, und durch den Schwerpunkt des Körpers gehen.

2. Iſt $I' = I$, oder die Richtung dieſer Kraft mit AC parallel, ſo iſt $V = P \text{ Sin } I$. Alsdann iſt ſie alſo am kleinſten, folglich dieſe Richtung für ſie unter allen die vortheilhafteſte.

3. Der Schwerpunkt ſtrebt nach dieſer Richtung GI unmittelbar fortzurücken, weil ſie die Fläche nirgends ſchneidet, und alſo eine freye Richtung für ihn iſt. Es iſt zu bemerken, daß ſie dem Körper zugleich den kürzeſten Weg darbietet, zum tiefſten Punkte zu gelangen.

4. Iſt $I' = 0$, oder die Richtung der Kraft horizontal, ſo iſt $V = \frac{P \text{ Sin } I}{\text{Cos } I} = P \text{ tang } I$.

5. Der Druck Π, den die Fläche leidet, iſt $= \frac{V \operatorname{Cos} I'}{\operatorname{Sin} I} = \frac{P \operatorname{Cos} I'}{\operatorname{Cos}(I' - I)}$. Für $I' = I$, oder für die vortheilhafteſte Richtung der Kraft iſt derſelbe $= P \operatorname{Cos} I$; und für $I' = 0, = \frac{P}{\operatorname{Cos} I}$. Man ſieht leicht, daß bey jeder andern Richtung der Kraft, als der mit der Fläche parallelen, ein Theil derſelben darauf verwandt werde, den Körper entweder noch feſter an die Fläche anzudrücken, oder den Druck $P \operatorname{Cos} I$, der von ihm herrührt, zu erleichtern.

Anmerk. Man bedient ſich der ſchiefen Fläche bey mechaniſchen Operationen da am vortheilhafteſten, wo die Laſten zu einer geringen Höhe erhoben werden ſollen, als z. B. wenn man ſie vom Ufer auf Schiffe bringen, oder vom Schiffe über Bord ſchaffen will. Auch kann man umgekehrt durch ſie Laſten ſanft herab gleiten laſſen, ohne das ganze Gewicht derſelben zu tragen.

Stabilität des Körpers auf ſchiefer Fläche.

§. 119.

Körper, die auf horizontaler Fläche feſtſtehen, bekommen nicht allein ein Beſtreben herabzugleiten, wenn man die Fläche inclinirt, ſondern ſie werden auch dadurch zum Umſchlagen nach der herabwärtsgehenden Seite geneigter, gewinnen aber dafür an Stabilität in Rückſicht der entgegengeſetzten Seite. Um nun das Verhalten eines Körpers in Anſehung dieſer Art von Bewegbarkeit abgeſondert betrachten zu können, wollen wir annehmen, er ſey durch eine feſte Widerlage verhindert,

dert, über den Punkt D, den wir jetzt als den äußerſten Punkt ſeiner Baſis anſehen wollen, fortzurücken. Ferner gehe durch D eine der Seitenlinien der Baſis parallel mit EF, ſo fragt es ſich, unter welchen Umſtänden der Körper, oder, welches einerley iſt, ſein Schwerpunkt um dieſe ſich drehen werde.

§. 120.

Aufgabe. Die Stabilität des Körpers auf der ſchiefen Fläche in Rückſicht der queren Seitenlinie ſeiner Baſis zu finden.

Fig. 23. **Aufl.** 1) Man fälle aus G auf die Baſis, GO, und aus O auf die Umdrehungslinie, OD ſenkrecht; ferner ziehe man GI mit OD parallel, und errichte darauf aus D das Perpendikel DI.

2) Da DO in der Durchſchnittslinie AC liegt, (§. 117.) ſo iſt GOD die vertikale Neigungsfläche der Ebene gegen die horizontale, folglich liegt auch GI in dieſer, und man kann das Gewicht P des Körpers in eine Kraft $= P \cdot \text{Cos}\, I$ nach GO, und in eine $= P\, \text{Sin}\, I$ nach GI zerlegen.

3) Erſtere hat gegen die durch D gehende Axe das Moment $P \cdot DO\, \text{Cos}\, I$, letztere das Moment $P \cdot DI\, \text{Sin}\, I = P \cdot GO\, \text{Sin}\, I$. Beyde Kräfte ſtreben den Schwerpunkt nach verſchiedenen Seiten um D zu drehen; ſoll alſo der Körper in Ruhe bleiben, ſo muß $P \cdot DO\, \text{Cos}\, I = P \cdot GO\, \text{Sin}\, I$ ſeyn.

4) Aber hier würde durch die geringſte Kraft, die nach GI hinzukäme, eine Umdrehung nach dieſer Seite

Bayerische Staatsbibliothek München

zu bewirkt werden. Dies wäre alſo derjenige Fall, wo die Stabilität des Körpers = o iſt.

5) Man ſetze daher, es könne noch die Kraft S nach GI auf G angebracht werden, ohne daß der Körper wanke; ſie ſey aber gerade ſo groß als nöthig iſt, um alle Stabilität aufzuheben, ſo iſt ſie der Stabilität äquipollent, und da ſie zu der vorigen Kraft P Sin I nach GI hinzukommt, das Moment nach dieſer Seite zu jetzt = (S + P Sin I) GO, folglich wegen des Gleichgewichtes (S + P Sin I) GO = P . DO Cos I oder $S = P \frac{(DO\ \mathrm{Cos}\ I - GO\ .\ \mathrm{Sin}\ I)}{GO}$

6) Auf gleiche Weiſe findet man, wenn DO die Entfernung des Punktes O von der entgegengeſetzten Querſeite der Baſis bedeutet, $S = \frac{P\ (DO\ \mathrm{Cos} I + GO\ \mathrm{Sin} I)}{GO}$

§. 121.

Es ſey jetzt, nicht wie vorhin D, ſondern C der äuſſerſte Punkt der Baſis, alſo EF die Umdrehungskante, ſo iſt in Rückſicht dieſer: $S = \frac{P(CO.\mathrm{Cos} I - GO\ \mathrm{Sin} I)}{GO}$ $= \frac{P\ \mathrm{Cos}\ I}{GO} . (CO - GO\ \mathrm{tang}\ I)$ Ferner ſey GD die Vertikale, ſo hat man DO = GO tang I, folglich $S = \frac{P\ \mathrm{Cos}\ I\ .\ CD}{GO}$.

Wäre dagegen C der äußerſte Punkt im obern Theile der Baſis, ſo lägen die Punkte D und C auf verſchie-

Bayerische Staatsbibliothek München

denen Seiten von O, und es wäre alsdann CO + OD = CD, folglich die Stabilität in Rückſicht der obern Kante ebenfalls $= \frac{P \cdot CD \cos I}{GO}$.

Die Stabilität des Körpers auf der ſchiefen Ebene verhält ſich alſo direkt wie die Entfernung des Punktes, wo die Vertikale aus dem Schwerpunkte in die Ebene eintrifft, von den Seiten der Baſis, und verkehrt wie das Perpendikel aus dem Schwerpunkte auf der Baſis gefällt.

Man ſieht hieraus, daß die Frage, ob der Körper ſich ſelbſt überlaſſen, auf ſchiefem Boden umſchlagen werde, oder nicht? gerade ſo beantwortet werde, als in dem Falle, wenn der Boden horizontal iſt. Der Körper iſt nemlich vor dem Umſchlagen geſichert, wenn die Vertikale in den ſchiefen Boden innerhalb der Baſis eintrifft, kann aber nicht ſeine Stellung behaupten, wenn dieſer Punkt außerhalb der Baſis fällt.

§. 122.

Aufgabe. Ein Körper, deſſen Gewicht = P iſt, hat auf horizontalem Boden gegen eine der Seiten ſeiner Baſis die Stabilität S; man fragt, wie ſtark der Boden inclinirt werden darf, ehe der Körper umſchlägt.

Aufloͤſung 1) Es ſey I der geſuchte Neigungswinkel; da für ihn die Stabilität des Körpers = o

werden ſoll, ſo hat man (§. 120.) $DO \cos I - GO \sin I = 0$, oder $\tang I = \frac{DO}{GO}$

2) Nun iſt (§. 111.) $S = \frac{P \cdot DO}{GO} = P \tang I$, alſo: $\tang I = \frac{S}{P}$

Exempel 1. Es ſey der Körper ein Cubus, ſo iſt $DO = GO$, alſo $S = P$; daher $\tang I = 1$, und $I = 45°$.

2. Für eine Halbkugel iſt DO der Radius, $GO = \frac{5}{8} DO$ (§. 96.) alſo $S = \frac{8}{5} P$, folglich $\tang I = 1,6$ und $I = 57° \, 59' \, 40\frac{2}{3}''$

Das Wälzen runder Körper.

§. 123.

Runde Körper, als Walzen, Tonnen u. dergl. berühren den ebenen Boden nur in einer Linie, nemlich in dem Durchſchnitte einer Ebene mit dem Boden, die durch ihre Axe geht, und auf dem Boden ſenkrecht iſt. Liegen ſie daher der Quere nach auf demſelben, d. h. ſo, daß die Berührungslinie die Neigungslinie des Bodens ſenkrecht ſchneidet, ſo iſt $DO = 0$, alſo ihre Stabilität $= - P \sin I$.

Ein runder Körper hat daher auf einer ſchiefen Fläche ein eben ſo großes Beſtreben ſich zu drehen als herabzugleiten, und dies macht, daß letzteres nie geſchieht, weil der berührende Theil allemal am Boden haftet. Das Umſchlagen bekommt aber wegen der

fortwährend neuen Berührung eine Continuität, und artet dadurch in eine eigene Art von Bewegung aus, die man das **Wälzen** oder **Rollen** nennt.

§. 124.

Das Hinaufbewegen ſchwerer Laſten auf ſchiefen Flächen geſchieht gewöhnlich durch Walzen, die man darunter legt. Dies gewährt unter andern Vortheilen auch den, daß man dabey Hebelarme anbringen kann, welches die Operation ungemein erleichtert. Wir wollen ſetzen, die Laſt P liege auf mehrern Walzen, deren Fig. 24. Anzahl = n, ſo drückt auf jede derſelben in E die Kraft $\frac{P}{n}$ nach der Vertikale EB.

Da die Walze ſich nur um O drehen kann, ſo wirkt dieſe Kraft am einarmigen Hebel CEO unter dem Winkel BEO = I, dem Neigungswinkel der ſchiefen Fläche, und hat alſo das Moment $\frac{P}{n} . EO \text{ Sin } I$.

Eben ſo wirkt in G das Gewicht der Walze, das π heißen mag, mit der Kraft π Sin I (§. 123.) nach ſenkrechter Richtung Gg, und hat folglich das Moment $\pi . GO \text{ Sin } I$.

Soll dieſen nun eine Kraft V nach Cc das Gleichgewicht halten, ſo hat man:

$V . CO = (\frac{P}{n} . EO + \pi . GO) \text{ Sin } I$, oder wenn der Halbmeſſer der Walze = a, und die Länge des Hebels CO = f geſetzt wird,

$$nVf = (2P + n\pi)\, a \,\mathrm{Sin}\, I,$$ alſo

$$V = \frac{a \,\mathrm{Sin}\, I}{nf} \cdot (2P + n\pi)$$

Damit die Walze ſich nicht verſchiebt, muß auf beyden Seiten ein Hebel angebracht werden, wodurch für jeden Arbeiter die erforderliche Kraft $V = \frac{a \,\mathrm{Sin}\, I}{2nf}$ $(2P + n\pi)$ wird.

Exempel. Es ſey eine Laſt von 6000 ℔ durch zwey Walzen, deren jede 1 Fuß im Durchmeſſer hat, und 250 ℔ wiegt, unter einem Winkel von 12° erheben; der hervorſtehende Hebelarm CE ſey 4 Fuß lang, ſo iſt $V = \frac{1}{20} (P + \pi) \,\mathrm{Sin}\, I$, $P + \pi = 6250$, $\mathrm{Sin}\, I = 0{,}2079117$, alſo $V = 129, 94$ ℔, oder beynahe 130 ℔.

§. 125.

Einen ähnlichen Vortheil, wie bey Erhebung der Laſten durch ſchräge Flächen, gewährt der ſchiefe Zug bey Rädern, die über einen Widerſtand gehoben werden ſollen.

Es ſey DBG ein Rad, deſſen Mittelpunkt O von einem belaſteten Wagen das Gewicht P trägt; OI die Höhe eines hervorragenden Hinderniſſes, über das es vermittelſt einer nach CA_1 gerichteten Kraft V gezogen werden ſoll, ſo läßt ſich dieſe folgendermaßen beſtimmen:

Fig. 25. 1) Kraft und Laſt drücken das Rad an den höchſten Punkt O des Widerſtandes, und bewirken dadurch, daß daſſelbe, wenn es bewegt werden ſoll, um

dieſen Punkt ſich drehen muß. Daher iſt der Halbmeſſer CO als ein Hebel anzuſehen, der in O ſeinen Ruhepunkt hat.

2) An dieſem zieht nun in C das Gewicht P nach der Vertikale CB, und in eben dem Punkte die Kraft V nach CA; das Moment des erſtern iſt P . CO Sin OCB, das der letztern V . CO Sin OCA (§. 56.); ſollen alſo beyde mit einander im Gleichgewichte ſeyn, ſo hat man: $P \text{ Sin } OCB = V \text{ Sin } OCA$.

3) Man ſetze den Winkel ACD, den die Richtung der Kraft V mit der Horizontale CD macht, $= \varepsilon$ den Halbmeſſer des Rades $= a$, die Höhe des Widerſtandes $= i$, und ziehe OI mit BI parallel, ſo iſt CI $= CB - OI = a - i$, alſo $OI = \sqrt{[a^2 - (a - i)^2]} = \sqrt{(2ai - i^2)}$, und $\text{Sin } OCB = \frac{\sqrt{(2ai - i^2)}}{a}$,

$\text{Cos } OCB = \frac{a - i}{a}$.

4) Ferner $\text{Sin } OCA = \text{Sin } ACD \text{ Cos } DCO + \text{Cos } ACD \text{ Sin } DCO = \frac{\sqrt{(2ai - i^2)} \text{ Sin } \varepsilon + (a - i) \text{ Cos } \varepsilon}{a}$, daher wird (2)

$$P \sqrt{(2ai - i^2)} = V \text{ Sin } \varepsilon \sqrt{(2ai - i^2)} + V \text{ Cos } \varepsilon (a - i), \text{ und}$$

$$V = \frac{P \sqrt{(2ai - i^2)}}{(a - i) \text{ Cos } \varepsilon + \sqrt{(2ai - i^2)} \text{ Sin } \varepsilon}$$

§. 126.

Hiernach läßt ſich beurtheilen, wie viel Kraft Pferde anzuwenden haben, einen beladenen Wagen auf

rauhem Wege fortzuziehen. Alsdann iſt aber i allemal gegen a ſehr gering, und man kann im Nenner den Theil $\sqrt{(2ai - i^2)}$ Sin ε gegen $(a - i)$ Cos ε, und im Zähler i^2 gegen $2ai$ wegwerfen, wodurch man

$V = \frac{P\sqrt{2ai}}{a \,\text{Cos}\, \varepsilon} = P \sec \varepsilon \sqrt{\frac{2i}{a}}$ erhält. Dies veranlaßt nun folgende Bemerkungen:

1) Die Kraft wächſt nicht wie die Höhe des Widerſtandes, ſondern nur wie Quadratwurzel aus demſelben, ſo daß z. B. zur Ueberwindung eines doppelt ſo hohen Widerſtandes nur ungefähr $1\frac{2}{5}$ mal ſo viel Kraft nöthig iſt.

2) Sie verhält ſich verkehrt wie $\sqrt{a}$; alſo ſieht man daß höhere Räder viel leichter über hervorragende Hinderniſſe zu ziehen ſind, als kleinere, und deshalb den Vorzug verdienen.

3) Sie wirkt am vortheilhafteſten, wenn ſie ſenkrecht auf CO gerichtet iſt. Iſt nun OI gering, ſo iſt CO beynahe vertikal, alſo die wirkſamſte Richtung beynahe mit der horizontalen einerley, wie auch die Formel angiebt.

§. 127.

Wenn auf dem Wege mehrere ſolcher hervorſtehenden Hinderniſſe in kleinen und faſt gleichen Zwiſchenräumen liegen, ſo ſenkt ſich das Rad, je nachdem es groß iſt, verſchiedentlich zwiſchen ihnen ein, und berührt den Boden gar nicht. Es hängt alsdann die Tiefe BI = i zugleich von a ab, nemlich wenn man die

halbe Weite eines ſolchen Zwiſchenraumes f nennt, ſo iſt $OI = f = \sqrt{(2ai - i^2)}$, folglich $V = \frac{Pf}{a}$; alſo verhält ſich dann die Kraft verkehrt wie der Halbmeſſer des Rades. Dieſer Fall findet aber, genau genommen, nur da ſtatt, wo das Rad im weichen Boden einſinkt, wovon wir in der Folge reden werden. Couplet, Mem. de l'Acad. de Paris 1733.

Vom Drucke der Dächer.

§. 128.

Fig. 26. **Aufgabe.** Der Balken BC ſey mit dem einen Ende C an eine vertikalſtehende Wand CD angelehnt, mit dem andern Ende B ſtütze er ſich theils gegen den horizontalen Boden DB, theils gegen eine Widerlage, die in B befeſtigt iſt, und ihn verhindert nach Bq auszuweichen; man fragt, welchen Druck dieſer Balken durch ſein Gewicht auf die Wand, den Boden und die Wiederlage ausübt.

Aufl. 1) Das Gewicht des Balken, welches P heiſsen mag, wirkt von ſeinem Schwerpunkte G aus nach der Vertikale Gg und vertheilt ſich auf die Unterſtützungspunkte B und C nach gleichfalls vertikalen Richtungen Bp und CD. Setzen wir alſo, G falle in die Mitte von BC, ſo kommt auf jeden dieſer Punkte das Gewicht $\frac{1}{2}$ P.

2) Erſteres drückt den Boden in B ſenkrecht, und wird von ihm getragen; letzteres kann dagegen nur

durch zwey Kräfte aufgehoben werden: durch den ſenkrechten Widerſtand der Mauer, und durch den Gegendruck, den der Balken in B nach BC leidet.

3) Man zerlege daher daſſelbe nach Cf ſenkrecht auf CD, und nach CB, und nenne die daraus entſpringenden Kräfte M und N, ſo hat man (§. 52.)

$M = N \text{ Sin } DCB$, und

$\frac{1}{2} P = N \text{ Sin } fCB$, oder wenn der Winkel CBD $= I$ geſetzt wird: $M = N \text{ Cos } I$, $\frac{1}{2} P = N \text{ Sin } (180° - I) = N \text{ Sin } I$, folglich $N = \frac{P}{2 \text{ Sin } I}$, $M = \frac{1}{2} P \text{ Cot } I$.

4) Die Kraft N, welche auf den Punkt B wirkt, und daſelbſt einen Druck nach Bo ausübt, zerfällt in eine nach $Bq = N \text{ Cos } I = \frac{1}{2} P \text{ Cot } I$, und in eine nach $Bq = N \text{ Sin } I = \frac{1}{2} P$, welche letztere mit dem Gewichte $\frac{1}{2}$ P (2) zuſammen den vertikalen Druck P giebt.

5) Der Balken übt alſo gegen die Wand ſowohl als gegen die Widerlage nach den entgegengeſetzten Richtungen Cf und Bq den Druck $\frac{1}{2}$ P Cot I aus, und außerdem trägt noch der Punkt B ſein ganzes Gewicht P.

Anmerk. Außer dieſer Auflöſung, die Fontana in den Mem. di Matem. e Fiſica della Soc. Ital. Tom. III. von gegenwärtiger Aufgabe geliefert hat, findet ſich in eben den Memoiren Tom. IV. eine andere von Salimbeni. Sie giebt aber eben die Reſultate, und weicht nur darinn ab, daß das ganze Gewicht P aus G auf den Durchſchnittspunkt der Vertikale durch G und der Horizontale durch C verſetzt, und dann nach letzterer Richtung und einer nach B gehenden zerlegt wird. Eine dritte, die aber wegen der Conſtruktionen

noch weitläuftiger iſt, giebt Lorgna in ſeinem Werke Saggi di Statica e di Meccanica applicate alle arti.

§. 129.

Sind daher zwey gleiche Balken AC und BC in einer vertikalen Ebene unter einerley Winkel gegen einander geſtemmt, ſo wird der gegenſeitige Druck in C aufgehoben; das Uebrige bleibt aber wie vorhin, und geſchieht auf der einen Seite ſo wie auf der andern.

§. 130.

Anders verhält es ſich mit dem Drucke des Balken BC, wenn er auf einem vertikal ſtehenden CD aufliegt, oder in denſelben hineingefugt iſt. Alsdann widerſteht dieſer ihm nach einer auf CB ſenkrechten Richtung. Man zerlege alſo das auf C kommende Gewicht $\frac{1}{2}$ P nach dieſer Richtung, und nach einer andern längs CB herabgehenden, ſo iſt erſtere $= \frac{1}{2}\, P\, \mathrm{Cos}\, I$, welche aufgehoben wird, letztere $= \frac{1}{2}\, P\, \mathrm{Sin}\, I$, die auf B einen Druck nach Bo verurſacht. Dieſer nach Bp und Bq zerlegt, giebt den Druck $\frac{1}{2}\, P\, \mathrm{Sin}\, I^2$, ſenkrecht auf den Boden, der ſich mit $\frac{1}{2}$ P zu $\frac{1}{2}\, P\, (1 + \mathrm{Sin}\, I^2)$ verbindet, und einen andern horizontalen gegen die Widerlage $= \frac{1}{2}\, P\, \mathrm{Sin}\, I\, \mathrm{Cos}\, I$.

Der vertikale Balken leidet nun den auf CB ſenkrechten Druck $\frac{1}{2}\, P\, \mathrm{Cos}\, I$, und da deſſen Richtung mit CD den Winkel $90^\circ - DCB = I$ macht, ſo iſt von ihm der nach CD gerichtete Antheil $= \frac{1}{2}\, P\, \mathrm{Cos}\, I^2$, und der darauf ſenkrechte nach Cf $= \frac{1}{2}\, P\, \mathrm{Cos}\, I\, \mathrm{Sin}\, I$.

Das Gewicht des Balken wird alſo in gegenwär-

tigem Falle auf zwey Punkte B und D des Bodens vertheilt, und übt gegen die Widerlage einen geringern Druck aus, als im vorigen Falle; jener war nemlich $= \frac{1}{2} P \text{ Cot } I$; dieſer iſt $= \frac{1}{2} P \text{ Sin } I \text{ Cos } I$; alſo verhält ſich erſterer zu letzterem wie $1 : \text{Sin } I^2$, und iſt folglich allemal größer.

Am auffallendſten iſt dieſer Unterſchied für $I = 0$; da iſt der horizontale Druck des bloß angelehnten Balken unendlich, und der des aufliegenden $= 0$.

§. 131.

Liegt auf der andern Seite noch ein Balken AC, ſo daß der vertikal ſtehende CD beyde in Verbindung ſetzt, und ſie zu gleicher Zeit unterſtützt, ſo wird der Druck $\frac{1}{2} P \text{ Cos } I \text{ Sin } I$ nach Cf von dem gleich großen, den AC nach entgegengeſetzter Richtung auf C ausübt, aufgehoben; der Druck auf D verdoppelt ſich dagegen, und wird $= P \text{ Cos } I^2$. Außerdem trägt der Boden ſowol in A als B das Gewicht $\frac{1}{2} P (1 + \text{Sin } I^2)$, und jede der Widerlagen ſtrebt eine Kraft $\frac{1}{2} P \text{ Cos } I^2$ aus
$\frac{1}{2} P \text{ Sin } I \text{ Cos } I$ der Stelle zu treiben.

§. 132.

Um den Druck des ganzen Daches gegen die darunter liegenden Balken zu beſtimmen, hat man nur nöthig, irgend einen ſeiner Querſchnitte ACB in Betracht zu ziehen, der durch zwey entgegengeſetzte Sparren AC und BC geht; und ſo läßt ſich das Vorhergehende hier leicht in Anwendung bringen. Die ganze Reihe der Sparren längs dem Dache theilt nemlich unter ſich

ganz das Gewicht der äußern Decke des Daches, ſo daß allemal zwey neben einander liegende Sparren den Theil von ihr tragen, der zwiſchen ihnen enthalten iſt. Was alſo vorhin P genannt iſt, beſteht aus dem Gewichte der Sparre mit Inbegriff deſſen, was dieſe von der Dachfläche zu tragen hat.

Dieſe doppelte Laſt wirkt nun auf zweifache Art:

1) Sie drückt auf die Tragbalken vertikal niederwärts.

2) Sie übt einen horizontalen Druck gegen die Widerlage aus, und ſtrebt dadurch den Pfeiler, auf dem die Widerlage befeſtigt iſt, nach auſſen zu umzuſtürzen.

Dieſe letzte Wirkung der Dächer, wodurch ſie der Feſtigkeit der Gebäude vorzüglich nachtheilig werden können, heißt ihre **Sperrung** oder **Propulſion** (la pouſſée horizontale).

§. 133.

Wenn die Sparren AC und BC durch eine Hängeſäule CD verbunden ſind (§. 130.), ſo muß unten durch die Punkte A und B ein Querbalken AB gehen, der dann in ſeinen Endpunkten durch Pfeiler unterſtützt iſt. Dieſer Querbalken iſt unnöthig, wofern die Sparren unmittelbar zuſammenſtoßen (§. 128.).

I. Im erſtern Falle iſt nun der Druck auf A und $B = \frac{1}{2} P (1 + \text{Sin } I^2)$, der auf $D = P \text{ Cos } I^2$, und die Propulſion iſt $= \frac{1}{2} P \text{ Sin } I \text{ Cos } I$.

Der Druck auf D wird noch durch das Gewicht

von CD vermehrt, und iſt, wenn dieſes H genannt wird, $= H + P \text{ Cos } I^2$. Dieſer vertheilt ſich auf die Unterſtützungspunkte A und B, wodurch die ganze Laſt, die jeder derſelben zu tragen hat, $= P + \frac{1}{2} H$ wird. Alſo theilen die Tragpfeiler das ganze Gewicht des Dachprofiles $2P + H$ unter ſich.

II. Im zweyten Falle iſt der Druck auf jeden der Punkte A und B $= P$, und die Propulſion iſt $= \frac{1}{2} P \text{ Cot } I$.

Anmerk. Der beträchtliche Unterſchied zwiſchen der Sperrung im erſtern und der im letztern Falle zeigt offenbar den Vortheil, der daraus erwächſt, wenn die Sparren durch eine Hängeſäule unterſtützt werden. Ein anderes Mittel, die Sperrung des Daches zu vermindern, wird noch in der Folge vorkommen.

§. 134.

Es ſey für die Länge $= 1$, das Gewicht der Sparre BC, nebſt dem, was ſie vom Dache zu tragen hat, $= G$, die halbe Breite des Daches $DB = b$; ſo iſt $BC = b \text{ Sec } I$, $P = Gb \text{ Sec } I$, alſo die Propulſion

$$= \frac{1}{2} P \text{ Cot } I = \frac{Gb}{2 \text{ Sin } I}.$$

Bey einerley Breite des Daches iſt daher die Propulſion deſto größer, je flacher das Dach iſt.

Iſt dagegen in C eine Stütze CD, oder beſteht das Dach nur aus Einer Seitenfläche BC, der die vertikale Mauer CD zum Rückhalte dient (Pultdach) ſo iſt die Propulſion in $B = \frac{1}{2} P \text{ Sin } I \text{ Cos } I = \frac{1}{2} Gb \text{ Sin } I$, folglich gilt alsdann der umgekehrte

Satz, daß ſteilere Dächer bey eben der Breite mehr Sperrung verurſachen.

Anmerk. Den erſtern Satz hat, ſo viel ich weiß, Couplet in Mem. de l'Acad. de Paris 1731 zuerſt gezeigt. Ueberhaupt ſcheint es, als wenn vor ihm noch keiner die Sperrung der Dächer in Betracht gezogen hat, und die Meinung, die noch jetzt manche Baumeiſter hegen, *) daß die Wirkung des Daches bloß in dem vertikalen Drucke beſtehe, und ſich nach dem Gewichte allein beurtheilen laſſe, allgemein geweſen ſeyn muß. Die Verſchiedenheit der Reſultate bey Satteldächern und Pultdächern hat Hr. Aepinus **) verführt, Couplets Behauptung anzugreifen; andere, die Letzterem beytreten, betrachten doch immer nur die Sache von Einer Seite, und ſchlichten dadurch den Streit nicht.

§. 135.

Aufgabe. Die erforderliche Dicke einer Mauer zu beſtimmen, damit ihre Stabilität der Propulſion des Daches das Gleichgewicht halte.

Aufl. 1) Es ſey die halbe Breite des Daches $= b$, das mittlere Gewicht deſſelben für 1 Quadratfußfläche $= G$, der Neigungswinkel $= I$, ſo iſt der vertikale Druck $= \frac{Gb}{\text{Cos } I}$, der horizontale $= \frac{Gb}{2 \text{ Sin } I}$, beydes für 1 Fuß Breite gerechnet.

2) Die Höhe der Mauer ſey nun $= a$, ihre geſuchte Dicke $= x$, ihr ſpezifiſches Gewicht $= K$, ſo iſt für 1 Fuß Breite ihr Gewicht $= Kax$, dazu den

*) So z. B. giebt Hr. Schmidt den flachen italiäniſchen Dächern deshalb den Vorzug, weil ſie das Gebäude weniger belaſten. S. bürgerl. Baumeiſter I Theil, Kap. 7.

**) Comment. Petrop. Tom. XIV.

vertikalen Druck des Daches addirt, giebt $Kax + Gb \,Sec\, I$ für das ganze Gewicht; daher die Stabilität $= Kx^2 + \frac{Gbx \,Sec\, I}{a}$ (§. 111.).

3) Da dieſe im Schwerpunkte, d. i. in der Mitte der Mauer nach horizontaler Richtung widerſteht, ſo muß ſie doppelt ſo groß als die Propulſion ſeyn, um ihr das Gleichgewicht zu halten; alſo hat man

$$Kx^2 + \frac{Gbx \,Sec\, I}{a} = \frac{Gb}{Sin\, I}, \text{ oder}$$

$$x^2 + \frac{Gbx}{Ka \,Cos\, I} - \frac{Gb}{K \,Sin\, I} = 0.$$

Exempel. Das Dach ſey mit Ziegelſteinen gedeckt, ſo kann man auf den Quadratfuß mit Inbegriff des Kalkes am Gewicht 12 ℔ rechnen; das Gewicht des Holzes für eben die Fläche nehme ich zu 9 ℔ an, ſo iſt $G = 21$ ℔. Für die ſteinerne Mauer ſetze man $K = 189$ ℔; alsdann bekommt man

$$x^2 + \frac{bx}{9a \,Cos\, I} - \frac{b}{9 \,Sin\, I} = 0$$

Nun ſey $b = 15$ Fuß, $a = 40$ Fuß, die Höhe des Daches $= \frac{1}{4}$ der ganzen Breite, ſo wird $Sin\, I = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $Cos\, I = \frac{2}{\sqrt{5}}$, folglich $x^2 + \frac{x\sqrt{5}}{48} - \frac{5\sqrt{5}}{3} = 0$, woraus man $x = 1{,}90703$ findet. Die geſuchte Dicke der Mauer iſt alſo 1 Fuß 10,88 Zoll.

Gebro-

Gebrochene Dächer.

§. 136.

Fig. 27. **Aufgabe.** Zwey gegebene Balken AF und FC zwiſchen dem horizontalen Boden AD, und der vertikalen Wand CD ſo übereinander zu ſtellen, daß ſie ſich im Gleichgewichte erhalten.

Aufl. 1) Es ſey das Gewicht von AF = P, das von FC = Q, der Neigungswinkel FAD des erſtern = I, der des andern CFI = I'.

2) Der obere übt auf den untern den Druck Q nach der Vertikale FK, und den Druck $\frac{1}{2}$ Q Cot I' nach der Horizontale Fq aus. Dagegen widerſteht der untere nach Fn, der Verlängerung von AF, und außerdem drückt ihn in F ſein halbes Gewicht $\frac{1}{2}$ P vertikal herab, indem ſich ſein ganzes Gewicht auf die Punkte A und F vertheilt.

3) Dieſe vier Kräfte müſſen alſo in F einander das Gleichgewicht halten. Man ſetze den Widerſtand nach Fn = R, und zerlege dieſen nach Fp und FI. Da pFn = AFK = 90° − I iſt, ſo wird erſterer Theil R Sin I, letzterer = R Cos I.

4) Jetzt hat man lauter vertikale und horizontale Kräfte am Punkte F, von denen alſo jene, ſo wie dieſe für ſich einander das Gleichgewicht halten müſſen. Daher wird:

$$R \,\mathrm{Sin}\, I = \tfrac{1}{2} P + Q \text{ und}$$
$$R \,\mathrm{Cos}\, I = \tfrac{1}{2} Q \,\mathrm{Cot}\, I'.$$

5) Der Werth $R = \frac{Q \, Cot \, I'}{2 \, Cos \, I}$ in erſterer Glei-chung ſubſtituirt, giebt $\frac{Q \, tang \, I}{2 \, tang \, I'} = \frac{1}{2} P + Q$, woraus man $tang \, I' = \frac{Q \, tang \, I}{P + 2Q}$ erhält.

6) Der Winkel I iſt alſo willkührlich, und der andere I' wird durch ihn beſtimmt.

7) Nimmt man AF und FC von gleicher Länge, ſo iſt $P = Q$, folglich wird alsdann $tang \, I' = \frac{1}{3} tang \, I$.

§. 137.

Der Widerſtand R iſt mit dem Drucke einerley, den der Punkt A nach der Richtung FA leidet. Man zerlege ihn in einen vertikalen $= R \, Sin \, I$, und in einen horizontalen $= R \, Cos \, I$. Erſterer iſt $= \frac{1}{2} P + Q$ (§. 136. 4.), und zu ihm kommt noch das Gewicht $\frac{1}{2} P$ (n 2), ſo daß der Boden in A das ganze Gewicht beyder Balken $P + Q$ trägt. Der horizontale iſt $= (\frac{1}{2} P + Q) \, Cot \, I$.

Dagegen iſt der horizontale Druck, den vom obern Balken der Punkt C leidet, $= \frac{1}{2} Q \, Cot \, I'$ (§. 128.).

§. 138.

Läßt man ſtatt der Wand zwey andere Balken BG und GC in eben der Lage an jene anſtoßen, ſo wird der horizontale Druck in C durch einen gleichen und entgegengeſetzten aufgehoben, und die vier Balken ſind daher mit einander im Gleichgewichte, wofern ſie nur

in A und B durch Widerlagen am Zurückweichen verhindert werden. Hierauf gründet ſich die Conſtruktion der **gebrochenen** oder ſogenannten **manſardiſchen** Dächer.

§. 139.

Gewöhnlich werden bey einem ſolchen Dache die beyden Sparren AF, FC nicht unmittelbar in Berührung gebracht, ſondern in einen Querbalken FG (Kehlbalken) eingefugt, den man noch durch eine Säule FK unterſtützt. Dies ändert die Beſtimmung des Bruches in ſofern ab, daß der vertikale Druck Q von der obern Sparre ſich nun auf FA und FK vertheilt, alſo AF nur die Hälfte davon zu tragen hat. Setzt man daher in §. 136. n. 4, $\frac{1}{2}$ Q ſtatt Q, ſo erhält man $R \sin I = \frac{1}{2}(P + Q)$, $R \cos I = \frac{1}{2} Q \cot I'$, folglich $\tan I' = \frac{Q \tan I}{P + Q}$.

Die Propulſion, welche vorhin (§. 137.) $(\frac{1}{2} P + Q) \cot I$ war, wird dadurch auf $\frac{1}{2} \cot I\ (P + Q)$ zurück gebracht.

Anmerk. Die gebrochenen Dächer haben vor dem gewöhnlichen Dächern den entſcheidenden Vorzug, daß ſie eine ſteilere Lage des unteren Theiles zulaſſen, ohne dadurch die übermäßige Höhe des geraden Daches zu bekommen, die das Auge beleidigt, die Stabilität bis zur Gefahr vermindert, und außer dem einen Raum im Innern des Daches hervorbringt, der auf keine Art benutzt werden kann.

Viertes Kapitel.

Von der Vertheilung des Druckes auf mehrere Punkte und ganze Flächen.

---

§. 140.

Fig. 28. **Aufgabe.** Es ſey die Grundfläche eines Körpers eben, und ruhe in horizontaler Lage auf den Punkten A, B und C. Man fragt, wie ſich ſein Gewicht auf dieſe Punkte vertheilen werde?

Aufl. 1) Ein Perpendikel aus dem Schwerpunkte des Körpers treffe die Grundfläche in G, ſo iſt G der gemeinſchaftliche Schwerpunkt von A, B und C: denn der vereinigte Widerſtand von dieſen drey Punkten muß das Gewicht des Körpers aufheben, alſo deſſen mittlere Richtung durch ſeinen Schwerpunkt, folglich auch durch G gehen.

2) Man ſetze nun das Gewicht des Körpers $= P$, den Druck, den die Punkte A, B, C leiden $= \Pi, \Pi', \Pi''$, und fälle aus A und G auf BC die Perpendikel AD und GI, ſo hat man (§. 74.), da die Entfernungen der Punkte B und G von BC $= 0$ ſind:

$$\Pi \,.\, AD = P \,.\, GI.$$

3) Da die Dreyecke ABC und GBC einerley Grundlinie haben, ſo iſt $\Delta ABC : \Delta BGC = AD : GI$,

alſo $\Pi = \frac{\Delta BGC}{\Delta ABC} \,.\, P$

4) Eben ſo erhält man, wenn man AC und AB

als Bezugslinien annimmt, $\Pi' = \frac{\Delta AGC}{\Delta ABC} . P$, und

$\Pi'' = \frac{\Delta AGB}{\Delta ABC} . P$

5) Addirt man dieſe drey Werthe, ſo wird $\Pi + \Pi' + \Pi'' = P$; alſo vertheilt ſich die Laſt auf die drey Punkte ganz, und zwar für jeden im Verhältniſſe des Dreyecks, das die andern beyden mit dem Schwerpunkte G einfaſſen.

6) Man ſetze $AG = a$, $BG = b$, $CG = c$, und die Winkel zwiſchen dieſen Linien $= \alpha, \beta, \gamma$, ſo wird $\Delta AGB = \frac{1}{2}$ ab Sin α, $\Delta BGC = \frac{1}{2}$ bc Sin β, $\Delta CGA = \frac{1}{2}$ ac Sin γ, folglich

$$\Pi = \frac{P . bc \operatorname{Sin} \beta}{ab \operatorname{Sin} \alpha + bc \operatorname{Sin} \beta + ac \operatorname{Sin} \gamma},$$

$$\Pi' = \frac{P\ ac \operatorname{Sin} \gamma}{ab \operatorname{Sin} \alpha + bc \operatorname{Sin} \beta + ac \operatorname{Sin} \gamma},$$

$$\Pi'' = \frac{P\ ab \operatorname{Sin} \alpha}{ab \operatorname{Sin} \alpha + bc \operatorname{Sin} \beta + ac \operatorname{Sin} \gamma}$$

§. 141.

Folgerung 1. Es ſey G von A, B und C gleich weit entfernt, und $\alpha = \beta = \gamma = 120°$, ſo wird $\Pi = \Pi' = \Pi'' = \frac{a^2 P \operatorname{Sin} 120°}{3a^2 \operatorname{Sin} 120°} = \frac{1}{3} P$; alſo vertheilt ſich alsdann der Druck auf die Punkte gleichförmig.

2) Fällt der Punkt G außerhalb dem Dreyecke ABC, ſo wiſſen wir ſchon aus §. 112. 3, daß dann

der Körper nicht unterſtützt ſey. Eben dies zeigt ſich hier dadurch, daß einer der Werthe von Π, Π′, Π″ negativ wird.

Fig. 29. 3. Wenn daher die Punkte A, B, C in einer geraden Linie liegen, ſo kann der Körper nicht von ihnen getragen werden, wofern nicht auch G in dieſe Linie fällt. In dem Falle iſt aber α, β und γ entweder $= 0$ oder $180°$, alſo erhalten wir

$$\Pi = \tfrac{0}{0},\ \Pi' = \tfrac{0}{0},\ \Pi'' = \tfrac{0}{0},$$

Ausdrücke, die an ſich unbeſtimmt ſind, und alſo zeigen, daß der allgemeine Fall ſich auf dieſen beſondern nicht unmittelbab anwenden laſſe.

§. 142.

Die Bedingungen, welche für dieſen zweifelhaften Fall der Hebel giebt, indem man der Reihe nach, A, B und C als Unterſtützungspunkte annimmt, ſind folgende:

$$\Pi''AC + \Pi'AB = P\,.\,AG$$
$$\Pi''BC + \Pi\,AB = P\,.\,BG$$
$$\Pi'\,BC - \Pi\,AC = P\,.\,CG$$

Erſtere beyden addirt, geben $\Pi''\,AB + \Pi'\,AB + \Pi\,AB = P\,.\,AB$, oder $\Pi + \Pi' + \Pi'' = P$. Man multiplicire dieſe durch BC, und ſubtrahire davon die zweyte, ſo bleibt die dritte übrig. Alſo iſt dieſe ganz unbrauchbar, und die drey Gleichungen zeigen weiter nichts, als daß die Laſt unter die Punkte A, B, C ſich ganz vertheilt; in welchem Verhältniſſe aber? erfährt man durch ſie nicht. Es ſcheint vielmehr, als liege etwas

Willkührliches in dieſer Vertheilung, ſo bald mehr als zwey Stützen vorhanden ſind.

§. 143.

Dieſe Unbeſtimmtheit liegt aber nicht in der Sache ſelbſt, ſondern zeigt bloß, daß man mit der bisherigen Theorie des Gleichgewichtes hier nicht zureiche: legt man nemlich einen Balken auf drey Stützen, deren Köpfe genau in einer Horizontale liegen, ſo trägt nothwendig jede Stütze einen beſtimmten Theil von ſeinem Gewichte; alſo geſchieht die Vertheilung gewiß nach irgend einem Geſetze, und richtet ſich bloß darnach, wie die Stützen geſtellt ſind.

§. 144.

Das natürlichſte Hülfsmittel, welches ſich zu der Auflöſung dieſes Problems darbietet, iſt ohne Zweifel die Vorausſetzung: Die Vertheilung werde ſo gleichförmig geſchehen als möglich, oder die Verſchiedenheit zwiſchen dem Drucke, den die eine oder die andere Stütze leidet, werde ſo gering ſeyn, als es die Umſtände zulaſſen. Man ſetze daher, wie vorhin, das Gewicht des Balken $= P$, die Theile, die davon auf A, B und C kommen, $= p, p', p''$, ſo ſollen

1) nach jener Vorausſetzung die Unterſchiede $p - p'$, $p - p''$ und $p' - p''$ zuſammen ein Minimum ausmachen; da aber auch mit eben dem Rechte $p' - p$, $p'' - p$ und $p'' - p$ als die gegenſeitigen Unterſchiede angeſehen werden können, ſo muß man, um die Zweydeutigkeit der entgegengeſetzten Zeichen

wegzuräumen, ſtatt der einfachen Differenzen ihre Quadrate nehmen, und die Summe $(p-p')^2 + (p-p'')^2 + (p'-p'')^2$ als Minimum betrachten.

2) Setzt man das Differenzial davon $= o$, und entwickelt es gehörig, ſo erhält man:

$$dp\,(p-p'-p'') + pp'(p'-p-p'') + dp''\,(p''-p-p') = o.$$

Da nun $p + p' + p'' = P$ iſt, ſo wird $p - p' - p'' = 2p - P$, $p' - p - p'' = 2p' - P$ und $p'' - p - p' = 2p'' = P$, alſo verwandelt ſich die Gleichung in folgende:

$$\left.\begin{matrix} 2pdp - Pdp \\ + 2p'dp' - Pdp' \\ + 2p''dp'' - Pdp'' \end{matrix}\right\} = o.$$

3) Aber p, p', p'' ſind Theile des unveränderlichen Ganzen P, folglich $dp + dp' + dp'' = o$; alſo auch $2pdp + 2p'dp' + 2p''dp'' = o$.

4) Man ſetze nun $AG = a$, $BG = b$, $CG = c$, ſo giebt die Bedingung des Gleichgewichtes:

$$ap + cp'' - bp' = o, \text{ folglich}$$
$$adp + cdp'' - bdp' = o.$$

Verbindet man dieſe mit den andern beyden Differenzialgleichungen n. 3, und eliminirt dadurch dp' und dp'' ſo erhält man: $(b+c)\,p + (a-c)\,p' - (a+b)\,p'' = o$.

5) Man eliminire ferner aus dieſer p'' vermittelſt der Gleichung $ap + cp'' - bp' = o$; alsdann wird:

$$(a^2 + ab + bc + c^2)\,p = (b^2 + ab - ac + c^2)\,p',$$

und auf gleiche Art bekommt man, indem man p' wegſchafft:

$$(a^2 + bc - ac + b^2)\,p = (b^2 + ab - ac + c^2)\,p''.$$

6) Dieſe Verhältniſſe zwiſchen p, p′ und p″ geben nun: $p = \frac{\frac{1}{2}P(b^2 + ab - ac + c^2)}{a^2 + b^2 + ab + bc - ac + c^2}$, woraus ſich die Werthe von p′ und p″ unmittelbar finden laſſen.

7) Fällt der Schwerpunkt des Balken in die Mitte von AB, ſo iſt $a = b$, folglich wird dann;

$$p = \frac{P(2a^2 - ac + c^2)}{6a^2 + 2c^2},\ p' = \frac{P(2a^2 + ac + c^2)}{6a^2 + 2c^2},$$

$$p'' = \frac{2Pa^2}{6a^2 + 2c^2}$$

8) Für $c = 0$, iſt $p = p' = p'' = \frac{1}{3}P$, alſo wird dann die Laſt auf die Stützen ganz vertheilt.

§. 145.

Auf dieſe Weiſe kann man die Vertheilung des Druckes für ſo viele Unterſtützungspunkte beſtimmen, als man will. Indeß wird die Auflöſung bey mehrern Stützen, wenn gleich nicht verwickelter, doch wenigſtens ſehr weitläuftig, weil man außer der Differenzialgleichung, welche die Vorausſetzung des Minimums giebt, alle die Gleichungen zu Hülfe nehmen muß, die aus der Bedingung des Gleichgewichtes fließen. Wir wollen daher bey den folgenden allgemeinern Problemen dieſes Kapitels den eben gezeigten Weg verlaſſen, und dafür ein anderes Verfahren wählen, das von ſeinem Erfinder, dem Hrn. Euler zu einer ſehr hohen Vollkommenheit gebracht iſt. Es beruhet auf dem Grundſatze: daß unendlich kleine Aenderungen allemal den Kräften proportional ſind, die ſie hervorbringen. Dieſer Satz klingt zwar in der Allgemeinheit, wie er hier ausge-

drückt iſt, etwas hypothetiſch, er iſt aber in dem einzelnen Falle, wo wir ihn gebräuchen werden, der vollkommenſten Evidenz fähig.

§. 146.

Lehrſatz. Wenn ein Faden durch ein daran gehängtes Gewicht um einen unendlich kleinen Theil ausgedehnt wird, ſo iſt dieſe Aenderung ſeiner Länge dem Gewichte proportional.

Beweis. Man ſetze, die Länge des Fadens l bekomme durch das angehängte Gewicht P die Ausdehnung ω. Machte dieſe einen bedeutenden Theil von l aus, ſo befände ſich der Faden in einem gewaltſamen Zuſtande, und ein eben ſo großes Gewicht P, zum vorigen hinzugefügt, würde nicht vermögend ſeyn, eben die Ausdehnung noch einmal zu bewirken, ſondern wenn letztere ω' heißt, ſo iſt $\omega' < \omega$. Je geringer aber ω in Vergleichung gegen l iſt, deſto mehr nähert ſich die Dehnbarkeit des Fadens in dem Zuſtande, in den ihn das Gewicht P verſetzt hat, ſeiner natürlichen Dehnbarkeit, alſo ω' deſto mehr ω, und gedenkt man ſich ω als unendlich abnehmend, ſo nähert ſich ω' unendlich ω, folglich iſt die Grenze davon: $\omega' = \omega$; alſo die Ausdehnung durch das doppelte Gewicht $= \omega + \omega' = 2\omega$.

Bey eben der Vorausſetzung folgt, daß die Ausdehnung des Fadens durch das Gewicht $3P = 3\omega$ ſey u. ſ. f., woraus erhellet, daß unendlich kleine Aenderungen der Länge des Fadens ſich allemal ver-

halten, wie die Gewichte, durch die ſie hervorgebracht ſind.

§. 147.

Aufgabe. Ein Balken, deſſen Schwerpunkt in O fällt, ruhet auf den Punkten M, M′, M″ u. ſ. f. in horizontaler Lage; man fragt, welchen Druck dieſe Punkte durch ſein Gewicht P leiden.

Fig. 30. Aufl. 1) Man ſetze, ſtatt der Stützen, werde der Balken in den Punkten M, M′, M″ u. ſ. f. durch Fäden gehalten, die in keinem Betracht von einander verſchieden ſeyn ſollen. Er wird ſie durch ſein Gewicht ausdehnen, und dadurch aus der horizontalen Lage nach und nach in eine ſchiefe kommen, bis er ſich mit ihnen ins Gleichgewicht geſetzt hat.

2) Zu der Ausdehnung eines jeden dieſer Fäden wird ein Theil vom Gewichte P verwandt, der gerade erforderlich iſt, dieſe Wirkung für ſich hervorzubringen; denn eine größere oder geringere Kraft würde den Faden entweder noch mehr ausdehnen, oder eine Zuſammenziehung deſſelben geſtatten, wobey alſo das Gleichgewicht nicht ſtatt finden könnte.

3) Man kann nun die Fäden ſo ſtark annehmen, daß ihre Ausdehnungen unendlich klein ſind; alsdann verhalten dieſe ſich in den einzelnen Punkten M, M′ u. ſ. f. wie die Theile des Gewichtes, die auf dieſe Punkte kommen. Wir wollen dieſe Theile p, p′, p″ u. ſ. f. nennen.

4) Es ſey nun $MO = x$, $M'O = x'$, $M''O = x''$ u. ſ. f., die Ausdehnung $Mm = y$, $M'm' = y'$ u. ſ. f.,

ſo ſind die Punkte m, m′, m″ u. ſ. f. wieder in einer geraden Linie, folglich wird jede Ordinate y durch die ihm zugehörige Abſciſſe x vermittelſt einer Gleichung: $y = a + bx$ beſtimmt, worinn a und b noch unbekannt, aber für jedes x einerley ſind. Außerdem hat man $y : y' : y'' \ldots = p : p' : p'' \ldots$ oder $\frac{p}{y} =$ einer beſtändigen Größe c.

5) Da P den Kräften p, p′ .. äquipollent iſt, ſo iſt O der gemeinſchaftliche Schwerpunkt von M, M′, M″ u. ſ. f., alſo hat man, weil der Anfangspunkt mit dem Schwerpunkte zuſammen fällt (§. 32.):

$px + p'x' + p''x'' + \ldots = 0$, oder wenn man für p, p′ .. die Werthe cy, c′y′ .. ſubſtituirt:

$$xy + x'y' + x''y'' + \ldots = 0.$$

6) Man ſetze ferner für jedes y ſeinen Werth (4) in x ausgedrückt, ſo wird

$$\left.\begin{array}{l} a\,(x + x' + x'' + \text{u. ſ. f.}) \\ + b\,(x^2 + x'^2 + x''^2 + \text{u. ſ. f.}) \end{array}\right\} = 0.$$

oder, wenn man die Summen aller x, und ihrer Quadrate f und g nennt: $af + bg = 0$.

7) Außerdem iſt $p + p' + p'' + \ldots = P$, und jedes $p = ca + cbx$, folglich, wenn die Zahl der Unterſtützungspunkte n heißt,

$$P = nca + cb\,(x + x' + x'' \ldots) = nca + cbf.$$

8) Dieſe Gleichung mit der vorigen (6) verbunden, giebt $ca = \frac{Pg}{ng - f^2}$, $cb = \frac{-Pf}{ng - f^2}$; alſo wird $p^{(m)} = ca + cbx^{(m)} = \frac{g - fx^{(m)}}{ng - f^2} . P$.

Exempel. 1. Für den §. 144. betrachteten Fall iſt $x = AG = a$, $x' = BG = -b$, $x'' = CG = c$, folglich $f = a - b + c$, $g = a^2 + b^2 + c^2$, dies giebt $p = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - a^2 + ab - ac}{3(a^2 + b^2 + c^2) - (a - b + c)^2} \cdot P = \frac{(b^2 + ab - ac + c^2)P}{2(a^2 + ab + b^2 + bc - ac + c^2)}$, wie oben.

2. Es liege allemal ein Paar von Unterſtützungspunkten auf verſchiedenen Seiten des Schwerpunktes in gleicher Entfernung davon, und die Anzahl derſelben ſey auf jeder Seite $= m$, ſo hat man $f = 0$, $n = 2m$, folglich $p = p' = p'' \ldots = \frac{P}{2m}$, d. i. jede der Stützen trägt ſo viel als die andere.

§. 148.

Wenn ein ſchrägliegender Balken in mehreren Punkten unterſtützt wird, ſo vertheilt ſich ſein Gewicht eben ſo auf dieſe Punkte, als wenn er horizontal läge. Denn es ſey ſein Gewicht $= P$, der Neigungswinkel $= I$, ſo iſt $P \operatorname{Cos} I$ der ſenkrechte Druck, den er auf die Unterſtützungspunkte ausübt; für dieſen iſt nun der bisherige Calcul richtig, alſo kommt davon $p \operatorname{Cos} I$, $p' \operatorname{Cos} I \ldots$ auf die einzelnen Stellen. Damit verbinde man $p \operatorname{Sin} I$, $p' \operatorname{Sin} I \ldots$, worinn ſich der andere Theil des Gewichtes $P \operatorname{Sin} I$ zertheilen läßt, weil er längs dem Balken wirkt (§. 126.), ſo bekommt man p, p', $p'' \ldots$ nach vertikalen Richtungen.

§. 149.

Fig. 26. Zur Verminderung der Propulſion eines Daches (§. 133.) dienen auch noch die ſogenannten Dachſtühle, deren Wirkung aus der bisherigen Theorie von der Vertheilung des Drucks ſich leicht beſtimmen läßt. Es ſey zwiſchen den Sparren AC und BC des Daches ACB ein Querbalken FG angebracht, der durch die Säulen FH und GI unterſtützt iſt, ſo vertheilt ſich das Gewicht P der Sparre BC auf die Punkte B, G uns C. Wir wollen ſetzen auf B komme der Theil p, auf C, p′ und auf G, p″.

Von dieſen zerlege man p′ nach den Richtungen Cc und CB, ſo iſt erſterer Theil $= p' \text{Cot I}$, (§. 128.) der durch eine gleiche Kraft von der andern Seite her aufgehoben wird; letzterer Theil iſt $= p' \text{Sec I}$, und übt auf den Punkt B einen Druck nach Bp aus.

Das andere Gewicht p″ zerlege man, weil die Sparre in G ſchräg aufliegt, in eine Kraft nach Gg, ſenkrecht auf die Sparre, und in eine nach GB, längs derſelben. Erſtere iſt $= p'' \text{Cos I}$, und findet nach GI und GF Widerſtand; letztere iſt $= p'' \text{Sin' I}$ und vereinigt ſich mit $p' \text{Sec I}$ zu einer Kraft $N = \frac{p' + p'' \text{Sin I}^2}{\text{Sin I}}$ nach Bp.

Hiervon iſt der Antheil nach Bq, oder die geſuchte Propulſion des Daches $= N \text{Cos I} = \text{Cot I}\,(p' + p'' \text{Sin I}^2)$.

Exempel. 1. Der Punkt G falle in die Mitte von BC, oder in den Schwerpunkt der Sparre, ſo iſt

$p = p' = p'' = \frac{1}{3}$ P, alſo die Propulſion $= \frac{1}{3}$ P Cot I $(1 + \text{Sin } I^2)$, die allemal geringer als $\frac{1}{2}$ P Cot I iſt, wofern $I < 45°$ iſt, aber $\frac{1}{2}$ P Cot I übertrifft, ſobald $I > 45°$ genommen wird.

2. Der Punkt G liege nach oben zu um den vierten Theil der Sparre vom Schwerpunkte entfernt, ſo iſt $c = \frac{1}{2} a$, $p' = \frac{2a^2 - ac + c^2}{6a^2 + 2c^2} . P = \frac{7}{26} P$, $p'' = \frac{2a^2 P}{6a^2 + 2c^2} = \frac{4}{13} P$, folglich die Propulſion $= \frac{1}{26}$ P Cot I $(7 + 8 \text{ Sin } I^2)$, die, wie man ſieht, kleiner als die vorige iſt, und erſt für einen Winkel von $60° = \frac{1}{2}$ P Cot I wird.

§. 150.

Fig. 31. **Aufg.** Ein Körper, deſſen Grundfläche eben und in horizontaler Lage iſt, ruhet mit derſelben auf mehreren Unterſtützungspunkten M, M', M'' u. ſ. f. Wieviel wird jeder dieſer Punkte von ſeinem Gewichte P zu tragen haben?

Aufl. 1) Man ziehe in der Grundfläche aus einem beliebigen Punkte C zwey Linien CA und CB ſenkrecht aufeinander, und fälle aus den Punkten M, M' u. ſ. f. auf CA die Perpendikel MP, M'P' u. ſ. f., ſo wird die Lage eines jeden dieſer Punkte durch die Coordinaten $CP = x$, und $PM = y$ beſtimmt.

2) Ein Perpendikel aus dem Schwerpunkte des Körpers treffe die Grundfläche in O, ſo iſt O der gemeinſchaftliche Schwerpunkt aller der Unterſtützungs-

punkte (§. 112. 1.). Es ſey für ihn CD = a, DO = b.

3) Man ſetze den Druck auf M = p, auf M′ = p′ u. ſ. f., ſo hat man

$$p + p' + p'' .. = P, \text{ und wegen n. 2.}$$
$$px + p'x' + p''x'' + .. = Pa \text{ (§. 74.)}$$
$$py + p'y' + p''y'' + .. = Pb.$$

4) Statt der Stützen denke man ſich wieder den Körper in den Punkten M, M′ u. ſ. f. durch einerley Fäden gehalten, die dem Drucke unmerklich nachgeben, und ſich um unendlich kleine Theile ausdehnen, ſo verhalten ſich dieſe Ausdehnungen, die wir z, z′, z″ nennen wollen, wie die Kräfte p, p′, p″ u. ſ. f., durch die ſie hervorgebracht ſind. Man kann alſo $p^{(m)} = cz^{(m)}$ ſetzen.

5) Weil die Ausdehnungen wegen der Verſchiedenheit der Kräfte p, p′, p″ u. ſ. f. ungleich ſind, ſo kommt dadurch die Grundfläche in eine etwas ſchiefe Lage, in der die vertikalen Abſtände der Punkte M, M′ u. ſ. f. von der vorigen Ebene mit den Ausdehnungen z, z′ u. ſ. f. einerley ſind.

6) Die ſchiefe Grundfläche hat daher x, y und z zu Coordinaten, und folglich iſt allgemein $z = f + gx + hy$; denn man weiß, daß unter dieſer Form die Gleichung für jede Ebene begriffen iſt, ſie mag eine Lage haben, welche ſie will.

7) Daher hat man überhaupt $p^{(m)} = cz^{(m)} = cf + cgx^{(m)} + chy^{(m)}$, oder, wenn $cf = A$, $cg = B$, $ch = C$ geſetzt wird: $p^{(m)} = A + Bx^{(m)} + Cy^{(m)}$.

8) Man

8) Man ſetze nun dieſen Werth für p, p′, p″ u. ſ. f. in die drey Gleichungen n. 3., ſo erhält man; wenn der Unterſtützungspunkte n ſind:

$$nA + (x + x' + x''\ldots)B + (y + y' + y''\ldots)C = P,$$

$$A(x + x' + x''\ldots) + B(x^2 + x'^2 + \ldots) + C(xy + x'y' + \ldots) = Pa$$

$$A(y + y' + y''\ldots) + B(xy + x'y' + \ldots) + C(y^2 + y'^2 + \ldots) = Pb,$$

oder wenn die einzelnen Summen durch ein fortgeſetztes S bezeichnet werden:

$$nA + B\,.\,Sx + C\,.\,Sy = P,$$

$$ASx + B\,.\,Sx^2 + C\,.\,Sxy = Pa,$$

$$A\,.\,Sy + B\,.\,Sxy + C\,.\,Sy^2 = Pb.$$

woraus die Werthe von A, B und C gefunden werden können.

§. 151.

Zur Erläuterung dieſer allgemeinen Formeln mag folgender beſondere Fall dienen:

Fig. 32. Ein Tiſchblatt iſt in den vier Punkten A, B, C, D unterſtützt, die in die Eckpunkte eines Rechtecks ACBD fallen. Gewichte, womit es beladen iſt, machen, daß der Schwerpunkt des Ganzen nicht in die Mitte, ſondern irgendwo in O zu liegen kommt. Wie viel wird jede der Stützen zu tragen haben?

Aufl. 1) Es ſey die ganze Laſt, die auf ihnen ruhet, = P; die Seite AC = f, BC = g. Man ziehe durch O mit dieſen Seiten die Parallelen FI und GH, und ſetze noch CF = a, FO = b, ſo hat man für den

Punkt A, $x = f$, $y = o$; für $B: x' = o$, $y' = g$; für $C: x'' = o$, $y'' = o$; für $D: x''' = f$, $y''' = g$.

2) Folglich wird $Sx = 2f$, $Sy = 2g$, $Sx^2 = 2f^2$, $Sy^2 = 2g^2$, $Sxy = fg$, und man erhält daher die Gleichungen:

$$4A + 2Bf + 2Cg = P$$
$$2Af + 2Bf^2 + Cfg = Pa$$
$$2Ag + Bfg + 2Cg^2 = Pb$$

3) Die erſte mit f multiplicirt, und vom Doppelten der zweyten abgezogen, läßt übrig:

$$2Bf^2 = (2a - f)P, \text{ oder } B = \frac{(2a - f)P}{2f^2}.$$

Eben ſo erhält man aus der erſten und dritten:

$$2Cg^2 = (2b - g)P, \text{ oder } C = \frac{(2b - g)P}{2g^2}.$$

4) Daraus wird nun $4A + (\frac{2a}{f} + \frac{2b}{g})P = 3P$, folglich: $A = (\frac{3}{4} - \frac{a}{2f} - \frac{b}{2g})P$, und daher

der Druck auf $A = A + Bf = (\frac{1}{4} + \frac{a}{2f} - \frac{b}{2g})P$

der auf $B = A + Cg = (\frac{1}{4} - \frac{a}{2f} + \frac{b}{2g})P$

der auf $C = A = (\frac{3}{4} - \frac{a}{2f} - \frac{b}{2g})P$

und der auf $D = A + Bf + Cg = (\frac{a}{2f} + \frac{b}{2g} - \frac{1}{4})P$.

§. 152.

Eben dieſe Werthe für p, p', p'', p''' findet man

ſehr leicht aus der Betrachtung der möglichſt kleinſten Verſchiedenheit des Druckes. Man hat nemlich dieſer zu Folge:

$pdp + p'dp' + p''dp'' + p'''dp''' = 0$ (§. 144. 3.), und dazu kommen noch folgende Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes:

$p + p' + p'' + p''' = P$; $(p + p''')f = aP$; $(p' + p''')g = bP$ (§. 150. 3.). Dieſe geben, wenn man ſie differenziirt:

$dp + dp' + dp'' + dp''' = 0$; $dp + dp''' = 0$; $dp' + dp''' = 0$, woraus man $dp'' = dp''' = - dp$ und $dp' = + dp$ erhält.

Schafft man damit dp', dp'' und dp''' aus der erſten Gleichung weg, ſo wird: $p + p' - p'' + p''' = 0$, und dieſe Gleichung mit der zweyten: $p + p' + p'' + p''' = P$ verbunden, giebt $2p + 2p' = P$, $2p'' + 2p''' = P$, oder $p' = \frac{1}{2}P - p$, $p''' = \frac{1}{2}P - p''$. Daher $(p - p'')f = (a - \frac{1}{2}f)P$ und $(p + p'')g = (g - b)P$, alſo $p = (\frac{1}{4} + \frac{a}{2f} - \frac{b}{2g})P$, $p'' = (\frac{3}{4} - \frac{a}{2f} - \frac{b}{2g})P$, wie vorhin.

§. 153.

Bisher haben wir die Stellen, wo die Laſt unterſtützt iſt, als bloße Punkte betrachtet; ſie kann aber auch durch eine ganze Fläche getragen werden, und alsdann breitet ſich der Druck über dieſe nach allen Seiten aus, und jede ihrer Stellen übernimmt einen Theil davon. Vertheilt ſich der Druck auf die Fläche gleichför-

mig, ſo bekommt das eine Stück derſelben nach Verhältniß ſeines Raumes nicht mehr davon, als das andere, oder, wenn s einen Theil der Fläche bedeutet, π den Theil des ganzen Druckes, der auf ihn kommt, ſo iſt $\frac{\pi}{s} = p$ an allen Stellen einerley. Bey ungleichförmigen Drucke hingegen iſt dies p, **die Einheit des Druckes**, an verſchiedenen Stellen verſchieden, und es entſteht dann die Frage, wie groß p für jedes beſondere Element der Fläche ſey, oder mit andern Worten: wie ſtark die Fläche in den einzelnen Punkten gedrückt werde.

§. 154.

Die Auflöſung dieſes Problems unterſcheidet ſich von dem in §. 150. betrachteten Falle nur bloß dadurch, daß jezt der Druck auf unendlich viele Stellen ſich vertheilt, alſo CP $= x$, PM $= y$ nicht mehr Coordinaten für einzelne Punkte, ſondern für jeden Punkt M der gegebenen Fläche bedeuten. Man ſtelle ſich daher die Fläche in lauter rechtwinkliche und gleiche Elemente getheilt vor, die durch die Aenderungen von x und y entſtehen, alſo $dxdy$ zum Inhalte haben, und nenne den Druck auf jedes derſelben $d\pi$, ſo iſt $d\pi$ ein unendlich kleiner Theil von P, und nach der Lage des Elementes veränderlich. Nach §. 150. hat man nemlich $d\pi = A + Bx + Cy$: da aber, wie man ſieht, A, B, C, hier unendlich klein, und dem Flächenraume $dxdy$ proportional ſeyn müſſen, ſo ſetze man

Fig. 31.

$A = \alpha dxdy$, $B = \beta dxdy$, $C = \gamma dxdy$; alsdann bekommt man für die Einheit des Druckes: $p = \frac{\pi}{dxdy} = \alpha + \beta x + \gamma y$. Zugleich aber ändern ſich auch die Gleichungen (ebendaſ.) in ſo fern ab, daß die dortigen Summen ſich in Integrale verwandeln, die über die ganze Fläche genommen werden müſſen. Es ſey K der ganze Flächenraum, ſo iſt $n dxdy = K$, alſo $nA = n\alpha dxdy = K\alpha$, folglich:

$$K\alpha + \beta\iint x dxdy + \gamma\iint y dxdy = P.$$

$$\alpha\iint x dxdy + \beta\iint x^2 dxdy + \gamma\iint xy dxdy = Pa$$

$$\alpha\iint y dxdy + \beta\iint xy dxdy + \gamma\iint y^2 dxdy = Pb.$$

woraus ſich α, β und γ, alſo auch p für jede Stelle der Fläche beſtimmen läßt.

§. 155.

Die Integrale in dieſen drey Gleichungungen ſind doppelt, d. h. man muß jedes Differenzial erſt für einerley x bis an den Umfang der Fläche ſummiren, und dann beym Kommenden nochmal die Integration nach x anſtellen. Es ſey nun für den Umfang der Fläche $y = Y$, ſo wird:

$\iint x dxdy = \int Yx dx$, $\iint y dxdy = \frac{1}{2}\int Y^2 dx$, $\iint x^2 dxdy = \int Yx^2 dx$, $\iint xy dxdy = \frac{1}{2}\int Y^2 x dx$ und $\iint y^2 dxdy = \frac{1}{3}\int Y^3 dx$; wodurch die Gleichungen folgende Form bekommen:

$$K\alpha + \beta\int Yx dx + \tfrac{1}{2}\gamma\int Y^2 dx = P.$$

$$\alpha\int Yx dx + \beta\int Yx^2 dx + \tfrac{1}{2}\gamma\int Y^2 x dx = Pa$$

$$\tfrac{1}{2}\alpha\int Y^2 dx + \tfrac{1}{2}\beta\int Y^2 x dx + \tfrac{1}{3}\gamma\int Y^3 dx = Pb.$$

Weil nun die Grenzlinien der Fläche beſtimmt ſind, ſo iſt für jeden Theil des Umfangs Y durch x gegeben, alſo hat man jetzt nur noch Ausdrücke zu integriren, in denen bloß x als veränderliche Größe vorkommt.

§. 156.

Iſt der Umfang der Fläche von ſolcher Beſchaffenheit, daß es einen Punkt in ihr giebt, durch den ſich zwey Linien ſenkrecht aufeinander ziehen laſſen, von denen eine jede die Fläche in zwey gleiche und ähnliche Theile theilt, ſo nehme man dieſen Punkt zum Anfangspunkte der Abſciſſen und eine dieſer Linien zur Abſciſſenlinie an. Alsdann iſt die Summe der Elemente $dxdy = 2Ydx$, alſo für einerley x, poſitiv oder negativ genommen, gleich groß; daher ſind allemal zwey ſolcher $2Yxdx$ auf verſchiedenen Seiten des Anfangspunktes zuſammengenommen $= 0$, folglich auch die ganze Summe $\int Yxdx = c$.

Da ferner $ydxdy$ für einerley x und gleiche entgegengeſetzte y gleich und entgegengeſetzt iſt, ſo ſind ſolche zwey $ydxdy$ zuſammen genommen $= 0$, folglich auch das ganze $\iint ydxdy$, oder $\int Y^2 dx = 0$.

Eben dies erhellet von dem Integrale $\iint xydxdy$; ſo daß alſo die drey Gleichungen für gegenwärtigen Fall auf folgende zurückgebracht werden:

$$K\alpha = P$$
$$4\beta \int Yx^2 dx = Pa$$
$$\tfrac{4}{3}\gamma \int Y^3 dx = Pb$$

Daher wird $p = \alpha + \beta x + \gamma y = \frac{P}{K} + \frac{Pax}{4\int Yx^2dx}$
$+ \frac{3Pby}{4\int Y^3dx}$.

Exempel 1. Es ſey die Fläche ein Rechteck, deſſen Höhe $= f$, und deſſen Grundlinie $= g$ ſeyn mag, ſo hat man, wenn man die Abſciſſenlinie der Höhe parallel nimmt, $Y = \frac{1}{2} g$, alſo $\int Yx^2dx = \frac{1}{6} gx^3$, welches für $x = \frac{1}{2} f$, $= \frac{1}{48} gf^3$ wird. Ferner wird $\int Y^3dx$
$= \frac{1}{16} g^3f$ und $K = fg$, $y = \frac{1}{2} g$, alſo $p = \frac{P}{fg} +$
$\frac{12Pax}{gf^3} + \frac{12Pby}{fg^3} = \frac{P}{fg}\left(1 + \frac{12ax}{f^2} + \frac{12by}{g^2}\right)$.

Exempel 2. Die Fläche ſey ein Kreis, deſſen Halbmeſſer $= f$ iſt, ſo hat man $Y^2 = f^2 - x^2$; alſo, wenn man $x = f \operatorname{Sin} \vartheta$ ſetzt, $Y = f \operatorname{Cos} \vartheta$, folglich Yx^2dx
$= f^4 \operatorname{Sin} \vartheta^2 \operatorname{Cos} \vartheta^2 d\vartheta = \frac{1}{4} f^4 . \operatorname{Sin} 2\vartheta^2 d\vartheta = \frac{1}{8} f^4$
$(1 - \operatorname{Cos} 4\vartheta)\, d\vartheta$ und daher $\int Yx^2dx = (\frac{1}{8}\vartheta -$
$\frac{1}{32} \operatorname{Sin} 4\vartheta)\, f^4$. Für $x = f$ iſt nun $\operatorname{Sin} \vartheta = 1$, $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, alſo der vollſtändige Werth des Integrals
$= \frac{1}{16} \pi f^4$.

Auf gleiche Art findet man $\int Y^3dx = \frac{3}{16} \pi f^4$;
daher wird: $p = \frac{P}{\pi f^2} + \frac{4Pax}{\pi f^4} + \frac{4Pby}{\pi f^4} = \frac{P}{\pi f^2}$
$\left(1 + \frac{4ax + 4by}{f^2}\right)$.

§. 157.

Es wird bey dieſer Berechnung allemal vorausgeſetzt, daß nur auf den Theil der Fläche, der von der

Grundfläche des Körpers bedeckt wird, der Druck ſich verbreite. Ragt dagegen die Grundfläche an den Seiten über den Umfang hervor, ſo wird begreiflich dadurch der Druck im Ganzen genommen weder größer noch geringer, weil die Fläche alsdann noch eben ſo gut das ganze Gewicht des Körpers zu tragen hat, aber die Einheit des Druckes iſt in dieſem Falle deſto größer, je geringer der Flächenraum iſt, der die Laſt übernimmt.

§. 158.

Wenn der Schwerpunkt in den Mittelpunkt der Fläche fällt, ſo iſt $a = b = o$, folglich $p = \frac{P}{K}$, oder **der Druck vertheilt ſich alsdann gleichförmig über die Fläche.** Dieſer merkwürdige Satz beſchränkt ſich ohne Zweifel nicht bloß auf ebene Flächen, ſondern gilt gewiß auch da, wo überhaupt eine krumme Fläche, die irgendwo einen Mittelpunkt hat, mit einem Körper beſchwert wird, deſſen Grundfläche in jene hineinpaßt, und deſſen Schwerpunkt vertikal über erwähntem Mittelpunkte liegt. So z. B. wird die Schüſſel, in der man die Linſengläſer ſchleift, allenthalben gleich ſtark gedrückt werden, wenn die auf den Druck verwandte Kraft genau durch die Axe derſelben geht. Auch gehört die Schraubenfläche hieher, auf die ſich allemal die Laſt gleichförmig vertheilt, ſobald ihr Schwerpunkt in die Spindel der Schraube fällt. Ich kann mich hier nicht darauf einlaſſen, dieſe höchſt wahrſcheinlichen Vermuthungen darzuthun; wie wichtich aber nähere

Unterſuchungen hierüber ſind, erhellet allein daraus, daß aus Mangel an denſelben die Theorie der Friction krummer Flächen beynahe noch ganz im Dunkeln liegt.

Anmerk. Die letzten §§ dieſes Kapitels hat Euler in Nov. Comment. Petrop. Tom. XVIII. umſtändlich abgehandelt; ſonſt wüßte ich aber keinen Schriftſteller zu nennen, der über dieſe Materie etwas Entſcheidendes geliefert hätte: denn ſowohl Lambert *) als Delanges **) begnügen ſich bloß mit den gewöhnlichen Bedingungen des Gleichgewichtes, die doch, wie D'Alembert ***) zeigt, die Aufgabe allemal unbeſtimmt laſſen, und alſo zu deren Auflöſung für ſich nicht zureichend ſind. Eulers Verfahren allein verbreitet über die Sache Licht, und erhält durch die Uebereinſtimmung mit den meinigen, wie ich glaube, völlige Beſtätigung.

Fünftes Kapitel.

Von der Spannung biegſamer Fäden.

---

§. 129.

Fig. 33. Wenn man einen Faden AMB mit dem einen Ende an einen unbeweglichen Punkt A befeſtigt, und an ſeinem andern Ende B eine Kraft P ziehen läßt, ſo ſtreckt dieſe den Faden in eine gerade Linie, die mit der Richtung der Kraft zuſammenfällt.

Es ſey z. B. P ein angehängtes Gewicht, ſo wird

*) Beyträge zum Gebrauche der Math. 2. Th.

**) Memorie di Mat. e Fiſica della Soc. Ital. Tom. V. p. 107.

***) Opuſcules de Mathem. Tom. VIII. pag. 36.

dieſem der Faden wegen ſeiner Biegſamkeit ſo lange nachgeben, bis es ſo tief als möglich geſunken iſt; dies geſchieht aber nur dann, wenn die Punkte A, M und B in einer geraden Linie liegen, die vertikal herabläuft.

§. 160.

Durch den Zug der Kraft wird der Faden in einen gewaltſamen Zuſtand verſetzt, den man die Spannung deſſelben nennt. Sie richtet ſich nach der Größe der Kraft, und erſtreckt ſich der Länge nach auf alle Theile des Fadens in gleichem Grade.

Jeder Punkt M wird nemlich von der Kraft P nach MB gezogen, und da er nicht weichen kann, durch eine gleiche und entgegengeſetzte Kraft angehalten; alſo wirkt auf alle Punkte des Fadens dieſelbe Kraft = P nach entgegengeſetzten Richtungen, und ſpannt den Faden an allen Stellen gleich ſtark.

§. 161.

Daher pflanzt ſich die Kraft durch den Faden auf den Punkt A fort, oder wirkt auf ihn eben ſo, als wäre ſie unmittelbar darauf angebracht, folglich muß dieſer mit gleicher Kraft nach entgegengeſetzter Richtung Widerſtand leiſten. Statt alſo den Punkt A zu befeſtigen, kann man eine entgegengeſetzte Kraft = P auf ihn anbringen, ohne dadurch das Gleichgewicht aufzuheben; dies leitet auf folgende Sätze:

1. Zwey gleiche Kräfte, jede = P, die nach entgegengeſetzten Richtungen an einem Faden ziehen, ſpan-

nen ihn nach dieſer Richtung in eine gerade Linie aus, und halten einander an demſelben das Gleichgewicht.

2. Gegenſeitig, wenn zwey Kräfte an dem Faden im Gleichgewichte ſeyn ſollen, ſo müſſen ſie gleich und entgegengeſetzt ſeyn.

3. Der Faden leidet zwiſchen dieſen beyden Kräften allenthalben die Spannung = P.

§. 162.

Fig. 34. **Aufgabe.** Es ſind auf die Punkte A, B und F eines biegſamen Fadens drey Kräfte P, Q und R nach den Richtungen Aa, Bb und Ff angebracht; man ſucht die Umſtände, unter denen ſie einander das Gleichgewicht halten werden.

Aufl. 1) Da die Kraft P aufgehoben wird, ſo muß in F eine gleich große Kraft nach entgegengeſetzter Richtung Fα ziehen, alſo der Theil AF in eine gerade Linie ausgeſpannt werden, die mit Aa, der Richtung von P, zuſammenfällt.

2) Eben ſo muß der Kraft Q eine gleiche Kraft nach Fβ entgegenwirken, alſo der Theil des Fadens FB die Lage Bb erhalten, und

3) den beyden nach Fα und Fβ gerichteten Kräften muß die Kraft R äquipollent ſeyn.

4) Setzt man daher den Winkel fFα, den Aa und Ff, die Richtungen der Kräfte P und R, miteinander machen = η; den Winkel fFβ der Richtungen Bb und Ff = ϑ, ſo hat man als Bedingungen des Gleichgewichtes (§. 52.)

$P \text{ Sin } \eta = Q \text{ Sin } \vartheta$

$R \text{ Sin } \eta = Q \text{ Sin } (\eta + \vartheta)$

5) Die Spannungen der Theile AF und FB ſind = P und Q.

§. 163.

Fig. 35. Wenn ein Pferd vor einem Schlitten oder Wagen zieht, ſo wirken auf den Punkt F, wo das Zugſeil eingehängt iſt, drey verſchiedene Kräfte. Der Bruſtriemen wird durch das Anziehen des Pferdes nach horizontaler Richtng FA geſpannt; das Zugſeil, wenn es in B an der fortzuziehenden Laſt befeſtigt iſt, überträgt die Rückwürkung dieſes Punktes auf F nach der ſchiefen Richtung FB, und der Sattelriemen widerſteht vertikal aufwärts nach Ff.

Um hierbey die Erforderniſſe des Gleichgewichtes zu beſtimmen, ſetze man den Widerſtand, den die Laſt dem Zuge nach horizontaler Richtung oB entgegenſetzt, = R, die Kraft, die das Pferd nach FA anwendet, = M, den Gegendruck nach Ff = Π, die Spannung des Zugſeils = F, ſeine Schiefe, oder den Winkel FBo = ε, ſo erhält man, weil AFo = 90° iſt:

1) $\left.\begin{aligned} M &= T \text{ Cos } \varepsilon \\ \Pi &= T \text{ Sin } \varepsilon \end{aligned}\right\}$ (§. 49.)

folglich $\Pi = M \text{ tang } \varepsilon$.

2) Durch die Spannung des Seiles wird in B ein Zug nach BF bewirkt. Man zerlege dieſe Kraft in eine nach der Horizontale Bo = T Cos ε, und eine nach der Vertikale Bp = T Sin ε; letztere ſtrebt den Punkt

B vertikal zu heben, und wird durch das Gewicht des Wagens aufgehoben; erſtere T Cos ε ſoll gerade ſo groß ſeyn, als nöthig iſt, den Widerſtand R zu überwinden, folglich muß T Cos ε = R ſeyn.

3) Dies mit dem Vorigen (1) verglichen, giebt M = R.

Das Seil mag alſo nach einer Richtung geſpannt werden, nach der man will, ſo hat das Pferd doch immer eben die Kraft nach FA anzuwenden, als wenn es unmittelbar am Punkte B nach Bo zöge.

4) Außerdem leidet aber ſein Rücken durch die Spannung des Sattelriemens den vertikalen Druck Π = R tang ε (1. 3.), der, wie man ſieht, für einerley R deſto größer iſt, je mehr BF von der Horizontale abweicht.

5) Man ſetze die Länge des Seiles BF = l, den Theil Fo der Vertikale, um den die Bruſt des Pferdes höher liegt, als der Punkt B, = a, ſo iſt Bo = $\sqrt{(l^2 - a^2)}$, alſo tang e = $\frac{a}{\sqrt{(l^2 - a^2)}}$, und Π = $\frac{Ra}{\sqrt{(l^2 - a^2)}}$.

Anmerkung. So hat Couplet *) und nach ihm Müller **) die Sache betrachtet. Allein, da der Zug durch zwey Seile geſchieht, ſo vertheilt ſich die Kraft und die Spannungen der beyden Riemen ſo wie die des Seiles werden dadurch halb ſo groß, als ſie vorhin angegeben ſind. Indeß ändert dies in den Werthen für M und Π nichts: denn wir werden nach-

*) Mem. de l'Acad. de Paris 1733.

**) Verſuch einer ſyſtem. Abh. über das Fuhrweſen, Göttingen 1787.

her ſehen, daß ein Faden, der über einen cylindriſchen Körper AEB geht, und an ſeinen Enden A und B nach parallelen Richtungen Aa und Bb beſpannt wird, im Punkte D nach derſelben Richtung DC einen Druck ausübe, der doppelt ſo groß als die Spannung iſt.

§. 164.

Folgerung 1. Für einerley R und l iſt Π deſto größer, je größer a iſt, oder je tiefer der Punkt B unter die Horizontale AF fällt. Beym Schlitten liegt dieſer Punkt immer ſehr niedrig; beym Wagen, wegen der Räder, höher: dies zeigt, wie ſehr ſchon deshalb allein der Wagen dem Schlitten vorzuziehen iſt.

2. Was den Wagen anbetrifft, ſo zeigt ſich hier ein neuer Vortheil der hohen Räder vor den niedrigen; beſonders gilt dieſer in Bezug auf die Vorderräder, die man gewöhnlich kleiner als die Hinterräder annimmt. Dieſe Einrichtung hat gewiß manche Bequemlichkeit: aber ob der vorzüglichſte Nutzen, den ſie gewähren ſoll, nicht ſcheinbar iſt? fragt ſich doch noch. Daß das Umwenden dadurch erleichtert werde, iſt, wie Camus gezeigt hat *), ein bloßer Irrthum; im Gegentheile wird durch ungleiche Räder die Friktion am Nagel, der dadurch einen Seitendruck leidet, vermehrt, alſo das Umdrehen erſchwert.

3. Für einerley R und a iſt Π deſto geringer, je größer man l nimmt; verſchwindet aber nie ganz, ſo groß auch l ſeyn mag. Wofern alſo nicht a = 0 iſt, hat das Pferd jedesmal immer vertikalen Druck auszu-

*) Traité des forces mouvantes propoſition XXX.

ſtehen, den man durch eine gehörige Länge des Zugſeiles in ſo weit nur vermindern kann, daß er das Pferd auf die Länge der Zeit nicht ermüdet.

4. Weiß man daher wie viel Gewicht ein Pferd auf längere Dauer zu tragen im Stande iſt, ſo läßt ſich daraus berechnen, wie lang das Seil ſeyn muß, um nicht mehr Druck als dieſen zu verurſachen; man hat nemlich $l = \frac{a\sqrt{(R^2+\Pi^2)}}{\Pi}$.

Exempel. Es ſey $R = 572$ ℔, $\Pi = 96$ ℔, die Höhe der Bruſt des Pferdes = 4 Fuß, der Halbmeſſer des Vorderrades = 3 Fuß, ſo iſt $a = 1$ Fuß, $\sqrt{(R^2+\Pi^2)} = \sqrt{336400} = 580$, alſo $l = 6\frac{1}{24}$ Fuß oder 6 Fuß $\frac{1}{2}$ Zoll.

5. Bey einer Reihe von Pferden theilt ſich R in ſo viele M, als ihre Anzahl ausmacht. Sind ſie alle gleich groß, ſo ſind die Zugſeile, außer dem letzten, alle horizontal geſpannt, folglich leidet dann das letzte Pferd den Druck Π allein. Soll daher von dieſem Drucke auch das vorletzte Pferd einen Theil übernehmen, ſo muß es größer als das letzte ſeyn. Es gewährt alſo einigen Vortheil, wenn man die größern Pferde vorangehen, und das kleinſte zuletzt folgen läßt.

§. 165.

Fig. 36. Wenn mehrere Kräfte an einem Faden AEFB ſich im Gleichgewichte erhalten, ſo wird, wie bey dreyen Kräften (§. 162.), jeder Theil deſſelben zwiſchen zwey zunächſt liegenden Punkten in eine gerade Linie ausge-

ſpannt. Außerdem muß jede Kraft, wenn man ſie an ihrem Punkte z. B. E nach den Richtungen Eα und Eε der daranliegenden Theile EA und EF zerlegt, auf beyden Seiten von gleichen Kräften, die nach entgegengeſetzten Richtungen Aα und Fφ wirken, aufgehoben werden: denn ſonſt würde der Punkt E entweder nach Eα oder Eε weichen, alſo das Gleichgewicht nicht ſtatt finden. Dieſe gleichen und entgegengeſetzten Kräfte bringen zugleich die Spannungen der einzelnen Theile des Fadens hervor.

§. 166.

Fig. 37. Wenn auf den Faden AYS unendlich viel Kräfte wirken, und jede einzelne von ihnen auf einen beſondern Punkt angebracht iſt, ſo liegen zwey ſolcher Punkte Y und y unendlich nahe beyſammen, und die geſpannten geradlinigten Theile des Fadens ſind unendlich klein. Alsdann hat alſo jedes Element deſſelben eine andere Lage als das nächſtfolgende, und der ganze Faden iſt folglich in eine Curve gebogen.

§. 167.

Um ſich von der Biegſamkeit eines Fadens eine deutliche Vorſtellung zu machen, kann man ſich gedenken, er beſtehe aus lauter unendlich kleinen geradlinigten Theilen, die an ſich unbiegſam, aber durch Gelenke ſo mit einander verbunden ſind, daß ſie ſich um dieſe nach jeder Richtung drehen laſſen. Iſt alsdann ein ſolches Element zweyen gleichen und entgegengeſetzten Kräften ausgeſetzt, die an ſeinen Endpunkten ſeiner

Länge

Länge nach ziehen, ſo bleibt daſſelbe unbeweglich, und wenn dies bey allen Elementen des Fadens der Fall iſt, ſo iſt alles am Faden im Gleichgewichte.

§. 168.

Wenn die Kräfte nicht unmittelbar in den Ligamenten des Fadens angebracht ſind, ſondern auf die Elemente ſelbſt wirken, wie z. B. wenn dieſe für ſich ein Gewicht haben, ſo kann man die Elemente wegen ihrer Unbiegſamkeit als kleine Hebel anſehen, und folglich die Kräfte auf ihre Verbindungspunkte vertheilen; Alſo kommt dieſer Fall doch auf den im §. 166. angenommenen zurück.

§. 169.

Fig. 37. **Aufgabe.** Es wirken auf jedes Element Yy eines Fadens zwey Kräfte, die der Länge deſſelben ds proportional ſind; eine $= pds$ nach der Tangente YT, und eine $= qds$ nach der darauf ſenkrechten Richtung yN; man fragt 1) wie dieſe Kräfte den Faden krümmen werden, 2) wie groß die Spannung eines jeden Elementes ſey.

Aufl. 1) Da die Kraft pds längs Yy wirkt, ſo kann ſie auf jeden Punkt dieſes Elementes verlegt werden; man bringe ſie daher auf den Punkt y an.

2) Die ſenkrechte Kraft qds vereinigt ihre Wirkung im Schwerpunkte des Elementes Yy; wenn man ſie alſo auf die Punkte Y und y vertheilt, ſo kommt auf jeden: $\frac{1}{2}$ qds. Wir betrachten hier nur den auf y fallenden Theil nach yN.

3) Eben ſo kommt von der Normalkraft $(q + dq) ds$, die auf das nächſtfolgende Element yυ wirkt, auf den Punkt y der Theil $\frac{1}{2} ds (q + dq)$ nach der auf yυ ſenkrechten Richtung yn, ſo daß auf dieſen Punkt drey äußere Kräfte gerichtet ſind.

4) Es ſey nun die Spannung des Elementes Yy $= T$, die des nächſt folgenden $y\upsilon = T'$, ſo iſt $T' = T + dT$. Durch erſtere wird der Punkt y nach yY gezogen, durch letztere nach yυ.

5) Alſo wirken auf den Punkt y in Allem fünf Kräfte (3. 4.), oder, weil T und dp ſich zu $T + dp$ vereinigen, nur vier Kräfte, die an demſelben im Gleichgewichte ſeyn müſſen.

6) Es ſey der Winkel TYX, den die Tangente des Elementes Yy mit der Ordinate YX macht, $= \varphi$, ſo iſt $tyx = \varphi + d\varphi$, alſo $Tyt = d\varphi = Nyn$.

7) Von der Kraft $\frac{1}{2} ds (q + dq)$ kommt der Theil $\frac{1}{2} dqds$, als ein unendlich Kleines der zweyten Ordnung, gegen die übrigen Kräfte nicht in Betracht. Man zerlege nun das zurückbleibende $\frac{1}{2} qds$ in einen Theil nach yN, und in einen nach der Verlängerung von Ty, ſo iſt erſterer $= \frac{1}{2} qds \operatorname{Cos} d\varphi = \frac{1}{2} qds$, der ſich mit $\frac{1}{2} qds$ (2) zu qds vereinigt, letzterer $= \frac{1}{2} qds \operatorname{Sin} d\varphi = \frac{1}{2} qdsd\varphi$, der gegen die anderen Kräfte wegfällt.

8) Es bleiben daher am Punkte y nur noch die Kräfte $T + dp$ nach yT, qds nach yN, und $T + dT$ nach yυ zurück, wovon alſo letztere, wenn man ihr die entgegengeſetzte Richtung yt giebt, den andern beyden äquipollent ſeyn muß.

9) Dieſem zu Folge zerlege man $T + dT$ nach den Richtungen yT und yN, ſo kommt auf erſtere der Theil $(T + dT) \text{Cos}\, d\varphi = T + dT$, auf letztere $(T + dT) \text{Sin}\, d\varphi = (T + dT)\, d\varphi = Td\varphi$, und man hat folglich:

$$T + dT = T + dp, \text{ oder } dT = dp \text{ und}$$

$$Td\varphi = qds.$$

10) Nennt man r den Krümmungshalbmeſſer des Elements Yy, ſo iſt bekanntlich $r = \frac{ds}{d\varphi}$, alſo $T = \frac{qds}{d\varphi} = qr$, und $dp = dT = rdq + qdr$, wodurch ſowol die Natur der Curve wie auch die Spannung T beſtimmt wird.

§. 170.

Die gefundenen Gleichungen zeigen nicht bloß, wie der Faden durch gegebene Kräfte gebogen wird, ſondern ſie beſtimmen gegenſeitig auch die Kräfte, denen der Faden ausgeſetzt ſeyn muß, wenn er eine gegebene Krümmung annehmen ſoll.

Fig. 38. Wird daher ein Faden über einen cylindriſchen Körper gelegt, und an ſeinen Enden Aa, Bb ſtraff angezogen, ſo nimmt er die Form ADB vom äußern Umfange des Körpers an, und die Kraft, die ihn in dieſe Krümmung verſetzt, beſteht alsdann in dem Drucke, den der Körper auf jedes ſeiner Elemente ausübt.

Man hat alſo in dieſem Falle $pds = 0$, und es bleibt nur übrig, aus der gegebenen Form der Linie

ADB die Kraft qds zu beſtimmen, oder anzugeben, wie ſtark der Faden in jedem einzelnen Punkte Y gedrückt wird.

Dadurch erhält man dann zugleich T, die Spannung jedes Elementes; folglich auch die Spannung der Enden Aa und Bb, oder die Kräfte, die erforderlich ſind, einander an dem gebogenen Faden das Gleichgewicht zu halten.

§. 170.

1. Da $p = 0$ iſt, ſo iſt auch $dT = dp = 0$, folglich $T =$ einer beſtändigen Größe G. Der Faden leidet alſo allenthalben dieſelbe Spannung; daher müſſen die beyden Kräfte die an ſeinen Enden ziehen, um ſich im Gleichgewichte zu erhalten, gleich groß ſeyn, ohne daß ihre Richtungen Aa und Bb dabey weiter in Betracht kommen.

2. Hierdurch wird ferner $qr = G$; alſo hat man $q = \frac{G}{r}$ für die Einheit des Druckes (§. 153.) an jeder Stelle Y, für welche r den Krümmungshalbmeſſer bedeutet. Der Faden iſt folglich da einem größern Drucke ausgeſetzt, wo er ſich mehr krümmen muß.

3. Der Körper leidet in jeder Stelle Y durch den Faden eben den Druck $qds = \frac{Gds}{r} = Gd\varphi$, nur nach entgegengeſetzter Richtung Yr. Zerlegt man dieſen nach der Ordinate YX und der darauf ſenkrechten oder mit der Axe AB parallelen Richtung, ſo iſt erſtere

Kraft = Gdφ Cos rYX = Gdφ Sin φ, letztere = Gdφ Cos φ.

§. 172.

Wenn die beyden Arme AYD und DyB gleich und ähnlich ſind, ſo heben ſich von dem Drucke in Y und y die beyden Theile nach der mit AB parallelen Richtung, als gleiche und entgegengeſetzte Kräfte, auf; die andern beyden kommen auf die Punkte X und x, und da dieſe gleiche Entfernung von C haben, ſo vereinigen ſie ſich in dieſem Punkte zu 2Gdφ Sin φ.

Da dies von jedem Paare entgegengeſetzter Elemente gilt, ſo folgt, daß die Richtung des geſammten Drucks durch DC gehen muß. Man nenne dieſen Π, ſo hat man $\frac{1}{2}\Pi = \int Gd\varphi \text{ Sin } \varphi = C - G \text{ Cos } \varphi$ von A bis D genommen.

Es ſey nun φ für das erſte Element bey A = α, ſo wird: C — G Cos α = o, und weil bey D der Winkel $\varphi = 90°$ iſt, $\frac{1}{2}\Pi = C = G \text{ Cos } \alpha$, alſo $\Pi = 2G \text{ Cos } \alpha$.

Sind daher die Richtungen der Kräfte, die an A und B ziehen, mit CD parallel, ſo iſt $\alpha = o$, folglich $\Pi = 2G$ d. i. die beyden Kräfte üben dann einen Druck durch Hülfe des Faden aus, als wären ſie unmittelbar auf C angebracht.

Die Rolle.

§. 173.

Der Gebrauch der einfachen Rolle beruhet auf der Eigenſchaft des biegſamen Fadens, daß er die Wür-

kung einer Kraft, die an ſeinem einen Ende zieht, auch wenn er gekrümmt iſt, auf das andere Ende fortpflanzt (§. 171. 1.). Läßt man nemlich über die Rolle ein Seil gehen, ſo kann man dies von ihr nach Gefallen wieder ablenken, und dadurch einer Laſt, die an der einen Seite hängt, auf der andern Seite mit eben der Kraft nach jeder willkührlichen Richtung das Gleichgewicht halten.

Um den Druck zu beſtimmen, den dabey die Axe der Rolle leidet, ziehe man durch die Punkte A und B, Fig. 39. wo das Seil die Rolle verläßt, die Linie AB, und ſetze den Winkel BFA, den die Richtungen der Kraft und Laſt Aa und Bb mit einander machen, $= \vartheta$, ſo weiß man, daß CF die Sehne AB ſenkrecht halbirt; alſo iſt hier $CFB = \frac{1}{2}\vartheta = \alpha$ (§. 172.), folglich der geſuchte Druck $\Pi = 2\,G \operatorname{Cos} \frac{1}{2}\vartheta$, und der Winkel, den ſeine Richtung FC mit der Verlängerung von Aa oder Bb macht, $= \frac{1}{2}\vartheta$.

Sind die Richtungen der Kraft und Laſt einander parallel, ſo iſt $\vartheta = 0$, alſo $\Pi = 2G$, d. i. der Punkt C hat, wie beym Hebel, beyde gemeinſchaftlich zu tragen.

§. 174.

Fig. 39. Wenn an der Axe der Rolle eine Kraft P nach irgend einer Richtung CF zieht (die in die Ebene der Rolle fällt), und von zweyen andern Kräften vermittelſt eines Seiles bBAa, das um die Rolle gelegt iſt, im Gleichgewichte gehalten werden ſoll, ſo müſſen

1) die beyden Kräfte einander gleich ſeyn.

Ferner muß der Druck, den ſie auf den Punkt C durch die Spannung des Seiles hervorbringen (§. 173.), der Kraft P gleich und entgegengeſetzt ſeyn; alſo müſſen

2) ihre Richtungen verlängert ſich in einem Punkte F ſchneiden, der in die Richtung von P fällt, oder der Bogen AB, den das Seil bedeckt, muß von CF halbirt werden.

Dies vorausgeſetzt, ſey jede derſelben $= V$, der Winkel AFB, den ihre Richtungen Aa und Bb miteinander machen, $= \vartheta$, ſo hat man $P = 2V \operatorname{Cos} \frac{1}{2} \vartheta$, alſo $V = \frac{P}{2 \operatorname{Cos} \frac{1}{2} \vartheta}$.

Wenn P eine Laſt iſt, die vertikal herab zu ſinken ſtrebt, und die beyden Kräfte vertikal aufwärts ziehen, ſo iſt $\vartheta = 0$, alſo $V = \frac{1}{2} P$; folglich wird alsdann die Laſt unter die beyden Kräfte vertheilt.

Schleife (Noeud coulant).

§. 175.

Die Rolle überträgt die gleiche Spannung des Seiles von der einen Seite zur andern, man mag ſie ſo klein annehmen, als man will: alſo gilt dies auch noch, wenn man das Seil durch einen Ring oder eine Schleife gehen läßt, weil da der Streif, den das Seil umſchließt, als eine kleine Rolle angeſehen werden kann. Die Schleife oder der verſchiebbare Knoten an einem

Seile iſt alſo von dem unbeweglichen darinn ganz verſchieden, daß bey erſterem die Kraft, die an ihm zieht, die Theile des Seiles allemal gleich ſtark ſpannt; bey letzterem hingegen eine ungleiche Spannung entſtehen kann.

§. 176.

Fig. 40. **Aufgabe.** An einem Seile, das in A und B befeſtigt iſt, hängt vermittelſt eines Ringes oder einer Schleife ein Gewicht P; man ſucht 1) den Punkt G, wo der Ring eingreift, und 2) die Spannung des Seiles.

Aufl. 1) Es ſey die Länge des Seiles $= l$, die horizontale Diſtanz AD der Punkte A und B $= a$, die vertikale BD $= b$; man fälle GE ſenkrecht auf AD, und ſetze AE $= x$, EG $= u$.

2) Da GE in die Richtung des Gewichtes fällt, ſo wird dadurch der Winkel AGB, den wir ϑ nennen wollen, halbirt (§. 173.). Außerdem iſt die Spannung T der beyden Theile AG und GB gleich groß, und

$$T = \frac{P}{2 \operatorname{Cos} \frac{1}{2} \vartheta} \text{ (§. 175.)}.$$

3) Man verlängere AG, bis ſie die Vertikale BD in I ſchneidet, ſo iſt AIB $=$ AGE, EGB $=$ GBI, alſo ſind die Winkel bey B und I einander gleich, folglich GI $=$ GB, und AI $= l$.

4) Im Dreyecke ADI iſt Sin AIB $= \frac{AD}{AI}$, oder

$\operatorname{Sin} \frac{1}{2} \vartheta = \frac{a}{l}$, alſo $\operatorname{Cos} \frac{1}{2} \vartheta = \frac{\sqrt{(l^2 - a^2)}}{l}$, und daher $T = \frac{\frac{1}{2} Pl}{\sqrt{(l^2 - a^2)}}$.

5) Ferner $AG = GO = \frac{AE}{\operatorname{Sin} AGE} = \frac{xl}{a}$; $BO = \frac{BD}{\operatorname{Cos} DBO} = \frac{bl}{\sqrt{(l^2 - a^2)}}$; alſo $AG + GO + OB = \frac{2xl}{a} + \frac{bl}{\sqrt{(l^2 - a^2)}} = l$, $x = \frac{1}{2} a - \frac{\frac{1}{2} ba}{\sqrt{(l^2 - a^2)}}$ und $u = x \operatorname{Cot} \frac{1}{2} \vartheta = \frac{1}{2} \sqrt{(l^2 - a^2)} - \frac{1}{2} b$.

§. 177.

Die Spannung T wächſt ins Unendliche, wenn ſich a der Grenze l nähert. Man ſieht hieraus, daß eine geringe Laſt das Seil mit erſtaunender Kraft zu ſpannen vermag, wofern es ſchon an ſich durch die Befeſtigung an den Punkten A und B beynahe in eine gerade Linie angezogen iſt.

Daher kann man den hartnäckigſten Widerſtand vermittelſt eines Seiles oder einer Kette zum Weichen bringen, ſo bald man nur zwey feſte Punkte A und B in der Nähe hat; wenn man nemlich die Kette, nachdem man ſie an dem Widerſtande befeſtigt hat, bey A über eine Rolle gehen läßt, und ſie dann, ſtraff angezogen, an den Punkt B heftet, ſo bedarf es nur in den meiſten Fällen nur eines geringen Gewichtes, das man der Kette innerhalb A und B anhängt, um die verlangte Wirkung hervorzubringen.

Rollenzug.

§. 178.

Eine Verbindung von Rollen vermittelſt mehrerer Seile, die dadurch die aufzuhebende Laſt unter ſich theilen, heißt ein **Rollenzug**.

Man kann ihn auf zweyerley Art einrichten; beym Rollenzuge der erſten Art (Fig. 41.) gehen die Seile unterwärts um die Rollen, und ſind oberhalb an Punkten A, B u. ſ. f. befeſtigt; bey dem der zweyten Art (Fig. 42.) läßt man ſie über die Rollen gehen, und befeſtigt ſie mit dem einen Ende gemeinſchaftlich an der Laſt, indem das andere Ende allemal die tiefere Rolle trägt.

§. 179.

Fig. 41. **Aufgabe.** Der Rollenzug der erſten Art enthalte außer der Handrolle C, die bloß dazu dient, das Seil herabzuleiten, n Tragrollen; man fragt, wie viel Kraft nöthig iſt, der in G hängenden Laſt P das Gleichgewicht zu halten.

Aufl. 1) Da n Rollen vorhanden ſind, ſo giebt es für die Seile n Aufhängepunkte. Die Spannung des Seiles Aa ſey $= t^{(1)}$, die von Ab $= t^{(2)}$ u. ſ. f., endlich die des Seiles, das am n Punkte aufgehängt iſt, $= t^{(n)}$.

2) Der Theil o'a' des Seiles Aaa'o' iſt mit dem andern Theile Aa gleich ſtark geſpannt (§. 175.), alſo iſt ſeine Spannung $= t^{(1)}$. Eben ſo iſt die vom fortgeſetzten Seile Bb $= t^{(2)}$, und die vom letzten Stücke,

das über die Zugrolle c geht, $= t^{(n)}$. Dieſe letzte Spannung wird nun durch die Kraft, die wir V nennen wollen, auf der andern Seite in T hervorgebracht, folglich hat man $V = t^{(n)}$.

3) Weil die Punkte A und o′ die ganze Laſt P tragen, ſo iſt $t^{(1)} = \frac{1}{2} P$ (§. 175.), und aus gleichem Grunde $t^{(2)} = \frac{1}{2} t^{(1)}$, $t^{(3)} = \frac{1}{2} t^{(2)}$ u. ſ. f., alſo $t^{(2)} = \frac{1}{4} P$, $t^{(3)} = \frac{1}{8} P$, und endlich $t^{(n)} = \frac{1}{2^n} . P$, folglich auch $V = \frac{1}{2^n} . P$.

§. 180.

Um zu ſehen, wie viel Kraft auf die Gewichte der Rollen verwandt werden muß, ſetze man das Gewicht der unterſten $= \pi^{(1)}$, der nächſtfolgenden $= \pi^{(2)}$ u. ſ. f. ſo bekommt man:

$t^{(1)} = \frac{1}{2} [P + \pi^{(1)}]$, $t^{(2)} = \frac{1}{2} [t^{(1)} + \pi^{(2)}] = \frac{1}{4} P + \frac{1}{4} \pi^{(1)} + \frac{1}{2} \pi^{(2)}$, und ſo zuletzt $V = t^{(n)} = \frac{1}{2^n} . P + \frac{1}{2^n} \pi^{(1)} + \frac{1}{2^{n-1}} \pi^{(2)} \ldots + \frac{1}{2} \pi^{(n)}$.

Sind die Rollen alle[illegible] gleich ſchwer, ſo wird, wenn man das Gewicht jeder $= \pi$ ſetzt:

$$V = \frac{1}{2^n} P + \frac{1}{2} \pi \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{2^n} P + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \pi.$$

Die Kraft bekommt alſo von den Gewichten der Rollen, es mögen ihrer noch ſo viel ſeyn, doch nie

mehr zu tragen, als das Gewicht einer einzigen ausmacht.

Exempel. Es ſey $n = 4$, $P = 2400$ ℔, $\pi = 20$ ℔, ſo iſt $\frac{1}{2^n}(P - \pi) = \frac{2380}{16}$ ℔ $= 148\frac{3}{4}$ ℔; dazu π addirt, giebt $V = 168\frac{3}{4}$ ℔.

§. 181.

Aufgabe. Das Verhältniß der Kraft zur Laſt beym Rollenzuge der zweyten Art zu finden, wenn daran n Rollen befindlich ſind.

Fig. 42. Aufl. 1) Es ſey, wie vorhin die Laſt $= P$, die Kraft $= V$, die Spannung des Seiles an der unterſten Rolle $o = t^{(1)}$, an der zweyten $o' = t^{(2)}$; an der oberſten, oder nten Rolle $= t^{(n)}$, ſo iſt $V = t^{(1)}$.

1) Wegen der Spannung des unterſten Seiles $t^{(1)}$ trägt der Punkt o das Gewicht $2t^{(1)}$, und da dies die Spannung des nächſten Seiles $t^{(2)}$ hervorbringt, ſo iſt $t^{(2)} = 2\,t^{(1)}$.

3) Eben ſo trägt der Punkt o′ das Gewicht $2t^{(2)} = 4t^{(1)}$, alſo iſt die Spannung des folgenden Seiles $t^{(3)} = 4t^{(1)}$, und ſo die des oberſten $t^{(n)} = 2^{n-1} . t^{(1)} = 2^{n-1} . V$.

4) Dieſe Spannkräfte ziehen nun an dem Hebel cba nach paralleler Richtung, alſo muß die Laſt P, die ihnen das Gleichgewicht hält, ihnen zuſammengenommen gleich ſeyn. Man hat alſo

$$t^{(1)} + t^{(2)} + \ldots + t^{(n)} = P,$$

und wenn man die für $t^{(1)}$, $t^{(2)} \ldots$ gefundenen Werthe V, 2V u. ſ. f. ſubſtituirt:

$$V(1+2+4\ldots+2^{n-1})=P,$$

oder $(2^n-1)V=P$, folglich $V=\frac{P}{2^n-1}$.

Anders.

Wegen der Spannung des oberſten Seiles, $t^{(n)} = 2^{n-1}.V$, trägt der Aufhängepunkt A ein Gewicht $= 2t^{(n)} = 2^n.V$. Dies muß ſo viel betragen, als Kraft und Laſt zuſammengenommen; alſo iſt $2^nV = P+V$, folglich $(2^n-1)V=P$, wie vorhin.

§. 182.

Sollen hierbey die Gewichte der Rollen in Betracht gezogen werden, ſo nenne man dieſe von der unterſten an, wie vorhin, $\pi^{(1)}, \pi^{(2)} \ldots \pi^{(n)}$. Alsdann trägt

der Punkt o ein Gewicht $p^{(1)} = 2\,t^{(1)} + \pi^{(1)}$

o′ ein Gewicht $p^{(2)} = 2\,t^{(2)} + \pi^{(2)}$ u. ſ. f.

und der Anhängepunkt A ein Gewicht $p^{(n)} = 2t^{(n)} + \pi^{(n)}$.

Da nun jedes dieſer Gewichte das nächſte Seil ſpannt, ſo iſt $p^{(1)} = t^{(2)}$, $p^{(2)} = t^{(3)}$, alſo

$$t^{(2)} = 2t^{(1)} + \pi^{(1)}$$

$$t^{(3)} = 4t^{(1)} + \pi^{(1)} + \pi^{(2)}. \text{ u. ſ. f.,}$$

und endlich $t^{(n)} = 2^{n-1}\,t^{(1)} + 2^{n-2}\,\pi^{(1)} + 2^{n-3}\,\pi^{(2)} \ldots + \pi^{(n-1)}$.

Daher $p^{(n)} = 2^n t^{(1)} + 2^{n-1}\,\pi^{(1)} + 2^{n-2}\,\pi^{(2)} \ldots + \pi^{(n)}$. Aber $t^{(1)} = V$, und $p^{(n)} = P + V + \pi^{(1)} + \pi^{(2)} \ldots + \pi^{(n)}$, folglich erhält man

$$(2^n - 1)V = P + \pi^{(1)} + \pi^{(2)} \ldots + \pi^{(n)}$$

$$-2^{n-1}\left[\pi^{(1)} + \tfrac{1}{2}\pi^{(2)} + \tfrac{1}{4}\pi^{(3)} \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\pi^{(n)}\right]$$

Für Rollen von einerley Gewichte π wird:

$$(2^n - 1)V = P + n\pi - (2^n - 1)\pi, \text{ oder}$$

$$V = \frac{P}{2^n - 1} - \pi + \frac{n\pi}{2^n - 1}.$$

Da $\frac{n}{2^n - 1}$ jederzeit < 1 iſt, ſo ſieht man offenbar, daß hier das Gewicht der Rollen der Kraft nicht nachtheilig, ſondern vielmehr vortheilhaft iſt. Für ein großes n iſt dieſe Erleichterung beynahe $= \pi$, dem Gewichte einer der Rollen.

Exempel. Es ſey, wie im §. 181, $n = 4$, $P = 2400$ ℔, $\pi = 20$ ℔, ſo wird $\frac{P + n\pi}{2^n - 1} = \frac{2480 \text{ ℔}}{15} = 165\frac{1}{3}$ ℔, davon π abgezogen, bleibt $V = 145\frac{1}{3}$ ℔.

Anmerk. Die Rollenzüge beyder Art verſtärken alſo die Würkung der Kraft ungemein; haben aber dabey das Unvollkommene, daß ſie viel Raum einnehmen, und nur ein ſehr langſames Fortrücken der Laſt geſtatten. Sie ſind daher nur in ſolchen Fällen mit Vortheil anzuwenden, wo ſehr große Laſten zu einer geringen Höhe erhoben werden ſollen, wie z. B. auf Schiffen: Laſten damit aus dem Raume über Bord zu heben, oder von außen ins Schiff hineinzubringen. Bey zwey oder drey Rollen iſt der Rollenzug der erſten Art vorzuziehen, bey mehreren Rollen, der der zweyten Art, weil alsdann das Gewicht der Rollen mehr in Betracht kommt.

Flaſchenzug.

§. 183.

Wenn mehrere Rollen in ein Gehäuſe eingeſchloſſen ſind, ſo daß ihre Axen nur gemeinſchaftlich gehoben werden können, ſo nennt man eine ſolche Zuſammenſetzung eine **Flaſche**. Dabey kann entweder jede Rolle ihre beſondere Axe haben, in welchem Falle dann die Axen a, b, c (Fig. 43.) längs dem Gehäuſe vertheilt ſind; oder die Rollen können (Fig. 44.) an einer gemeinſchaftlichen Axe neben einander liegen. Letztere Art von Flaſchen iſt wegen des kleinern Raumes, den ſie einnimmt, gewöhnlicher.

Werden zwey ſolcher Flaſchen durch ein Seil verbunden, das ſich um beyde Rollen ſchlägt, und zuletzt der Kraft zugeführt wird, ſo bilden dieſe einen **Flaſchenzug**. Die obere Flaſche wird dann an einen feſten Punkt A geheftet, und an die untere die zu hebende Laſt gehängt. Beyde enthalten wegen des gemeinſchaftlichen Seiles gleich viele Rollen.

§. 184.

Aufgabe. Die Kraft zu beſtimmen, die an einem Flaſchenzuge, der in jeder Flaſche n Rollen enthält, mit einer gegebenen Laſt P im Gleichgewichte iſt.

Fig. 43. Aufl. 1) Es ſey die geſuchte Kraft = V, ſo wird das Seil allenthalben mit dieſer Kraft geſpannt, es mag um ſo viele Rollen gehen, als man will.

2) Daher leidet jede der Axen α, β, γ u. ſ. w. in

der untern Flaſche einen Druck = 2V vertikal aufwärts, und da ihrer n ſind, ſo wird die ganze untere Flaſche von der Kraft 2nV aufwärts gezogen.

3) Mit dieſer Kraft muß nun die Laſt P im Gleichgewichte ſeyn, alſo hat man P = 2nV, oder $V = \frac{P}{2n}$.

Anders.

Wegen der gleichförmigen Spannung des Seiles leidet jede der Axen a, b, c u. ſ. w. in der obern Flaſche einen vertikal herabgehenden Druck = 2V, und der Haken bey O, an dem das Ende des Seiles befeſtigt iſt, nach eben der Richtung den einfachen Druck V; alſo wird die ganze obere Flaſche mit der Kraft 2nV + V = (2n + 1) V niedergezogen, folglich auch der Punkt A, an dem ſie aufgehängt iſt.

Was dieſer nun zu tragen hat, beſteht überhaupt in der Laſt P und der Kraft V, alſo hat man P + V = (2n + 1) V oder: P = 2nV, wie vorhin.

§. 185.

Fig. 44. Eben ſo verhält ſich die Sache bey einem Flaſchenzuge, wo die Rollen in den Flaſchen eine gemeinſchaftliche Axe haben. Das Seil wird allenthalben mit der Kraft V geſpannt, die in F an demſelben zieht, und der Laſt P das Gleichgewicht hält; alſo leidet der Mittelpunkt einer jeden in der untern Flaſche befindlichen Rolle den Druck 2V nach vertikal aufwärts gehender Richtung. Daher wird die Axe der untern Flaſche in n Punkten von gleichen Kräften heraufgezogen, denen

nen in ihrem gemeinſchaftlichen Schwerpunkte die Kraft 2nV äquipollent iſt. Dieſe Kraft wirkt nun unmittelbar der Laſt entgegen, folglich muß $P = 2nV$ ſeyn.

§. 186.

Das Gewicht der Flaſchen läßt ſich hierbey folgendermaßen in Rechnung bringen:

Durch die gleichförmige Spannung des Seiles entſteht, wie wir geſehen haben, im gemeinſchaftlichen Schwerpunkte der untern Rollen eine Kraft $= 2nV$ vertikal aufwärts; durch ihr Gewicht aber in eben dem Punkte eine entgegengeſetzte Kraft, die folglich mit der Laſt P in Verbindung tritt. Es kommt daher bloß das Gewicht der untern Flaſche in Betracht; ſetzt man dies $= \pi$, ſo wird $2nV = P + \pi$, alſo $V = \frac{P + \pi}{2n}$.

§. 187.

Der Flaſchenzug wird gewöhnlich gebraucht, große Laſten damit nach vertikaler Richtung auf eine gewiſſe Höhe zu bringen; man kann ihn aber auch da anwenden, wo nach jeder andern Richtung eine Laſt fortzuziehen, oder ein Widerſtand zu überwinden iſt. So z. B. bedienen ſich die Schiffsbauer deſſelben, um ein Schiff am ſchrägen Ufer in die Höhe zu ſchaffen, und ſetzen ihn, zur Verſtärkung der Kraft, mit einer Winde in Verbindung, wodurch die ſogenannte Schiffswinde entſteht, die Herr Büſch in ſeiner Mechanik umſtändlich beſchrieben hat.

§. 188.

Fig. 45. Ein Beyſpiel, wo der Flaſchenzug ſelbſt nach horizontaler Richtung mit Nutzen angebracht werden kann, iſt folgendes:

Es ſey der Balken DG, der eine geſenkte Lage bekommen hat, wieder in vertikale Stellung zu bringen. Man hänge oben in G durch Hülfe ſtarker eiſerner Ringe, die man daſelbſt um den Balken legt, einen Flaſchenzug ein, und um dieſen an einen andern Punkt A befeſtigen zu können, der nicht ausweicht, ſtütze man einen Balken CE in ſchräger Richtung gegen eine feſte Unterlage C, laſſe über dieſen von A aus eine Kette AEB gehen, und befeſtige dieſelbe, nachdem ſie ſtraff gezogen iſt, irgendwo am Boden im B. Man kann alsdann vermittelſt eines Haſpels das Seil des Flaſchenzuges nach vertikaler Richtung oT anziehen, und ſo durch eine mäßige Kraft eine ſehr gewaltſame Wirkung auf den Punkt G hervorbringen.

Anmerk. Die ſinnreiche Einrichtung, wodurch man den feſten Punkt A erhält, giebt Herr Büſch in ſeiner Mechanik an. Es wird nicht unnütz ſeyn, darüber noch einige Bemerkungen beyzufügen.

1. Da die beyden Theile der Kette AE und EB gleich ſtark geſpannt ſind, ſo muß die Richtung des Balken CE den Winkel AEB halbiren, damit der mittlere Druck, den die Kette auf ihn ausübt, längs EC geſchehe. Iſt alſo die Länge von CE gegeben, ſo beſtimmt dies den Punkt B, wo die Kette befeſtigt werden muß. Es ſey nemlich CE = 1, die vertikale Höhe

des Punktes G $= a$, ſo iſt $\text{Sin AEC} = \frac{a}{l} = \text{Sin ECB}$; alſo, wenn $CB = x$ geſetzt wird: $l : x = \text{Sin } 2AEC : \text{Sin } AEC = 2 \text{ Cos AEC} : 1$, folglich $x = \frac{l}{2 \text{ Cos AEC}} = \frac{l^2}{2\sqrt{(l^2 - a^2)}}$.

2. Wenn man die Kette an derſelben Unterlage DCB befeſtigt, gegen die der Balken EC geſtützt iſt, ſo wirken auf die Punkte C und B derſelben zwey entgegengeſetzte Kräfte. Man ſetze die Spannung der Kette $= T$, den Druck nach EC $= \Pi$, den Winkel AEC $= \gamma$, ſo iſt am einarmigen Hebel DCB das Moment in C $= DC \cdot \Pi \text{ Sin } \gamma$, und in B $= DB \cdot T \text{ Sin CBE} = DB \cdot T \text{ Sin } 2\gamma$. Nun hat man $\Pi \text{ Sin } \gamma = T \text{ Sin } 2\gamma$ (§. 55.); daher iſt letzteres Moment um $CB \cdot T \text{ Sin } 2\gamma$ größer als erſteres, folglich muß die Unterlage entweder für ſich das Gewicht $2T \text{ Sin } 2\gamma \cdot \frac{CB}{DB}$ haben, oder an dem Boden befeſtigt werden, wofern ſie nicht von der Kette in die Höhe gezogen werden ſoll.

Krümmung eines Fadens durch ſein eigenes Gewicht.

§. 189.

Fig. 46. **Aufgabe.** Ein biegſames Seil von gleichförmiger Dicke und gegebener Länge wird an den feſten Punkten A und B, die in einerley Horizontale liegen,

aufgehängt; man fragt, was für eine Geſtalt daſſelbe, vermöge des bloßen Gewichtes ſeiner Theile, annehmen werde, und welche Spannung dadurch in jedem ſeiner Punkte Y entſtehe.

Aufl. 1) Es ſey AYDB die geſuchte Curve; man fälle aus einem Punkte Y derſelben ein Perpendikel YX auf AB, und ſetze $AX = x'$, $XY = y'$, den Bogen $AY = s$, und den Winkel tYX, den die Tangente Yt mit der Ordinate XY macht, $= \varphi$. Außerdem ſey die halbe Länge des Seiles $= a$, die Diſtanz $AB = 2f$, und das Gewicht des Seiles für die Einheit der Länge $= \varkappa$.

2) Alsdann iſt das Gewicht des Elementes Yy $= \varkappa ds$, das nach XY wirkt; man zerlege es in eine Kraft nach der Tangente Yy und in eine nach der Normale Yn, ſo iſt erſtere $= \varkappa ds \operatorname{Cos} \varphi$, letztere $= \varkappa ds \operatorname{Sin} \varphi$.

3) Vergleicht man dieſe Werthe mit den in §. 169. allgemein angenommenen, ſo wird $p = - \varkappa \operatorname{Cos} \varphi$, $q = \varkappa \operatorname{Sin} \varphi$, und die Gleichungen daſelbſt bekommen hier folgende Geſtalt:

$$- \varkappa ds \operatorname{Cos} \varphi = dT, \; \varkappa ds \operatorname{Sin} \varphi = Td\varphi.$$

4) Nimmt man ds als unveränderlich an, ſo iſt $d^2 s = o$; man erhält alſo, wenn man die zweyte Gleichung differenziirt:

$\varkappa ds \operatorname{Cos} \varphi d\varphi = Td^2\varphi + dTd\varphi$; und darin die Werthe für T und dT aus 3 ſubſtituirt, giebt:

$$\varkappa ds \operatorname{Cos} \varphi d\varphi = \frac{\varkappa ds \operatorname{Sin} \varphi d^2\varphi}{d\varphi} - \varkappa ds \operatorname{Cos} \varphi d\varphi$$

oder $2 \operatorname{Cos} \varphi d\varphi^2 - \operatorname{Sin} \varphi d^2\varphi = 0$.

wovon das Integral $\frac{d\varphi}{\operatorname{Sin} \varphi^2} = Bds$ iſt.

5) Hiervon nochmal das Integral genommen, giebt:

$$-\operatorname{Cot} \varphi = A + Bs$$

6) Da alles bey B ſich ſo verhalten muß, wie bey A, ſo müſſen an beyden Punkten die Elemente gegen die Vertikale einerley Lage haben; ſetzt man alſo für $s = 0$, $\varphi = \eta$, ſo iſt für $s = 2a$, $\varphi = 180^\circ - \eta$; daher $A = -\operatorname{Cot} \eta$, $A + 2Ba = +\operatorname{Cot} \eta$, alſo $Ba = \operatorname{Cot} \eta$, und folglich: $\operatorname{Cot} \varphi = \operatorname{Cot} \eta \left(1 - \frac{s}{a}\right)$.

7) Im Dreyecke Yyo iſt $Yo = Yy \operatorname{Sin} \varphi$, $yo = Yy \operatorname{Cos} \varphi$, alſo $\frac{dy'}{dx'} = \frac{yo}{Yo} = \operatorname{Cot} \varphi$. Daher hat man auch $\frac{dy'}{dx'} = \operatorname{Cot} \eta \left(1 - \frac{s}{a}\right)$.

8) Für $s = a$ iſt $\frac{dy'}{dx'} = 0$, alſo daſelbſt y' ein Maximum; ferner $\operatorname{Cot} \varphi = 0$, oder $\varphi = 90^\circ$. Die Mitte D des Seiles ſenkt ſich folglich am tiefſten, und das Element bey D hat eine horizontale Lage.

9) Da man die nemliche Gleichung erhalten muß, wenn man B zum Anfangspunkte der Abſciſſen annimmt, ſo folgt, daß die Abſciſſe, welche dem Punkte D entſpricht, dieſelbe ſey, ſie mag von A oder B aus genommen werden; alſo liegt der Punkt C, der zu D

gehört, in der Mitte zwiſchen A und B, oder die durch D gezogene Vertikale halbirt AB.

10) Man nehme nun DC zur Abſciſſenlinie an, und ſetze $DI = x$, $IY = y$, $DC = L$, ſo hat man $f - x' = y$, $b - y' = x$, alſo $dx' = -dy$, $dy' = -dx$. Verſteht man außerdem unter s jetzt die Länge des Bogens DY, ſo muß man ſtatt des vorhin gebrauchten s, $a - s$ ſetzen; dadurch wird:

$$\frac{dx}{dy} = \text{Cot}\,\eta\left[1 - \left(\frac{a-s}{a}\right)\right] = \frac{s\,\text{Cot}\,\eta}{a} \text{ oder}$$

$$adx = sdy\,.\,\text{Cot}\,\eta.$$

11) Alſo $a^2dx^2 = s^2dy^2\,.\,\text{Cot}\,\eta^2$,
$(a^2 + s^2\,\text{Cot}\,\eta^2)\,dx^2 = s^2\,(dx^2 + dy^2)\,\text{Cot}\,\eta^2 = s^2ds^2\,.\,\text{Cot}\,\eta^2$, folglich

$$dx = \frac{sds\,.\,\text{Cot}\,\eta}{\sqrt{(a^2 + s^2\,\text{Cot}\,\eta^2)}} = \frac{sds}{\sqrt{(a^2\,\text{tang}\,\eta^2 + s^2)}}$$

welches integrirt: $x = C + \sqrt{(a^2\,\text{tang}\,\eta^2 + s^2)}$ giebt.

12) Für $s = 0$ iſt auch $x = 0$, alſo $C = -a\,\text{tang}\,\eta$; daher wird

$$x = \sqrt{(a^2\,\text{tang}\,\eta + s^2)} - a\,\text{tang}\,\eta,$$ und daraus gegenſeitig $s = \sqrt{(x^2 + 2ax\,\text{tang}\,\eta)}$.

13) Um T zu beſtimmen, ſetze man in der Gleichung $\varkappa ds\,\text{Sin}\,\varphi = Td\varphi$ (3) ſtatt ds ſeinen Werth $\frac{d\varphi}{B\,\text{Sin}\,\varphi^2}$ (4) $= \frac{a\,\text{tang}\,\eta d\varphi}{\text{Sin}\,\varphi^2}$ (6) ſo erhält man $T = \frac{\varkappa a\,\text{tang}\,\eta}{\text{Sin}\,\varphi}$. Die Spannung iſt alſo nach der Lage des Elements verſchieden, und verhält ſich verkehrt wie der Sinus des Neigungswinkels gegen die Vertikale.

Anmerk. Der Name Kettenlinie, den man dieſer Curve allgemein beylegt, rührt unſtreitig daher, daß man anfangs, der deutlichern Vorſtellung wegen, die einzelnen Glieder einer Kette betrachtete, und hiervon zu der ſtetigen Krümmung eines biegſamen Fadens überging. Vor Galliläus findet man keine Spur einer Bekanntſchaft mit dieſer Linie; er ſelbſt verwechſelt ſie noch mit der Parabel. *a*) Erſt 1690 wurde die Frage über ihre Geſtalt von Jacob Bernoulli *b*) von neuem aufgeworfen, und durch Huyghens Leibnitz und Joh. Bernoulli *c*) beantwortet. Durch Eulers allgemeinere Theorie der Spannung *d*) iſt zur Auflöſung dieſes Problems ein ſehr natürlicher und leichter Weg eröfnet, der andere Hülfsmittel, z. B. die Vorausſetzung, daß jedes Element des Fadens ſo tief als möglich herabſinkt, *e*) unnöthig macht.

§. 190.

1. Setzt man $a \tan \eta = g$, ſo wird $s^2 = x^2 + 2gx$; alſo für $s = a$, $a^2 = b^2 + 2gb$ und $a^2 + g^2 = (b + g)^2$.

2. Ferner hat man $g dx = s dy$ (10), und darin für dx ſeinen Werth $\frac{s ds}{\sqrt{(g^2 + s^2)}}$ (11) geſetzt, giebt $dy = \frac{g ds}{\sqrt{(g^2 + s^2)}}$, wovon das Integral $y = g \log. nat. \left[\frac{a + \sqrt{(g^2 + s^2)}}{g}\right]$ iſt.

3. Für $s = a$ erhält man aus dieſem: $f = g \log$

a) Mechanica, Dialog. II. pag. 131.

b) Acta eruditorum 1690 pap. 213.

c) Ebendaſelbſt 1691 pag 275.

d) Novi Comment. Petropol. Tom. XV. und Tom. XX.

e) Friſi Opera Math. Vol. I. Lib. I. pag. 125.

$$[\frac{a+\sqrt{(a^2+g^2)}}{g}] = g \log \frac{[a+b+g]}{g},$$ und

wenn man darin für g ſeinen Werth $\frac{a^2-b^2}{2b}$ (1) ſetzt:

$$f = \frac{a^2-b^2}{2b} \cdot \log\left(\frac{a+b}{a-b}\right).$$

4. Alſo $\frac{bf}{a^2-b^2} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{a+b}{a-b}\right) = \frac{b}{a} + \frac{b^3}{3a^3}$
$+ \frac{b^5}{5a^5} +$ u. ſ. w.

$$f = a - \frac{2}{1 \cdot 3}\frac{b^2}{a} - \frac{2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{b^4}{a^3} - \frac{2}{5 \cdot 7}\frac{b^6}{a^5}$$ und

$$\frac{a-f}{2a} = \frac{1}{1 \cdot 3}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{1}{3 \cdot 5}\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \frac{1}{5 \cdot 7}\left(\frac{b}{a}\right)^6 +$$
u. ſ. w.

5) Um gegenſeitig b durch a und f auszudrücken, muß dieſe Reihe umgekehrt werden, welches ſo geſchieht:

Man bezeichne $\frac{a-f}{2a}$ durch d, und ſetze:

$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \alpha d + \beta d^2 + \gamma d^3 + \delta d^4 +$ u. ſ. w., ſo wird

$$\left(\frac{b}{a}\right)^4 = \alpha^2 d^2 + 2\alpha\beta d^3 + (2\alpha\gamma + \beta^2) d^4 + \ldots$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^6 = \alpha^3 d^3 + 3\alpha^2\beta d^4 + \ldots$$

Dieſe Werthe für $\left(\frac{b}{a}\right)^2$, $\left(\frac{b}{a}\right)^4$ u. ſ. f. in erſtere Reihe (4) ſubſtituirt, geben:

$$0 = (\tfrac{1}{3}\alpha - 1)d + \left.\begin{matrix} \tfrac{1}{3}\beta \\ + \tfrac{1}{15}\alpha^2 \end{matrix}\right\} d^2 + \left.\begin{matrix} \tfrac{1}{3}\gamma \\ + \tfrac{2}{15}\alpha\beta \\ + \tfrac{1}{35}\alpha^3 \end{matrix}\right\} d^3 + \left.\begin{matrix} \tfrac{1}{3}\delta \\ + \tfrac{2}{15}\alpha\gamma \\ + \tfrac{1}{15}\beta^2 \\ + \tfrac{3}{35}\alpha^2\beta \\ + \tfrac{1}{63}\alpha^4 \end{matrix}\right\} d^4 + \text{u. ſ. f.}$$

alſo hat man $\frac{1}{3}\alpha - 1 = 0$, $\frac{1}{3}\beta + \frac{1}{15}\alpha^2 = 0$, $\frac{1}{3}\gamma + \frac{2}{15}\alpha\beta + \frac{1}{35}\alpha^3 = 0$ u. ſ. w., folglich $\alpha = 3$, $\beta = -\frac{9}{5}$, $\gamma = -\frac{27}{175}$, $\delta = -\frac{27}{175}$; daher wird:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 3d - \frac{9}{5}d^2 - \frac{27}{175}d^3 - \frac{27}{175}d^4 - \text{u. ſ. w.}$$

Exempel. Es ſey die Länge des Seiles doppelt ſo groß, als die Entfernung der Punkte A und B, alſo $f = \frac{1}{2}a$, ſo hat man $d = \frac{1}{4}$, $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 0,6345$, $b = 0,7965\,a = 1,593\,f$, für die Tiefe, zu der die Mitte D unter die Horizontale AB ſinkt; ferner $g = \frac{a^2 - b^2}{2b} = 0,2294\,a$, $\tang \eta = 0,2294$, $\eta = 12°55'$.

6. Wenn man die Gleichung $gdx = sdy$ (2) differenziirt, und dabey dx als beſtändig annimmt, ſo erhält man:

$$0 = sd^2y + dyds, \text{ oder } d^2y = -\frac{dyds}{s}.$$

Man nenne r den Krümmungshalbmeſſer, ſo iſt bekanntlich $r = -\frac{ds^3}{d^2y \cdot dx}$; darin der Werth für d^2y geſetzt, giebt $r = \frac{s^2ds^2}{sdydx} = \frac{s^2ds^2}{gdx^2} = \frac{g^2 + s^2}{g}$ (2)

§. 191.

1. Wir hatten vorhin $T = \frac{\varkappa a \tang \eta}{\operatorname{Sin} \varphi}$ (§. 198. 13.) $= \frac{g\varkappa}{\operatorname{Sin} \varphi}$; ſetzt man darin für $\operatorname{Sin} \varphi$ ſeinen Werth (ebendaſ. 7.) $\frac{Yo}{Yy} = \frac{dy}{ds} = \frac{g}{\sqrt{(g^2+s^2)}}$, ſo erhält man $T = \varkappa \sqrt{(g^2+s^2)} = \varkappa \sqrt{gr}$. Die Spannung verhält ſich alſo wie die Quadratwurzel aus dem Krümmungshalbmeſſer.

2. Im Punkte D, oder für $s = o$ iſt ſie $= \varkappa g$, alſo daſelbſt am kleinſten. Ihren größten Werth erreicht ſie für $s = a$, oder in den Punkten A und B.

3. Für dieſe Punkte bekommt man auch, wenn man $\varphi = \eta$ ſetzt: $T = \frac{\varkappa a}{\operatorname{Cos} \eta}$; zerlegt man dieſe Kraft in eine vertikale und in eine horizontale, ſo wird erſtere $= T \operatorname{Cos} \eta = \varkappa a$, letztere $= T \operatorname{Sin} \eta = \varkappa a \tang \eta = \varkappa g$. Die Punkte A und B tragen alſo jeder das halbe Gewicht des Fadens, und leiden außerdem einen horizontalen Druck, der der Spannung des unteren horizontalen Elementes in D gleich iſt (2).

4. Es iſt klar, daß das Gleichgewicht des Fadens nicht aufgehoben wird, wenn man ihn in einem ſeiner Punkte y befeſtigt: denn alsdann ſetzt dieſer Punkt dem tieferen Theile yD weder einen größern noch geringeren Widerſtand entgegen, als vorhin, da er durch die Spannung des Elements Yz zurückgehalten wurde. Wenn daher die feſten Punkte A und B nicht in einer

Horizontale liegen, ſondern A irgend wo in y fällt, ſo bildet ſich nur ein Theil yDB der Kettenlinie, und man findet daraus leicht, welchen Druck der Faden auf den Punkt A ausübt.

Sechstes Kapitel.

Vom Räderwerke.

---

§. 192.

Fig. 47. **Aufgabe.** Zwey Rollen von verſchiedenen Halbmeſſern AO, BO ſind in einer Ebene ſo mit einander verbunden, daß ſie ſich nicht anders als gemeinſchaftlich um den Mittelpunkt O drehen können. An beyden ſind in A und B Seile befeſtigt, vermittelſt welcher zwey Kräfte P und M nach GE und IF ziehen, und die Rollen nach verſchiedenen Seiten zu drehen ſtreben; man ſucht das Verhältniß dieſer Kräfte, wenn ſie einander das Gleichgewicht halten ſollen.

Aufl. 1) Das Seil AGE leidet allenthalben bis an den Endpunkt A einerley Spannung = P (§. 173.), und zieht alſo dieſen Punkt mit der Kraft P nach einer auf AO ſenkrechten Richtung.

2) Eben ſo wird durch die Spannug des andern Seiles BIF ein Zug = M im Punkte B nach einer auf OB ſenkrechten Richtung hervorgebracht.

3) Die beyden Punkte A und B haben wegen

der Verbindung der Rollen eine unveränderliche Winkeldiſtanz AOB; alſo wirken die Kräfte P und M an einem Winkelhebel, und weil ihre Richtungen auf die Schenkel deſſelben ſenkrecht ſind, ſo hat man:

$$P : M = BO : AO.$$

Die beyden Kräfte müſſen ſich alſo verkehrt verhalten, wie die Halbmeſſer der Rollen.

§. 193.

Dieſelbe Bedingung des Gleichgewichtes findet auch noch ſtatt, wenn die beyden Rollen nicht in einer Ebene liegen, ſondern bloß eine gemeinſchaftliche Axe haben, auf der ſie ſenkrecht befeſtigt ſind; alsdann ſind nemlich AO und BO zwey auf dieſer Axe ſenkrechte Hebelarme, an denen die Kräfte P und M eben ſo wirken, wie am Winkelhebel (§. 67.).

Es kann alſo auch der kleinere Kreis der Querſchnitt einer cylindriſchen Welle ſeyn, die ſich vermittelſt zweyer Zapfen in Lagern dreht, und ſtatt daß man die Kraft an der größern Scheibe durch ein Seil ziehen läßt, kann ſie unmittelbar an dem Umfange derſelben nach der Tangente oder ſenkrecht auf den Halbmeſſer angebracht werden. Dieſe Einrichtung giebt eine Maſchine, die man das **Rad an der Welle** nennt.

§. 194.

Es ſey der Halbmeſſer des Rades $= R$, der Welle $= r$; an dem Seile, das über die Welle geht, hänge eine Laſt P, und dieſer halte eine Kraft M das Gleich-

gewicht, die am Umfange des Rades nach der Tangente wirkt, ſo hat man (§. 193.).

$$M : P = r : R, \text{ alſo } M = \frac{Pr}{R}.$$

Es kann nun R nach Gefallen viel größer als r genommen werden, alſo läßt ſich vermittelſt des Rades eine gegebene Laſt mit weit geringerer Kraft im Gleichgewichte halten, und wenn man die Kraft etwas verſtärkt, in die Höhe heben.

§. 195.

Je nachdem der Gebrauch iſt, den man von dieſer Maſchine macht, bekommt ſie noch beſondere Einrichtungen, und nach dieſen verſchiedene Namen. Bey horizontal liegender Welle nennt man ſie den **Haſpel**, bey vertikal geſtellter Welle die **Winde** oder den **Göpel**.

Vom Haſpel giebt es folgende Arten:

1) **Den Hornhaſpel.** Er enthält an der Welle ſtatt des Rades eine Kurbel oder gebogenen Hebelarm, an deſſen Ende ein Griff eingezapft iſt, der mit der Welle parallel läuft.

2) **Den Kreuzhaſpel:** bey dieſem ſind unter rechten Winkeln zwey Hebelarme durch die Welle geſteckt, ſo daß die zur Umdrehung der Welle nöthige Kraft unter vier Arbeiter vertheilt werden kann.

3) **Den Radhaſpel:** hier liegen die Punkte, woran die Kraft angebracht wird, in dem Umfange eines wirklichen Rades.

Bey der Winde iſt wegen der vertikalen Lage der Welle die Richtung der Kraft horizontal. Man läßt hier, wie beym Kreuzhaſpel, zwey lange Hebelarme an der Welle ſich durchkreuzen, an deren Enden entweder Menſchen ſchieben, oder Thiere vorgeſpannt werden, die ſie fortziehen.

§. 196.

Am Rade kann man die Kraft auf mancherley Art wirken laſſen; ſie muß aber begreiflich auf den Umfang deſſelben angebracht werden, weil ſie da das größte Moment hat. Das **Armrad** wird mit den Händen in Bewegung geſetzt, und enthält zu dieſem Zwecke am Umfange hervorragende Zapfen, die bequem mit der Hand gefaßt werden können. Liegen dieſe oben an der Stirn des Rades, alſo in ſeiner Fläche, ſo heißen ſie **Hörner**, und das Rad heißt dann ein **Stirnrad**; ſind ſie an der Seite, ſenkrecht auf die Fläche des Rades, eingeſteckt, ſo nennt man ſie **Spillen**, und das Rad ein **Spillrad**.

Damit der Arbeiter dabey beyde Hände bequem gebrauchen könne, müſſen beym erſtern die Hörner auf der Fläche der Stirn in zweyen parallelen Reihen fortgehen, bey letzterm die Spillen abwechſelnd auf verſchiedenen Seiten des Rades liegen. Oder man kann auch die Umfänge (**Kränze**) zweyer parallelen Räder mit Spillen verbinden, die dann eine ſolche Breite haben müſſen, daß der Arbeiter die Arme einander nicht zu nähern braucht.

Wenn bey einem größern Rade dieſer Art ſtatt der Spillen Bretter zwiſchen die Kränze gelegt ſind, ſo können Menſchen oder auch Thiere mit den Füßen durch ihr Gewicht darauf wirken; ein ſolches Rad nennt man ein **Lauf-** oder **Tretrad.**

§. 197.

Fig. 48. **Aufg.** Ein Rad vom gegebenen Halbmeſſer $= r$ iſt um den feſten Mittelpunkt C beweglich; in einem Punkte m ſeines innern Umfanges, der von B, dem tiefſten Punkte des Rades, um den Bogen $Bm = \eta$ abſteht, liegt eine Laſt P; man ſucht das Moment, welches ſie hat, das Rad zu drehen.

Aufl. 1) Der Punkt m kann dem Drucke nicht anders, als nach der Tangente mt ausweichen; man zerlege alſo das Gewicht P, das nach der Vertikale mv zu ſinken ſtrebt, in eine Kraft nach mt, und in eine nach der darauf ſenkrechten Richtung mr.

2) Da mt auf dem Halbmeſſer Cm ſenkrecht iſt, ſo fällt mr in die Verlängerung deſſelben; folglich iſt $vmr = BCm = \eta$, alſo die Kraft nach $mt = P \,\mathrm{Sin}\, \eta$, und die nach $mr = P \,\mathrm{Cos}\, \eta$.

3) Erſtere ziehe am Hebelarme $Cm = r$ ſenkrecht, und hat alſo das Moment $rP \,\mathrm{Sin}\, \eta$, dieſen zu drehen; letztere drückt das Rad nach der Richtung Cm an ſeine feſte Axe, und wird dadurch aufgehoben.

A n d e r s.

Man ziehe die Horizontale CD, und fälle darauf aus m das Perpendikel mp, ſo iſt dies die verlängerte

Richtung des Gewichtes P, und man kann alſo daſſelbe auf den Punkt p verlegen. Daher iſt ſein Moment, das Rad zu drehen, $= P . Cp = P . Cm . Sin\ Cmp = Pr\ Sin\ \eta$.

Das Tretrad.

§. 198.

Beym Tretrade drückt der Arbeiter ein Trittbret nach dem andern mit dem Fuße nieder, indem er ſein ganzes Gewicht darauf ruhen läßt; dabey ſinkt das Brett jedesmal bis zu einer gewiſſen Tiefe herab, ehe er ein anderes betritt, ſo daß ſein Moment während der Zeit eines Fußtrittes nicht ganz gleich iſt. Wenn aber n die Stelle iſt, wo er den Fuß zuerſt auf das Brett ſetzt, m die, wo er daſſelbe verläßt, ſo kann man ohne merklichen Fehler die Mitte o zwiſchen beyden Punkten für ſeinen mittlern Standpunkt annehmen, und darnach ſein mittlers Moment in Anſchlag bringen.

§. 199.

Es ſey das Gewicht des Menſchen = P, der Halbmeſſer des Rades = r, ſo wird ſein mittleres Moment $= Pr\ Sin\ BCo$ (§. 197.), das alſo deſto größer iſt, je weiter der Punkt o von B entfernt liegt. Da aber die Weite des Schrittes mn als unveränderlich angeſehen werden kann, ſo wächſt mit dem Bogen Bo zugleich auch die vertikale Höhe nf, zu der der Menſch ſein Gewicht bey jedem Fußtritte heben muß, und der Vortheil, der aus der Zunahme des Momentes ent-

ſpringt, wenn man den Punkt o weiter nach D rücken läßt, wird dadurch wieder aufgehoben, daß alsdann der Schritt mn eine deſto ſteilere Lage bekommt, und daß ſich folglich die Kraft des Menſchen in deſto kürzerer Zeit erſchöpfen muß. Es kann alſo die größte Wirkung nur erreicht werden, wenn man den Punkt o in einer ſolchen Entfernung von B annimmt, daß eine Anhöhe unter dem Neigungswinkel nmf ſich doch noch mit Bequemlichkeit erſteigen läßt. Man ſetze dieſen Winkel $= I$, und ziehe an m die Tangente mu, ſo hat man:

$$Cmw + Cmu + umf = 180°.$$

Nun iſt $Cmw = 90° - mCB$, und $Cmu = 90°$. Dies beydes ſubſtituirt, giebt

$$umf - mCB = o, \text{ oder}$$
$$mCB = umf; \text{ dazu}$$
$$\underline{mCo = umn} \text{ addirt, wird}$$
$$oCB = umf = I.$$

Der Erfahrung zu Folge iſt $I = 30°$, und das Gewicht des Menſchen P, im Durchſchnitte, $= 140$ ℔, alſo ſein Moment $= \frac{1}{2}$ Pr $= r + 70$ ℔.

§. 200.

Es verhält ſich Alles noch wie vorhin, wenn das Rad in dem obern Quadranten Am′D von außen getreten wird. Ruhet nemlich das Gewicht P auf einem Tritte des Rades in m′, und iſt $Am' = Bm$, ſo iſt deſſen Umdrehungsmoment ebenfalls $= P \,.\, Cp = Pr$ Sin η, wie im §. 197.

Ferner haben die Tangenten an m und m′ gegen

die Horizontale einerſey Neigung; daher liegt auch hier die vortheilhafteſte Stelle für den Arbeiter um 30° vom oberſten Punkte des Rades A entfernt. Weil dieſer indeß, der Sicherheit wegen, ſich doch an einer Stange halten muß, ſo kann man ſeinen mittlern Standpunkt etwas weiter von A, etwa in einer Diſtanz von 45°, annehmen; aber ihn mit **Elvius** in die Gegend von D zu ſetzen, würde für längere Dauer, worauf hier doch nothwendig geſehen werden muß, gewiß nicht rathſam ſeyn. Seine Beobachtungen hierüber *), entſcheiden in der Sache nichts, da ſie ſich insgeſammt nur auf einen Zeitraum von höchſtens vier Minuten beſchränken; auch erinnert er ſelbſt, daß durch die Uhr, die er dabey gebrauchte, die Arbeiter zu einer übermäßigen Anſtrengung ihrer Kräfte angetrieben wurden.

§. 201.

Wenn zur Umtreibung eines ſolchen Rades Thiere gebraucht werden, ſo betreten dieſe allemal zwey Stufen m und n zu gleicher Zeit, und die Mitte o zwiſchen beyden giebt wieder hinlänglich genau ihren mittlern Standort: denn die Vertikale aus ihrem Schwerpunkte trift in die Mitte der Sehne mn ein, und halbirt alſo auch ſehr nahe den dazu gehörigen Bogen *).

*) Schwediſche Abhandl. Band VI. S. 197.

) Nach Hrn. **Langsdorf (Maſchinenlehre 1. Th. S. 144.) fällt der Schwerpunkt des Thieres in den Halbmeſſer Co, der den Bogen mn halbirt, alſo ſein mittlerer Standort nicht in o, ſondern näher nach B zu. Ich würde Hrn. **Langsdorf** beyſtimmen, wenn das Thier die Beine gegen den ſchrägen

Es iſt ein allgemein bekannter Erfahrungsſatz, daß Thiere weit weniger zum Steigen geſchickt ſind, als Menſchen, und daß ſie, ohne Laſten zu tragen oder zu ziehen, doch ſchon merklich angegriffen werden, wenn die Schräge des Bodens über 20° beträgt. Man ſetzt daher für ſie gewöhnlich den Winkel I (§. 199.) = 18°, wodurch ihr Moment = Pr Sin 18° = 0,30902 . Pr wird.

Die Tretſcheibe.

§. 202.

Fig. 49. Eine Scheibe, die man an einer ſchrägen Axe CD ſenkrecht befeſtigt, bekommt dadurch gegen den Horizont eine geneigte Lage. Legt man alſo ein Gewicht darauf, ſo hat dies ein Beſtreben, längs derſelben herabzuſinken (§. 118.), oder ſie um ihre Axe zu drehen, wofern das Herabgleiten auf irgend eine Art, z. B. durch Friction, verhindert wird. Man kann ſie daher auch durch Menſchen oder Thiere, die man darauf treten läßt, in Umlauf bringen, worin das Weſentliche der ſogenannten Tretſcheibe beſteht.

§. 203.

Es ſey DCd die Abweichung der Axe CD von der Vertikale Cd, ſo iſt die Ebene DCd zugleich die Neigungsebene der Scheibe, und, wenn ſie dieſelbe in ab ſchneidet, BCb ihr Neigungswinkel gegen die Horizon-

Boden ſenkrecht ſetzte; es ſtellt ſie aber, wie mich dünkt, auf denſelben vertikal.

tale AB, folglich, weil DCb = 90° iſt, DCd = BCb; dieſer Winkel ſoll I heißen.

Ferner ſey M der mittlere Standpunkt des Menſchen oder Thieres, P ſein Gewicht. Man zerlege es in eine Kraft = P Cos I, ſenkrecht auf die Scheibe, und in eine = P Sin I nach Mm, mit ab parallel. Erſtere iſt der Axe parallel, und wird deshalb aufgehoben; letztere zerlege man noch in eine längs dem Halbmeſſer MC, und in eine nach Mn, ſenkrecht auf denſelben. Setzt man den Winkel MCa = ϑ, ſo iſt jene = P Sin I Cos ϑ, wovon die Axe in C gedrückt wird; dieſe = P Sin I Sin ϑ, welche ganz auf die Umdrehung der Scheibe verwandt wird, und das Moment CM . P Sin I Sin ϑ hat.

Man nenne f den ſenkrechten Abſtand des Punktes M von ab, ſo wird f = CM Sin ϑ, folglich das Umdrehungsmoment = Pf Sin I; das alſo, wie man ſieht, mit dem fürs Tretrad gefundenen Momente übereinkommt.

Zuſammengeſetzte Winden.

§. 204.

Wenn mit dem Haſpel oder der Winde andere einfache Maſchinen, als Rollen, Flaſchenzüge, Räder u. ſ. w. in Verbindung gebracht werden, ſo entſtehen dadurch mancherley brauchbare Hebzeuge, die man überhaupt **zuſammengeſetzte Winden**, oder auch **Winden mit vorgelegtem Zeuge** (caprae; holl. bokken; franz. chèvres) nennt.

Hieher gehören auch die ſogenannten **Krahne**, bey denen entweder das ganze Geſtell, oder bloß der Arm, an den die Laſt angehängt iſt, um eine Axe gedrehet werden kann. Dieſe Einrichtung dient dazu, die Laſt nicht allein vertikal in die Höhe zu heben, ſondern auch ſeitwärts an jeden beliebigen Ort, z. B. aus dem Schiffe ans Ufer zu bringen. Man findet Abbildungen davon im Leupold Theat. Mach., Müſchenbroek Introd. ad phil. nat. Tom I.; und in den Machines approuvees par l'acad. Tom II. Vorzüglich einfach iſt der Krahn, den **Scheldom** im 35. Bande der Schwed. Abh. S. 144. beſchreibt.

§. 205.

Eine muſterhafte Zuſammenſetzung des Haſpels mit einfachen Rollen führt **van Swinden** in ſeinen Poſit. phyſic. part. I. pag. 275. an, deren Einrichtung folgende iſt:

Fig. 50. 1) Die Welle des Haſpels beſteht aus zweyen ungleich dicken cylindriſchen Theilen A, a, um die ſich ein gemeinſchaftliches Seil nach entgegengeſetzten Seiten herumſchlingt, das oben über eine Rolle p geht.

2) Dieſe Rolle hängt an einem andern Seile, das ſich über eine höher liegende Rolle q ſchlägt, die bey C eingehängt iſt, und dazu dient, das Seil zur aufzuwinden Laſt herabzuführen.

3) Durch den dickeren Theil A der Welle ſind Hebelarme durchgeſteckt, vermittelſt deren die Welle gedreht werden kann.

4) Indem man die Welle dreht, wickelt ſich das Seil an dieſer Seite weiter auf, und zugleich vom andern Theile ver Welle a ab. Da ſich aber jedesmal ein größeres Stück auf als abwickelt, ſo wird die Rolle p herabgezogen, alſo auch das Ende des Seiles, woran ſie hängt; folglich wird das andere Ende, und mit ihm die Laſt, heraufgezogen.

§. 206.

Aufgabe. Die Kraft V am Hebelarme der Welle zu beſtimmen, die der aufzuwindenden Laſt P das Gleichgewicht hält.

Aufl. 1) Durch die Laſt leidet das obere Seil die Spannung P, und die Rolle p wird alſo mit der Kraft P aufwärts gezogen.

2) Sind daher die beyden Enden des Seiles, das über dieſe Rolle geht, parallel, ſo wird jedes von der Kraft $\frac{1}{2}$ P geſpannt (§. 174.).

3) Es ſey der Halbmeſſer des Cylinders A = R, des Cylinders a = r, ſo hat das Seilſtück, welches um den erſtern gewunden iſt, das Moment $\frac{1}{2}$ PR, ihn um die Axe nach der Richtung mn zu drehen, und das andere, welches um den letztern gewunden iſt, das Moment $\frac{1}{2}$ Pr, ihn nach entgegengeſetzter Richtung zu drehen; folglich behält die Laſt das Umdrehungsmoment $\frac{1}{2}$ P (R — r) nach erſterer Richtung mn.

4) Dieſem muß das Moment der Kraft gleich und entgegengeſetzt ſeyn. Setzt man alſo die Länge des

Hebelarms AF, auf deſſen Endpunkt F ſie angebracht iſt, = f, ſo hat man

$$Vf = \frac{1}{2} P (R - r).$$

Exempel. Es ſey P = 3000 ℔, R = 6 Zoll, r = $5\frac{3}{4}$ Zoll, f = 15 Zoll, ſo wird V = $\frac{1}{120}$ P = 25 ℔.

§. 207.

Fig. 51. Wenn die beyden Seilſtücke AG, ag nicht parallel ſind, ſondern unter irgend einem Winkel ϑ gegen einander zuſammenlaufen, ſo iſt die Spannung eines jeden $= \frac{P}{2 \cos \frac{1}{2} \gamma}$ (§. 174.), alſo allemal größer, als wenn ſie parallel laufen.

Damit dieſes Erforderniß ſtatt finde, muß der Durchmeſſer der Rolle Gg = Aa = AO + Oa, folglich ihr Halbmeſſer Gp $= \frac{R + r}{2}$, oder das arithmetiſche Mittel zwiſchen den Halbmeſſern der beyden Cylinder ſeyn.

Gezähntes Rad.

§. 208.

Wenn die Hörner oder Spillen (§. 196.) dazu dienen ſollen, die Bewegung des Rades einem andern daranliegenden Rade mitzutheilen, ſo bekommen ſie eine etwas veränderte Geſtalt, und heißen alsdann **Zähne**. Der Zahn des einen Rades greift zwiſchen zwey Zähne des andern, gleitet an dem einen herab,

und ſchiebt ihn dadurch fort, während ein zweyter Zahn in den Zwiſchenraum der beyden folgenden einfaßt. Auf dieſe Art wird das eine Rad durch die Umdrehung des andern zugleich mit in Umlauf gebracht.

Beym **Sternrade** liegen die Zähne in der Verlängerung des Halbmeſſers, alſo in der Fläche des Rades; beym **Kronrade** ſtehen ſie auf der Fläche deſſelben ſenkrecht, und heißen da auch wohl **Kämme**.

§. 209.

Fig. 52. **Aufgabe.** Am Umfange der Welle eines gezähnten Rades OGB hängt eine Laſt P; das Rad greift bey O in ein anderes aeO, an deſſen Axe ſich noch ein drittes Rad AEF befindet, woran in einem Punkte A ſeines Umfanges eine Kraft V nach der Tangente AV zieht; man fragt, wie groß dieſe ſeyn müſſe, um der Laſt das Gleichgewicht zu halten.

Aufl. 1) Es ſey der Halbmeſſer AC = R, aC = r, OD = R′, und der Welle Db = r′, ſo hält eine Kraft $= \frac{r'}{R'} . P$, am Umfange des Rades OGB in O nach der Tangente Ot angebracht, der Laſt P das Gleichgewicht (§. 192.).

2) Eben die Kraft iſt ihr alſo äquipollent, wenn ſie nach entgegengeſetzter Richtung Ou angebracht wird.

3) Auf gleiche Art ſteht die Kraft V mit einer Kraft $= \frac{R}{r} . V$ im Gleichgewichte, die man in O am Umfange des Rades aeO nach Ou wirken läßt, und

dieſelbe Kraft iſt ihr äquipollent, wenn man ihr die entgegengeſezte Richtung Ot giebt.

4) Da die beyden Räder in O, wo ſie zuſammenſtoßen, eine gemeinſchaftliche Tangente haben, ſo ſind die Kräfte $\frac{r'}{R'}$. P und $\frac{R}{r}$. P, von denen erſtere den Zahn des Rades OGB aufwärts, leztere den daranliegenden Zahn des Rades aeO herabdruckt, einander entgegengeſetzt, und müſſen folglich gleich groß ſeyn, da ſie ſich das Gleichgewicht halten ſollen.

4) Man hat daher: $\frac{R}{r} . V = \frac{r'}{R'} . P$, und

$$\text{folglich } V = \frac{r . r'}{R . R'} . P.$$

§. 210.

1. Um der Laſt P das Gleichgewicht zu halten, wird alſo deſto weniger Kraft erfordert, je kleiner die Quotienten $\frac{r'}{R}$ und $\frac{r}{R'}$ ſind.

2. Erſteres iſt an ſich klar: denn die Kraft übt eine deſto größere Wirkung aus, je länger der Hebelarm AC iſt, an dem ſie angebracht wird, und die Laſt hat ein deſto kleineres Moment, je dünner die Welle iſt, an deren Umfange ſie zieht.

3. Aus Letzterem hingegen erhellet, daß es für die Kraft vortheilhaft ſey, wenn von den beyden gezähnten Rädern das der Kraft zunächſt liegende gegen das andere ſo klein als möglich iſt.

§. 211.

Man nennt dies kleinere Rad ein **Getriebe**. Da es wegen ſeines geringen Umfanges ſchmalere und folglich ſchwächere Zähne hat als andere Räder, ſo giebt man ihm der Länge der Axe nach eine größere Breite, ſo daß es wie ein Stück einer dünnen Welle geſtaltet iſt, in das Vertiefungen nach dem Mittelpunkte zu eingeſchnitten ſind.

Das Getriebe hölzerner Räderwerke (der Trilling) beſteht aus zweyen parallelen Scheiben, die an ihrem Umfange mit cylindriſchen Stäben (Triebſtöcken) verbunden ſind.

§. 212.

Vermittelſt der Getriebe kann man ſo viele Räder in Verbindung bringen, als man will, und dadurch die Wirkung der Kraft nach Gefallen vermehren.

Es ſey der Halbmeſſer des erſten Rades, an deſſen Umfange die Kraft V angebracht iſt, $= R$, der Halbmeſſer des an eben der Axe befindlichen Getriebes $= r$, der des eingreifenden Rades $= R'$, der des zweyten Getriebes $= r'$ u. ſ. f., ſo iſt der Kraft V am Getriebe die Kraft $\frac{R}{r} . V$ äquipollent, alſo auch am Umfange des zweyten Rades, wo daſſelbe in das Getriebe eingreift. Auf ſolche Weiſe kann man der Kraft V nach und nach die Kräfte $\frac{R}{r}$, γ, $\frac{RR'}{rr'} . V$ u. ſ. w. an den Umfängen der folgenden Räder ſubſtituiren, und wenn man den Halb-

meſſer des letzten Rades $R^{(n)}$, den ſeiner Welle, woran die Laſt P hängt, $r^{(n)}$ nennt, ſo hat man:

$$\frac{R \,.\, R' \,.\, R'' \,.\,.\, R^{(n)}}{r \,.\, r' \,.\, r' \,.\,.\, r^{(n)}} \,.\, V = P, \text{ alſo}$$

$$V = \frac{r \,.\, r' \,.\, r'' \,.\,.\, r^{(n)}}{R \,.\, R' \,.\, R'' \,.\,.\, R^{(n)}} \,.\, P.$$

Form der Zähne.

§. 213.

Der Zahn des Getriebes verläßt den Zahn des daranliegenden Rades nicht ſogleich wieder, wie er ihn ergriffen hat, ſondern er bewegt ſich auf längere oder kürzere Zeit an ihm fort, je nachdem die beyden Räder mehr oder minder tief ineinander greifen. Dieſe Bewegung muß bey gut eingerichteten Zähnen nie anders als **wälzend** ſeyn (§. 123.): durch jedes andere Fortrücken der Zähne leidet die ganze Maſchine eine Erſchütterung, die ihrer Feſtigkeit nachtheilig iſt, und ihr Gang wird wegen der größern Friktion, die dabey ſtatt findet, allemal erſchwert.

Eine zweyte nothwendige Bedingung bey den Zähnen iſt die, daß die Kraft am Getriebe während der ganzen Zeit, da zwey Zähne mit einander in Berührung ſind, beſtändig einerley Moment behalte, das Rad zu drehen. Iſt dies der Fall nicht, ſo kann die Maſchine keinen gleichförmigen Gang annehmen, und das mittlere Moment der Kraft iſt um ein Beträchtliches geringer, als im Anfange, wo der eine Zahn auf den andern ſeine völlige Wirkung ausübt.

Beyde Erforderniſſe ſind von der Art, daß ſie ſich zu gleicher Zeit durch einerley Form des Zahnes erfüllen laſſen. Um dieſe Form kennen zu lernen, und zugleich die Gründe einzuſehen, warum ſie beyde Eigenſchaften in ſich vereinigt, bedarf es einiger Vorbereitungen, die ich in den folgenden beyden §§ voranſchicken will.

§. 214.

Fig. 53. Die **Epicycloide** iſt eine Curve, welche von einem Punkte M eines Kreiſes EMO beſchrieben wird, der ſich auf dem Umfange AO eines andern Kreiſes an der convexen Seite fortwälzt. Geſchieht die Fortwälzung auf der innern Seite des Umfangs, ſo entſteht dadurch die **Hypocycloide**, und wenn ſie über einer geraden Linie geſchieht, die **Cycloide**.

Anmerkung. *Waring* (Miſcellanea analytica Cap. 2.) nennt überhaupt die krummen Linien, die bey Fortwälzung einer Curve auf einer geraden Linie durch einen Punkt derſelben beſchrieben werden, **Curvoiden**, und wenn die Baſis ebenfalls eine Curve iſt, **Epicurvoiden**. Man findet auch in dieſem Werke einige näher Unterſuchungen über dieſe Linien.

§. 215.

Fig. 53. 1) Indem der bewegliche Kreis ſich um ein unendlich kleines Stück ſeines Weges weiter fortwälzt, dreht er ſich um ſeinen Berührungspunkt O, wodurch das folgende Element Oo ſeines Umfangs mit dem folgenden Elemente $O\omega$ der Baſis AO in Berührung kommt.

2) Der Umdrehungswinkel iſt alſo $= oO\omega$.

3) Um ſo viel dreht ſich nun auch jede andere Linie, die im Kreiſe durch O geht, um dieſen Punkt; folglich auch MO.

4) Alſo beſchreibt der Punkt M einen Bogen Mm, der MO zum Halbmeſſer hat, und den Winkel MOm = oOω am Mittelpunkte O einſchließt.

5) Da auf die Weiſe M zunächſt in m zu liegen kommt, ſo iſt Mm ein Element der Epicycloide, alſo MO ihre Normale an M, und zugleich ihr Krümmungshalbmeſſer.

6) Dieſe Eigenſchaft erſtreckt ſich auch auf die Hypocycloide, Cycloide, und überhaupt auf jede Linie, die durch einen Punkt einer Curve beſchrieben wird, die ſich auf dem Umfange einer andern Curve fortwälzt.

7) Wenn bey der Hypocycloide der Halbmeſſer CO des beweglichen Kreiſes die Hälfte von dem Halbmeſſer EO der Baſis aO iſt, ſo liegt das Element derſelben Mm in der geraden Linie ME, die zum Mittelpunkte E läuft: denn ſowohl Mm (6) als ME ſind auf MO ſenkrecht, alſo fallen beyde zuſammen.

8) Da dies von jedem ihrer Elemente gilt, ſo folgt, daß ſie alle in einem und demſelben Halbmeſſer aME liegen müſſen; daher iſt für dieſen Fall die Hypocycloide eine gerade Linie, die durch den Mittelpunkt E des unbeweglichen Kreiſes geht.

§. 216.

Indem zwey zuſammenſtoßende Zähne aneinander fortgleiten, verändern ſie nach und nach ihre Be-

rührungspunkte, ſo daß auf beyden Seiten die Entfernung des angegriffenen Punktes von den Mittelpunkten der beyden Räder nicht dieſelbe bleibt. Fällt Anfangs der Punkt des Angriffs an den Fuß des einen Zahns, ſo iſt der Hebelarm an dem die Kraft durch ihn wirkt, am kleinſten; nach und nach wird er aber größer, bis die Spitze des Zahns in Berührung kommt, wo er dann ſeine größte Länge erreicht hat.

Aus dieſem Grunde unterſcheidet man den **urſprünglichen Halbmeſſer** des Rades von ſeinem **Totalhalbmeſſer**. Erſterer geht vom Mittelpunkte bis an die Stirn des Rades, letzterer bis an die Spitze des Zahns; beyde ſind alſo um die Länge des Zahns von einander verſchieden.

§. 217.

Aufgabe. Die Umſtände zu beſtimmen, bey denen zwey zuſammentreffende Zähne des Rades und Getriebes ſich aufeinander fortwälzen, und das Umdrehungsmoment der Kraft unveränderlich iſt.

Fig. 54. Aufl. 1) Es ſey C der Mittelpunkt des Getriebes, D der des Rades, M der Punkt, wo die beyden Zähne gegenwärtig in Berührung ſind; ferner ſey des Rades Halbmeſſer = R, der des Getriebes = r, und M die Kraft, die letzteres umzutreiben ſtrebt, auf den Endpunkt ſeines Halbmeſſers r reducirt.

2) Wegen erſterer Forderung müſſen bey M zwey Elemente der beyden Zähne zuſammenfallen, oder ihre Curven daſelbſt eine gemeinſchaftliche Tangente tMu

haben; folglich auch eine gemeinſchaftliche Normale MO.

3) Außerdem ſoll die Laſt, auf den Endpunkt des Halbmeſſers R reducirt, der Kraft M gleich ſeyn, wie in dem Falle, wenn die Richtungen beyder entgegengeſetzt ſind (§. 209. 4.).

4) Man ſetze MC $=$ u, ſo iſt der Kraft M am Punkte M die Kraft $\frac{Mr}{u}$ nach der auf MC ſenkrechten Richtung Mm äquipollent; dieſe zerlege man in eine ſenkrecht auf die Fläche des Radzahns oder nach der Normale Mr, und in eine nach MC.

5) Letztere wird durch die Feſtigkeit des Punktes C aufgehoben; erſtere, die wir N nennen wollen, iſt allein wirkſam, und man hat für ſie (§. 48.): $N \text{ Sin } CMr = \frac{Mr \text{ Sin } 90^\circ}{u} = \frac{Mr}{u}$, oder $Nu \text{ Sin } CMO = Mr$.

6) Nun iſt im Dreyecke MCO:

$$\text{Sin } CMO : \text{Sin } MOC = OC : MC$$ alſo

$u \text{ Sin } CMO = OC \,.\, \text{Sin } MOC$, folglich wird $N \,.\, OC \text{ Sin } MOC = Mr$ oder $N = \frac{Mr}{OC \text{ Sin } MOC}$.

7) Auf eben die Weiſe entſpringt aus dem gleich großen Widerſtande M, nachdem man ihn auf den Punkt M des Hebelarms DM reducirt hat, die Kraft $\frac{M \,.\, R}{OD \text{ Sin } MOD}$ nach MO. Da dieſe der erſtern das Gleichgewicht halten muß, und ihr entgegengeſetzt iſt,

ſo müſſen beyde einander gleich ſeyn; und man hat alſo

$$\frac{Mr}{OC\ \mathrm{Sin}\ MOC} = \frac{M \cdot R}{OD\ \mathrm{Sin}\ MOD}$$ oder

$$OC : OD = r : R.$$

8) Nun iſt aber $OC + OD = CD = R + r$, folglich $OC = r$, und $OD = R$; die Normale muß alſo jedesmal in die Mittelpunktslinie CD da eintreffen, wo die Umfänge der beyden Räder ſich berühren.

§. 218.

Folgerung 1. Die Zerlegung der Kraft (4) nach den Richtungen Mr und MC iſt nur alsdann möglich, wenn ihre Richtung Mm zwiſchen Mr und MC fällt, alſo rMC ein ſtumpfer Winkel iſt. Da dies ſtatt finden muß, wie klein auch der Winkel MCO ſeyn mag, ſo folgt, daß auch MOC ſtumpf ſeyn müſſe; daher iſt allemal $MC > OC$, oder die Entfernung des angreifenden Punktes von C größer als r (8). Gegenſeitig erhellet, daß $MD < R$ ſeyn müſſe.

2. Der Zahn des Getriebes ragt alſo über deſſen Umfange hervor, und der Radzahn liegt dagegen innerhalb dem Umfange des Rades; daher bezeichnet hier r den urſprünglichen Halbmeſſer des Getriebes, und R den Totalhalbmeſſer des Rades. Man ſagt in dieſem Falle, das Getriebe greife in das Rad ein.

3. Es kann auch der Fall eintreten, daß das Getriebe durch das Rad in Umlauf gebracht wird, alsdann gilt alles ſo vom Rade, wie es vorhin vom Getriebe galt, und umgekehrt.

§. 219.

Lehrſatz. Wenn das Rad durch das Getriebe in Umlauf gebracht wird, ſo laſſen ſich die beyden Forderungen (§. 213.) erfüllen, wenn der Zahn des Getriebes eine Epicycloide, und der des Rades eine Hypocycloide iſt, die durch Fortwälzung eines und deſſelben Kreiſes auf dem äußern Umfange des Getriebes und dem innern Umfange des Rades entſtehen.

Fig. 55. Beweis 1) Man nehme an, die Punkte F und G im Getriebe und Rade ſeyen Anfangs in O beyſammen geweſen, jetzt aber habe ſich F bereits um den Bogen FO von O entfernt, ſo iſt während der Zeit ein eben ſo großes Stück GO vom Umfange des Rades durch den Punkt O durchgeführt.

2) Es ſey nun f der Halbmeſſer des Kreiſes, durch deſſen Umwälzung auf FO und GO der Zahn des Getriebes und des Rades entſteht; man mache $Oc = f$, beſchreibe aus c den Kreis EMO, und nehme auf ſeinem Umfange den Bogen $MO = FO$, ſo iſt M ein Punkt in der Epicycloide FM, und zugleich auch, weil $GO = FO$ iſt, ein Punkt in der Hypocycloide GM.

3) Treffen daher beyde Zähne gerade in dieſem Punkte M zuſammen, ſo haben ſie daſelbſt eine gemeinſchaftliche Normale MO (§. 21. 5.), folglich auch eine gemeinſchaftliche Tangente, und überdies ſchneidet die Normale die Mittelpunktslinie CD in dem Punkte O, wo die Umfänge des Rades und des Getriebes ſich berühren (8.).

4) Es bleibt alſo nur noch übrig zu zeigen, daß die beyden Zähne FM und GM jederzeit in einem Punkte zuſammenſtoßen, der zugleich im Kreiſe EMO liegt.

5) Zu dem Ende ſetze man, es ſey dieſe Vorausſetzung richtig, wenn der Fuß F des Zahns FM um irgend einen Bogen FO von O weggerückt iſt, ſo gilt ſie auch, wenn er noch um ein unendlich kleines Stück Ff weiter rückt: denn alsdann rückt auch G um eben ſo viel weiter, und wenn man Mm = Ff nimmt, ſo iſt wieder der Bogen mMO = fFO, alſo m ein Punkt im Umfange des Getriebezahns, und da ebenfalls gO = mO iſt, auch m ein Punkt im Umfange des Radzahns.

6) Nun ſind Fuß und Spitze vom erſtern und letztern, oder die Punkte F und G Anfangs in O beyſammen geweſen, alſo gillt die Vorausſetzung (4) für FO = o, folglich auch, wenn FO nach und nach wächſt, mithin für jede Diſtanz des Punktes F von O, bis zu der, wo beyde Zähne einander verlaſſen.

Anmerk. Aus dem ſo eben geführten Beweiſe erhellet, daß man ſtatt des Kreiſes EMO jede andere Curve wählen könne, und daß folglich die Form der beyden Zähne nicht auf die Epicycloide und Hypocycloide allein eingeſchränkt ſey. Vielleicht ließe ſich dazu eine Curve finden, die für die Umriſſe der Zähne Linien von leichter Conſtruktion gäbe.

§. 220.

Fig. 56. **Folgerung** 1. Nimmt man f = $\frac{1}{2}$ R, ſo wird die Hypocycloide eine gerade Linie, die nach dem Mittelpunkte des Rades D gerichtet iſt; alſo iſt in dem Falle der Umriß des Radzahns ein Stück vom Halb-

meſſer des Rades, und der des Getriebezahns eine Epi⸗cycloide, die durch Fortwälzung eines Kreiſes vom Halbmeſſer $\frac{1}{2}$ R auf dem Umfange des Getriebes entſteht.

2. Bisher haben wir als Bedingung voraus ge⸗ſetzt, daß die anfängliche Berührung der beyden Zähne im Punkte O geſchehe, und daß alsdann der eine Zahn den andern ſeitwärts fortſchiebe; ſie können aber auch **vor** der Linie CD zuerſt zuſammentreffen, und in O ſich wieder verlaſſen. Man laſſe in dieſem Falle die beyden Räder ſich rückwärts bewegen, ſo iſt klar, daß der Radzahn den Zahn des Getriebes von O aus bis zum Punkte ihrer erſten Berührung zurückſchieben wer⸗de; alſo verwechſeln ſich da die Formen der beyden Zähne: der Radzahn wird eine Epicycloide, und der des Getriebes eine Hypocycloide, die beyde durch den Kreis EMO (Fig. 55.) entſtehen, wenn er ſich auf dem äußern Umfange des Rades und dem innern Umfange des Getriebes fortwälzt.

3. Setzt man hier $f = \frac{1}{2} r$, ſo wird der Umriß des Getriebezahns ein Stück vom Halbmeſſer des Ge⸗triebes, und der des Radzahns eine Epicycloide, die durch Fortwälzung eines Kreiſes vom Halbmeſſer = $\frac{1}{2}$ r entſteht.

Fig. 57. 4. Trifft man eine ſolche Einrichtung, daß die Zähne vor der Linie CD zuerſt in Berührung kom⸗men, und ſich erſt in eben der Diſtanz hinter CD wie⸗der verlaſſen, ſo bekommen die Zähne eine zuſammen⸗geſetzte Form. Der untere Theil des Getriebezahns wird nemlich geradelinigt, und zwar bis an den Punkt,

der bey O mit dem Radzahne in Berührung kommt; der obere FG hingegen eine Epicycloide, welche entſteht, wenn ein Kreis vom Halbmeſſer $\frac{1}{2}$ R auf dem Umfange FOf des Getriebes ſich fortwälzt (1.). Eben ſo wird auch der obere Theil gf des Radzahns eine Epicycloide, die ein Kreis vom Halbmeſſer $\frac{1}{2}$ r auf dem Umfange gOG des Rades beſchreibt (3.), und der Umriß IO ſeines untern Theiles wieder eine gerade Linie (1.).

5. In dieſem Falle wirken die Zähne aufeinander folgendermaßen:

Das geradelinigte Stück fa vom Zahne des Getriebes ergreift in f die Spitze des Radzahns, und wälzt ſich an ſeinem convexen Theile fg aufwärts fort, bis er in O das geradlinigte Stück IO deſſelben erreicht hat. Von O an kommt der obere Theil des Getriebezahns mit dem untern OI des Radzahns in Berührung, gleitet an dieſem hinweg, und verläßt ihn in G mit ſeiner Spitze.

6. Wenn das Getriebe vom Rade in Bewegung geſetzt werden ſoll, ſo gilt von Allem, was bisher geſagt iſt, das Gegentheil; man darf für dieſen Fall nur die Namen Rad und Getriebe verwechſeln.

Anmerk. Nach Camus iſt die erſtere Art des Eingreifens bey der die anfängliche Berührung der Zähne in der Mittelpunktslinie CD geſchieht, den andern beyden vorzuziehen. S. Mem. de l'acad. de Paris 1732 pag. 137.

§. 221.

Aufgabe. Aus den Halbmeſſern R und r des Rades und des Getriebes, und der Anzahl n der Zähne des letztern das Uebrige zu finden.

Fig. 56. Aufl. 1) Wir wollen ſetzen, der Zahn des Getriebes fg habe Anfangs den Zahn des Rades in O ergriffen, und verlaſſe ihn nun in g, ſo muß in dieſem Augenblicke ein neuer Zahn in O eintreffen.

2) Alſo iſt fO der Abſtand der Füße f und O zweyer zunächſt folgenden Zähne auf dem Umfange des Getriebes, und fCO ihre Winkeldiſtanz an ſeinem Mittelpunkte. Setzt man daher $fCO = \zeta$, ſo wird $n\zeta = 2\pi$, folglich $\zeta = \frac{2\pi}{n}$, und $fO = r\zeta = \frac{2\pi r}{n}$.

Fig. 55. 3) Iſt nun der Zahn des Rades geradlinigt, ſo iſt der Halbmeſſer Oc des Kreiſes, der die Epicycloide fg beſchreibt, $= \frac{1}{2}R$. Sie wird alſo conſtruirt, wenn man dieſen Kreis von f bis O ſich fortwälzen läßt.

4) Da in den Radien DO und Dg die vordern Seiten zweyer Radzähne liegen müſſen, und das dazwiſchen liegende Stück vom Umfange des Rades mit fO einerley Länge hat, ſo iſt die Winkeldiſtanz gDO zweyer Radzähne $= \frac{r\zeta}{R} = \frac{2\pi r}{nR}$. Setzt man daher ihre Anzahl $= m$, ſo hat man $m \cdot \frac{2\pi r}{nR} = 2\pi$, alſo $rm = Rn$ oder $m : n = R : r$.

Das Kronrad am gezähnten Getriebe.

§. 222.

Fig. 58. Es ſey von einem Kronrade (§. 208.) D der Mittelpunkt, AD der Halbmeſſer, SAR ein Stück des Umfangs; die Axe des Getriebes, wodurch es in Um-

lauf gebracht wird, liege in einer Ebene, die die Fläche des Rades in AD ſenkrecht ſchneidet, und ſey mit dieſer Linie parallel.

Indem nun der Zahn des Getriebes den Kamm des Rades von A bis B fortſchiebt, entfernt dieſer ſich von AD um die Sehne IB, und gleitet außerdem längs dem Zahne des Getriebes um das Stück AI zur Seite. Letztere Bewegung geſchieht ohne alle Hinderniſſe, und hat folglich auf den Gang der Maſchine keinen Einfluß; daher kommt hier allein nur die Bewegung des Kammes nach der geraden Linie IB in Betracht.

§. 223.

Das Kronrad kann alſo in Anſehung des Eingreifens der Zähne als ein Sternrad betrachtet werden, wovon das Stück des Umfangs, das vom Zahne des Getriebes fortgeführt wird, geradlinigt iſt, oder einen unendlich großen Halbmeſſer hat; giebt man daher dem Kamme deſſelben einen geradlinigten Umriß, ſo iſt auch der Halbmeſſer des Kreiſes, der die Epicycloide des Getriebezahns beſchreibt, unendlich (§. 220. 1.). Daraus folgt, **daß der Zahn des Getriebes, das in ein Kronrad eingreift, durch den Endpunkt einer geraden Linie beſchrieben werde, die ſich auf dem Umfange des Getriebes fortwälzt.**

§. 224.

Fig. 59. Man ſieht offenbar, daß dieſe Curve mit der einerley ſey, die der Endpunkt M eines Fadens MOE beſchreibt, den man vom Umfange eines Kreiſes FOE

nach und nach abwickelt: der ausgeſpannte Theil MO berührt nemlich den Kreis in dem Punkte O, wo er ſeinen Umfang verläßt, und hat mit dem Bogen FO, wovon er abgewickelt iſt, einerley Länge; gerade ſo, als wenn er ſich von F bis O auf dem Umfange des Kreiſes fortgewälzt hätte.

Uebrigens verhält ſich dieſe Curve in allem Betracht, wie die Epicycloide, von der ſie nur eine beſondere Art ausmacht; ſo z. B. iſt MO im Punkte M auf ihr ſenkrecht, und zugleich der Krümmungshalbmeſſer für dieſe Stelle.

§. 225.

Das Bisherige gründet ſich auf die Vorausſetzung, daß die beyden Zähne ſich Anfangs im Punkte O der Linie CI berühren, die auf der Fläche des Rades ſenkrecht iſt. Man ſetze nun, es habe ſich der Zahn des Getriebes bereits um den Bogen OF von O entfernt, ſo iſt während der Zeit der Kamm in gerader Linie (§. 222.) um IR = OF fortgerückt; zieht man daher OM mit IR parallel, oder auf CO ſenkrecht, und macht OM = OF, ſo iſt M ſowohl ein Punkt im Zahne (§. 219.), wie auch im Kamme; folglich treffen beyde beſtändig in einem Punkte der Linie zuſammen, die den Umfang des Getriebes in O berührt.

§. 226.

Wirkt demnach am Umfange des Getriebes eine Kraft M, ſo iſt dieſe bey jeder Lage des Zahns FM allemal auf den daranſtoßenden Kamm MR ſenkrecht ge-

richtet, und wird alſo ganz darauf verwandt, ihn nach Rn Fig. 58.) fortzubewegen. Da aber der Punkt R nur nach der Tangente Rr weichen kann, ſo zerfällt die Kraft in eine nach dieſer Richtung, und in eine ſenkrecht darauf nach Ro; letztere übt einen Druck auf den Mittelpunkt D aus, und wird dadurch aufgehoben; erſtere iſt = M Sin nRo = M Cos ADR, folglich deſto kleiner, je weiter R von A wegrückt.

Der Kraft am Getriebe iſt alſo nur zu Anfange, wenn R in A fällt, oder die Zähne zuerſt in O ſich berühren, eine gleich große Kraft am Umfange des Rades äquipollent; nach und nach geht immer mehr von ihrer Würkung verloren, bis die Zähne ſich verlaſſen, und zwey andere im Punkte O zuſammentreffen. Aus dieſem Grunde kann das Kronrad, genau genommen, den gleichförmigen Gang des Sternrades nie annehmen.

§. 227.

Aufgabe. Aus den Halbmeſſern R und r eines Kronrades und des darein greifenden Getriebes, nebſt der Anzahl n der Zähne des letztern, den vollſtändigen Umriß dieſer Zähne, und die Anzahl der Kämme des erſtern zu finden.

Fig. 59. Aufl. 1) Wenn der Zahn des Getriebes FM den Kamm MR im Punkte M verläßt, ſo iſt M ſeine Spitze, und, da in dieſem Augenblicke in O zwey andere Zähne zuſammentreffen müſſen, OF die Diſtanz zweyer zunächſt folgender Zähne.

2) Setzt man daher den Winkel OCF = η, ſo

hat man $n\eta = 2\pi$, folglich $\eta = \frac{2\pi}{n}$, und $FO = r\eta$ $= \frac{2\pi r}{n}$.

3) Da alſo OF bekannt, und OM = OF iſt, ſo erhält man den vordern Umriß des Zahns bis zu ſeiner Spitze, wenn man von F bis O einen Faden vom Umfange des Getriebes abwickelt.

4) Während der Zeit, daß das Getriebe ſich um den Winkel OCF dreht, rückt der Kamm aus A bis R fort, ſo daß $IR = OF = r\eta$ iſt, und das Rad dreht ſich um den Winkel, der ζ heißen mag.

Fig. 58. 5) Im Dreyecke DIR iſt $IR = DR \operatorname{Sin} ADR$ oder $r\eta = R \operatorname{Sin} \zeta$, alſo $\operatorname{Sin} \zeta = \frac{r\eta}{R}$, wodurch ζ bekannt wird. Nennt man daher m die Anzahl der Kämme, ſo hat man $m\zeta = 2\pi$, alſo $m = \frac{2\pi}{\zeta} =$

$$\frac{2\pi}{\operatorname{arc\,Sin} \frac{2\pi r}{nR}}$$

Exempel. Es ſey $n = 6$, $R = 25$ Zoll, $r = 5$ Zoll, ſo wird $\eta = 60°$, $\operatorname{Sin} \zeta = 0{,}2094395$, alſo $\zeta = 12° 5' 22''$, und $m = 29{,}7$, wofür man 30 ſetzen muß.

Fig. 59. Um die Höhe des Zahnes zu finden, ziehe man CM, ſo wird $CM = \sqrt{(CO^2 + OM^2)} = r\sqrt{\left(1 + \frac{4\pi^2}{n^2}\right)}$ $= 1{,}44797\ldots r$; davon r abgezogen, giebt die geſuchte Höhe $= 0{,}44797 \cdot r = 2{,}2398$ Zoll.

§. 228.

Wenn der Zahn des Getriebes den Kamm des Rades verläßt, ſo iſt der Kraft M am Getriebe noch die Kraft M Cos ζ am Umfange des Rades äquipollent. Setzt man darin für Sin ζ ſeinen Werth, ſo erhält man

$$M \, Cos \, \zeta = M \surd \left(1 - \frac{4\pi^2 r^2}{n^2 R^2}\right).$$

Dieſer Ausdruck weicht deſto weniger von M ab, je kleiner r, und je größer nR iſt; alſo kann man den Verluſt, den die Kraft am Getriebe durch das Eingreifen der Zähne leidet, auf zweyerley Art vermindern:

1) Wenn man das Getriebe im Verhältniſſe des Rades klein genug nimmt.

2) Wenn man ihm ſo viel Zähne giebt, als es die Sicherheit des Eingreifens nur immer geſtattet.

Im vorigen Exempel wird M Cos ζ = 0,97782 M, alſo der mittlere Werth des wirkſamen Antheils von M = 0,98891 M.

§. 229.

Dieſelbe Vorſtellung vom Kronrade (§. 223.), woraus die bisherigen Folgerungen genommen ſind, leitet nun ferner auch auf die Form, welche ſowohl der Kamm als der Zahn des Getriebes haben muß, wenn beyde Anfangs vor der Linie CI zuſammentreffen, und ſich erſt hinter derſelben in eben der Diſtanz wieder verlaſſen. Alsdann wird nemlich (§. 220. 4.) (Fig. 60.) der Zahn des Getriebes zunächſt am Umfange geradlinigt, bis an den Punkt O, womit er in CI den Kamm

berührt; von da an, bis zu ſeiner Spitze, behält er ſeine vorige Krümmung (§. 223.). Der Kamm hingegen ragt nun über O hinaus, bleibt nur von I bis O geradlinigt, und bekommt oberhalb die Geſtalt einer Cycloide, die durch den Punkt eines Kreiſes vom Halbmeſſer $\frac{1}{2}$ r beſchrieben wird, der ſich auf der geraden Linie OM von O bis M fortwälzt.

Da die Zähne des Getriebes jetzt nicht mehr um den Winkel OCf, ſondern um das Doppelte deſſelben FCf auseinander liegen, ſo wird bey eben der Anzahl von Zähnen die Länge OM halb ſo groß als vorhin, alſo der gekrümmte Theil vom Zahne des Getriebes etwas kürzer; das Uebrige bleibt alles ungeändert.

Pochſtämpfer.

§. 230.

Der Mechaniſmus der Stampfmühlen beſteht bekanntlich darin, daß vertikal gerichtete Balken vermittelſt ſeitwärts angebrachter Zapfen durch die Zähne einer Welle in die Höhe gehoben werden, und, ſobald dieſe von den Zapfen abgleiten, vermöge ihres eigenen Gewichtes wieder herabfallen.

Fig. 61. Ein ſolcher Balken AB heißt ein **Stempel**, der daranliegende Zapfen DM die **Hebelatte**, und der Zahn FM der **Daumen** oder die **Warze**. Damit der Stempel ſtets ſeine vertikale Lage behalte, umſchließt man ihn an zweyen Stellen mit feſten Seitenwänden Ee und Gg, worin er ſich auf und nieder bewegen kann; dieſe heißen **Leitungen** oder auch **Scheidelatten**.

§. 231.

Man kann den Stempel AB als ein Stück vom Umfange eines unendlich großes Rades anſehen, und auf ſolche Weiſe alles, was ſich über dieſe Maſchine ſagen läßt, aus der vorhergehenden Theorie der Räder ableiten. Das Wichtigſte davon beſteht ungefähr in folgenden Punkten:

1. Da die Heblatte DM geradlinigt iſt, ſo bekommt der Daumen der Welle die Geſtalt einer Curve, die der Endpunkt F eines Fadens FO beſchreibt, den man vom Umfange der Welle abwickelt (§. 223.).

2. Der Daumen FM faßt unter die Heblatte DM zuerſt in dem Augenblicke, wenn der Halbmeſſer FC in die Horizontale OC fällt, und die Berührung geſchieht alsdann im Punkte O. Nach und nach gleitet die Heblatte auf dem Daumen immer weiter nach deſſen Spitze hin, berührt ihn aber ſtets mit ihrem Endpunkte M, ſo daß die Kraft, die am Umfange der Welle nach der Tangente OM gerichtet iſt, bey jeder Lage des Daumen ihre volle Wirkung auf die Heblatte ausübt.

3. Wenn dieſe mit der Spitze des Daumen in Berührung gekommen iſt, folglich ihre größte Höhe erreicht hat, ſo tritt jetzt in O ein neuer Daumen unter die Heblatte eines andern, ſchon herabgefallenen Stempels, wodurch ein abwechſelndes Heben der Stempel bewirkt wird. Hieraus ſieht man zugleich, daß allemal der Bogen vom Umfange der Welle, der zwiſchen zweyen parallelen Reihen vom Daumen enthalten iſt, der Höhe OM gleich ſey, zu der jede der Heblatten hinaufſteigt.

4. Damit die Heblatte bey ihrer tiefſten Lage nicht unmittelbar an den Umfang der Welle anſtoße, giebt man den Daumen noch eine geradlinigte Unterlage, deren Höhe als ein Stück vom Halbmeſſer der Welle angeſehen werden muß.

§. 232.

Aufgabe. Auf den Umfang des an der Welle liegenden Rades wirke eine gegebene Kraft M; die Welle enthalte der Länge nach n Daumen, wodurch jedesmal n Stempel zugleich gehoben werden; man ſucht die Kräfte, denen jeder Stempel ausgeſetzt iſt.

Aufl. 1) Es ſey der Halbmeſſer des Rades $= R$, der Welle $= r$; die Höhe der Unterlage jedes Daumen $= e$, die Länge der Heblatten $= f$, die Breite des Stempels $= g$, der Abſtand der beyden Leitungen voneinander $= a$.

2) Da die Unterlage des Daumen noch mit zur Welle gehört, ſo iſt der eigentliche Halbmeſſer der Welle $= r + e$, alſo der Kraft M am Rade die Kraft $\frac{RM}{r+e}$ an ihrem Umfange äquipollent; daher wird jede Heblatte DM von der Kraft $\frac{RM}{n(r+e)}$ angegriffen.

3) Dieſe wirkt ſtets auf DM im Punkte M ſenkrecht, alſo auch unmittelbar auf den Schwerpunkt des Stempels nach vertikaler Richtung (§. 70.).

4) Außerdem leidet noch der Stempel von den Wänden der Leitungen, ſowol in E als in g einen Sei-

tendruck. Da die centriſche Linie des Stempels durch ſeine Mitte geht, alſo der angegriffene Punkt M von ihr um $f + \frac{1}{2} g$ entfernt liegt, ſo iſt dieſer Druck $= \frac{(f + \frac{1}{2} g) R}{na (r + e)} . M.$

Das Eingreifen der Triebſtöcke.

§. 233.

Lehrſatz. Wenn die Zähne eines Rades in die Triebſtöcke eines Getriebes eingreifen, und letztere als Linien ohne Dicke angenommen werden, ſo muß der Radzahn die Geſtalt einer Epicycloide haben, bey der der bewegliche Kreis mit dem Getriebe, und die Baſis mit dem Rade einerley Halbmeſſer hat.

Fig. 62. Beweis 1) Der Querſchnitt eines ſolchen Triebſtockes iſt ein Punkt in des Getriebes Umfange. Dieſen führt der Zahn des Rades, indem er ſich von O um den Bogen GO entfernt, durch einen gleich großen Bogen MO.

2) Nimmt man alſo auf dem Umfange des Getriebes den Bogen MO = GO, ſo muß der Punkt M in dem Umriſſe des Zahnes GM liegen, und zugleich muß die Sehne MO auf ihm ſenkrecht ſeyn (§. 217.).

3) Beydes wird erfüllt, wenn die Curve GM eine Epicycloide iſt, die der Punkt M beſchreibt, indem der Bogen MO ſich auf dem Umfange des Rades von G bis O fortwälzt.

§. 234.

Ein Kreis kann ſich auf dem innern Umfange eines andern nicht fortwälzen, wenn beyde gleich groß ſind; alſo artet dann die Hypocycloide in einen Punkt aus. Sieht man daher den Querſchnitt eines unendlich dünnen Triebſtocks als eine Hypocycloide an, ſo giebt auch über dieſen Fall die allgemeine Theorie der Zähne Auskunft, und führt auf eben die Form des Radzahnes, die im vorigen §. angegeben iſt.

Außerdem zeigt ſich aus dieſer Betrachtung, daß das erſte Zuſammentreffen des Zahnes mit dem Triebſtocke nothwendig im Punkte O der Linie CD geſchehen müſſe; wollte man ihn früher in den Triebſtock eingreifen laſſen, ſo müßte letzterer die Form einer Epicycloide haben, und könnte alſo kein Punkt ſeyn.

Soll dagegen der Triebſtock den Zahn fortführen, ſo müſſen im Gegentheil beyde vor der Linie eD ſich zuerſt berühren, und wenn ſie bis O gekommen ſind, ſich wieder verlaſſen.

§. 235.

Es ſey jetzt der Triebſtock ein wirklicher cylindriſcher Stab, alſo ſein Querſchnitt ein Kreis, ſo verhält ſich nun die Sache bloß in ſofern anders, daß die Epicycloide GM durch den Mittelpunkt M dieſes Kreiſes geht, und der eigentliche Umriß des Zahnes ihn irgendwo in ſeinem Umfange berührt. Es ſey μ der Berührungspunkt, ſo wird erfordert, daß μO ſowohl auf der Curve des Zahnes, als auch auf dem Kreiſe ſenkrecht

ſey (§. 217. 2.); alſo muß wegen letzterer Bedingung μO durch M gehen, folglich μ in der Normale der Epicycloide MO liegen, und von M um den Halbmeſſer des Querſchnittes abſtehen.

Daher iſt in gegenwärtigem Falle die Curve des Zahnes $\gamma\mu$ eine Parallele der Epicycloide, und wird von dem Mittelpunkte des gedachten Querſchnittes beſchrieben, wenn man ihn auf dem innern Umfange der Epicycloide fortrollen läßt.

Beym Kronrade verwandelt ſich die Epicycloide wieder in die Cycloide; das Uebrige bleibt alles ſo wie vorhin.

Siebentes Kapitel.

Von der Schraube.

Die Schraubenlinie.

§. 236.

Fig. 63. Eine Ebene PCc, durch die Axe Cc eines ſenkrechten Cylinders gelegt, ſchneidet ſeine Oberfläche in einer geraden Linie PM, die auf ſeiner Grundfläche APB ſenkrecht ſteht. Nimmt man auf dieſer ein Stück PM in einem gegebenen Verhältniſſe zum Bogen AP, ſo liegt der Punkt M in einer Curve AMS, die ſich um die Fläche des Cylinders herumwindet, und die **Schraubenlinie** genannt wird.

§. 237.

§. 237.

Die Entſtehungsart dieſer Linie leitet auf folgende Betrachtungen:

1. Es ſey der Halbmeſſer der Grundfläche CP $= r$, der Winkel ACP $= \phi$, die Ordinate PM $= y$, und $\frac{PM}{AP} = \varkappa$, ſo wird der Bogen AP $= r\phi$, alſo die Gleichung für die Schraubenlinie: $y = \varkappa r\phi$.

2. Für $\phi = 0$, iſt auch $y = 0$; da in dieſem Falle P in A zu liegen kommt, ſo ſieht man, daß der Punkt A in die Schraubenlinie hineinfalle.

3. Wenn man $\phi = 2\pi$ nimmt, ſo fällt P aufs Neue in A, und es wird $y = Aa = 2\pi\varkappa r$. Man nennt das Stück der Schraubenlinie AMSa einen **Schraubengang**, und Aa ſeine Höhe.

4. Setzt man dieſe $= h$, ſo wird $\varkappa r = \frac{h}{2\pi}$, alſo $y = \frac{h\phi}{2\pi}$.

5. Das Element Pp des Bogens AP liegt mit dem Elemente Mm der Schraubenlinie in einerley Ebene MPmp; daher liegen auch die Tangenten MT und PT an M und P gezogen, in dieſer Ebene, und ſchneiden ſich in derſelben in irgend einem Punkte T.

6. Man ziehe Mo mit Pp parallel, ſo wird mMr $=$ MTP, Mr $=$ Pp $= rd\phi$, mr $= dy = \varkappa rd\phi$, alſo, wenn man den Winkel MTP $= \alpha$ ſetzt: tang α

$= \frac{mr}{Mr} = \varkappa$. Die beyden Tangenten ſchneiden ſich daher jederzeit unter einem und demſelben Winkel.

7. Es iſt $MP = TP \cdot \tang \alpha$, folglich $TP = \frac{MP}{\varkappa} = AP$. Legt man alſo ein rechtwinklichtes Dreyeck MTP, deſſen Winkel an der Grundlinie $= \alpha$ iſt, ſo um die Fläche des Cylinders, daß ſeine Grundlinie TM in den Umfang des Kreiſes APB fällt, ſo kommt ſeine Hypothenuſe TM in die Schraubenlinie AM zu liegen.

8. Wählt man zum erſten Radius ſtatt CA einen andern CF, und ſetzt die erſte Ordinate $FI = g$, den Winkel $FCP = \varphi'$, und $ACF = \gamma$, ſo erhält man $g = \frac{h\gamma}{2\pi}$, $\varphi = \gamma + \varphi'$, folglich $y = \frac{h(\gamma + \varphi')}{2\pi} = g + \frac{h\varphi'}{2\pi}$

§. 238.

Fig. 64. Wenn um zwey Cylinder, die eine gemeinſchaftliche Axe Cc haben, zwey Schraubengänge von einerley Höhe h gehen, und der Anfangspunkt α des innern Schraubenganges mit dem Anfangspunkte A des äußern zwar in derſelben Ebene ACc, aber um das Stück $a\alpha = g$ höher liegt, ſo iſt für einerley Winkel $ACP = \varphi$ die Ordinate $MP = \frac{h\varphi}{2\pi}$, und $p\mu = g + \frac{h\varphi}{2\varphi}$, alſo beyder Unterſchied allemal $= g$. Zieht man daher MI mit PC parallel, und nennt den Halbmeſſer der

Grundfläche des größern Cylinders R, den der Grundfläche des kleinern r, ſo iſt $Mo = R - r$, $o\mu = g$, alſo $\tang M\mu o = \frac{R-r}{g}$, folglich $M\mu$ gegen die Axe Cc durchgängig unter einerley Winkel geneigt.

§. 239.

Eine Fläche, die durch alle die Linien $M\mu$ geht, heißt eine **Schraubenfläche**. Legt man zugleich eine andere durch eben das Stück des äußern Schraubenganges und das zunächſt darunter liegende Stück des innern, ſo bilden beyde Flächen am äußern Schraubengange eine Kante $\lambda M\mu$, und es geht dann über den inneren Cylinder eine Art von gewundenem dreyeckigen Prisma, wodurch die ſogenannte **Schraube** entſteht.

§. 240.

Anmerk. 1. Da $\lambda\mu = h$ iſt, ſo muß $g = \frac{1}{2} h$ ſeyn, wofern die Seitenlinien λM und μM gegen die Axe des Cylinders (der Spindel) einerley Neigung haben ſollen; dies iſt aber nicht durchaus nothwendig.

2. Für $g = o$ iſt $M\mu$ auf der Axe der Spindel ſenkrecht; in dieſem Falle läßt man zwey Schraubenflächen AM, am parallel neben einander fortlaufen, und was bis an den Umfang des äußern Cylinders dazwiſchen liegt, bleibt auf der Spindel ſtehen, ſo daß nun der körperliche Schraubengang, der ſich um die Spindel herumwindet, viereckig wird.

§. 241.

Wenn in einen hohlen Cylinder, deſſen Oeffnung

mit der Spindel einer Schraube gleichen Halbmeſſer hat, inwendig Vertiefungen eingegraben werden, in welche die Schraubengänge jener genau hineinpaſſen, ſo hat man eine **innere Schraube** oder **Schraubenmutter**.

§. 242.

1. Die äußere Schraube iſt in der innern beweglich: denn jedes Stück ihres Schraubenganges hat mit dem andern einerley Form und Lage, und kann alſo ohne Hinderniſſe in deſſen Stelle treten.
2. Die Bewegung geſchieht nach der Richtung der Schraubenlinie, und beſteht daher in einer Umdrehung um die Axe der Spindel, und in einem dieſer Axe parallelen Fortrücken.
3. Wenn alſo die Spindel gedrehet wird, ſo muß die Schraube zu gleicher Zeit parallel mit ihrer Axe ſteigen oder fallen.
4. Gegenſeitig kann letzteres nur geſchehen, wenn erſteres zugelaſſen wird.

§. 243.

Fig. 65. **Aufgabe.** Auf eine Schraube, die in einer unbeweglichen Schraubenmutter enthalten iſt, wirken zwey Kräfte: die eine Kraft V ſtrebt dieſelbe vermittelſt eines Hebelarmes, worauf ſie ſenkrecht angebracht iſt, um ihre Axe zu drehen; die andere P drückt auf ſie nach einer mit der Axe parallelen Richtung; man fragt, wie beyde Kräfte ſich zu einander verhalten müſſen, damit Gleichgewicht zwiſchen ihnen ſtatt finde.

Aufl. 1) Durch die Kraft P wird die Fläche der äußern Schraube gegen die darunter liegende Fläche der Schraubenmutter gedrückt, und dieſer Druck vertheilt ſich auf letztere gleichförmig.

2) Wenn alſo n Schraubengänge vorhanden ſind, ſo iſt der Druck auf jede derſelben $= \frac{P}{n}$, und davon kommt auf jedes ſeiner Elemente, das zwiſchen dem Winkel $d\Phi$ enthalten iſt, der Theil $\frac{Pd\Phi}{2n\pi}$, der für jetzt p heißen mag.

3) Es ſey MNmn ein ſolches Element der Fläche des hohlen Schraubenganges: man lege durch M eine auf die Axe der Spindel ſenkrechte Ebene, fälle darauf die Perpendikel NO, no, ml, ziehe Mo, Oo, lo, und verlängere Oo und Nn, bis ſie ſich in T ſchneiden; ſo ſind Mo und lo Stücke von den Radien, die den Winkel $d\Phi$ am Mittelpunkte des durch M gehenden ſenkrechten Querſchnittes einſchließen; alſo $MOT = 90°$, und $NTO = \alpha$ (§. 237. 6.).

4) Man fälle ferner NI auf MT ſenkrecht, und ziehe IO, ſo iſt NIO der Neigungswinkel des ſchrägen Elementes gegen gedachten Querſchnitt. Es ſey dieſer $= I$, der Winkel $NMO = \vartheta$, $OMT = \lambda$, ſo hat man in der rechtwinklichten Ecke bey M: $\tan I = \frac{\tan \vartheta}{\sin \lambda}$.

5) Die Kraft p, die nach NO wirkt, zerlege man in eine ſenkrecht auf das Element, und in eine parallel

mit OI, ſo iſt erſtere $= \frac{p}{\text{Cos I}}$ (§. 118.), die aufgehoben wird; letztere $=$ p tang I.

6) Dieſe zerlege man noch in eine nach OM, und in eine ſenkrecht darauf. Erſtere, $=$ p tang I Cos IOM $=$ p tang I Sin λ, drückt gegen die Axe der Schraube, und wird folglich durch einen gleichen Druck eines gegenüber liegenden Elementes zerſtört; die andere $=$ p tang I Cos λ, ſtrebt eine Umdrehung der Schraube um ihre Axe zu bewirken.

7) Nennt man r den Halbmeſſer der Schraube, ſo iſt ihr Umdrehungsmoment $=$ pr tang I Cos λ $=$ pr $\frac{\text{tang}\ \vartheta}{\text{tang}\ \lambda}$ (4.).

8) Da nun NO $=$ OM tang ϑ

TO $=$ OM tang λ ſo erhält man

$$\frac{\text{tang}\ \vartheta}{\text{taug}\ \lambda} = \frac{NO}{TO} = \text{tang}\ \alpha = \varkappa = \frac{h}{2\pi r}$$ (§. 237.);

folglich wird jenes Moment $= \frac{ph}{2\pi} = \frac{Phd\varphi}{4n\pi^2}$.

9) Die Summe von dieſen einzelnen Momenten iſt $= \frac{Ph\varphi}{4n\pi^2}$; alſo für $\varphi = 2\pi$, oder für einen Schraubengang $= \frac{Ph}{2n\pi}$, und daher für alle n Schraubengänge $= \frac{Ph}{2\pi}$.

10) Dieſem Momente muß das entgegengeſetzte

der Kraft V gleich ſeyn, welches, wenn man die Länge des Hebelarmes, woran ſie wirkt, f nennt, $= Vf$ iſt. Man hat daher $\frac{Ph}{2\pi} = Vf$, oder $Ph = 2\pi Vf$.

§. 244.

Die Schraube gehört zu den einfachen Hebmaſchinen, wodurch man Laſten in die Höhe treiben, oder Widerſtände jeder andern Art zum Weichen bringen kann. Man bringt ſie zu dem Ende unter die Laſt oder gegen den Widerſtand ſenkrecht, befeſtigt auf irgend eine Weiſe ihre Einfaſſung, damit dieſe dem Seitendrucke (5) nicht nachgebe, und ſteckt durch die Spindel einen Hebelarm, auf den die Kraft ſenkrecht angebracht wird. Die Schraube leidet alsdann oben, wo ſie angeſtemmt iſt, einen Druck P, wodurch ſie zum Niederſteigen in der Schraubenmutter, folglich zugleich zu einer Umdrehung um ihre Axe ſollicitirt wird. Durch eine Kraft $V = \frac{Ph}{2\pi f}$ am Hebelarme wird dieſes Drehen, alſo auch das Herabſteigen der Schraube verhindert (§. 242. 4.), und im Gegentheil, wenn die Kraft größer als $\frac{Ph}{2\pi f}$ iſt, ſo wird ſie nur zum Theil aufgehoben, und kann mit dem Ueberreſte die Schraube frey um ihre Axe drehen, und dadurch die Laſt zum Weichen bringen.

Man ſieht übrigens, daß die Kraft im Verhältniſſe gegen die Laſt deſto geringer zu ſeyn braucht, je länger

der Hebelarm f, und je kleiner die Höhe der Schraubengänge h iſt.

Die Preſſe.

§. 245.

Fig. 66. Die ſogenannten Preſſen ſind Schrauben von entgegengeſetzter Einrichtung. Bey dieſen iſt nemlich die äußere Schraube auf dem Boden AG befeſtigt, und dagegen die Einfaſſung vermittelſt der Schraubenmutter um ſie beweglich.

Der zuſammengedrückte Körper übt zunächſt einen Widerſtand auf das Brett CD aus, der ſich auf die beyden Schraubhölzer mp und nq vertheilt, und dadurch die Schraubenmutter gegen die Fläche der äußern Schraube drückt. Da dieſer Druck mit der Axe der Spindel parallel geſchieht, ſo geht ein Theil davon längs dem Schraubengange herab, und würde die Schraubhölzer zur Umdrehung bringen, wenn dies nicht durch eine Kraft, die an ihren Hebelarmen nach entgegengeſetzter Richtung wirkt, verhindert würde.

Das Verhältniß der Kraft zum Widerſtande iſt dabey, wie man leicht einſieht, ganz daſſelbe, wie im erſtern Falle.

Die Schraube an der Axe.

§. 246.

Fig. 67. Es giebt noch eine dritte Zuſammenſetzung der äußern Schraube mit der innern, bey welcher beyde

Theile zugleich beweglich ſind, aber jeder nur eine Bewegung einfacher Art anzunehmen fähig iſt. Die äuſſere Schraube kann ſich nemlich nur um ihre Axe OZ drehen, und die innere liegt in einem ausgehöhlten viereckigen Prisma FHGI, das von zweyen Seitenwänden AC und BD umſchloſſen iſt, und ſich zwiſchen dieſen bloß hin und her ſchieben läßt. Wird nun erſtere gedrehet, ſo kommt der Punkt m ihres Schraubenganges nach und nach mit den Punkten des dareingreifenden hohlen Schraubenganges mo in Berührung, und hebt dieſe bis in die Fläche des ſenkrechten Querſchnittes mn, in welcher ſeine Umdrehung geſchieht; ſo daß jedesmal, nachdem er einen Bogen von 180° beſchrieben hat, oder von m bis n gelangt iſt, der Punkt o der innern Schraube, und mit ihm das ganze Prisma um on, d. h. um die halbe Höhe eines Schraubenganges, geſtiegen iſt.

§. 247.

Aufgabe. Von zweyen Kräften V und P ſtrebt erſtere vermittelſt eines Hebelarms die äußere Schraube um ihre Axe OZ zu drehen, und dadurch das Prisma FHGI zu heben; letztere verhindert dies, indem ſie auf die obere Fläche GI des Prisma's ſenkrecht drückt, und hält ſo der andern das Gleichgewicht; man fragt, wie beyde Kräfte ſich zu einander verhalten müſſen.

Aufl. 1) Die Kraft P, womit das Prisma zu ſinken ſtrebt, zertheilt ſich in ſo viele Theile, als ſeine innere Schraubenfläche Elemente hat; daher bleibt al-

les ſo, wie zu Anfange des §. 243., nur bedeutet hier MmNn ein Element der äußern Schraubenfläche, und der darauf ſenkrechte Druck $\frac{p}{\text{Cos I}}$, der dort aufgehoben wurde, iſt jetzt der allein wirkſame Antheil von p, indem der andere Theil p tang I, deſſen Richtung mit OI parallel iſt, das Prisma gegen die Seitenwand drückt, und dadurch vernichtet wird.

2) Man zerlege nun ferner die Kraft $\frac{p}{\text{Cos I}}$, deren Richtung NR in der Ebene INO liegt, und auf IN ſenkrecht iſt, in eine nach NO $= \frac{p}{\text{Cos I}} . \text{Cos ONR}$ $= p$, und in eine darauf ſenkrechte $= \frac{p}{\text{Cos I}} . \text{Sin I}$ $= p \text{ tang I}$.

3) Erſtere hat kein Moment, die Schraube um ihre Axe zu drehen, weil ihre Richtung NO mit der Axe parallel iſt; letztere hingegen, deren Richtung mit IO parallel läuft, zerfällt in eine nach MO $= p \text{ tang I Sin } \lambda$, die gegen die Axe drückt, und dadurch aufgehoben wird; und in eine auf MO ſenkrechte, $= p \text{ tang I Cos } \lambda = p \frac{\text{tang } \vartheta}{\text{tang } \lambda}$, die auf die Umdrehung der Schraube verwandt wird.

4) Vergleicht man hiermit §. 243 . 6, ſo ſieht man, daß hier eben das Umdrehungsmoment aus p entſpringt, wie dort, folglich am Ende wieder dieſelbe Gleichung $2\pi V f = P h$ herauskommt.

Die Schraube ohne Ende.

§. 248.

Wenn die Schraube an der Axe in die Zähne eines daran liegenden Rades eingreiſt, und dadurch das Rad in Umlauf bringt, ſo nennt man ſie die Schraube ohne Ende.

Fig. 68. Das Eingreifen des Schraubenganges geſchieht dabey auf eben die Art, wie im vorhergehenden Falle; indem nemlich durch eine halbe Umdrehung der Spindel der Punkt m auf die andere Seite des Querſchnittes mp in p zu liegen kommt, wird der ganze Schraubengang mo in die Lage np verſetzt, und ſchiebt ſo den Zahn des Rades, der ihn in o berührt, um op, parallel der Axe, fort.

§. 249.

Fig. 69. Es ſey AZ die Axe der Schraube, COD eine auf AZ ſenkrechte Linie, die durch den Mittelpunkt des Rades C geht, ſo ſind zum richtigen Eingreifen der Schraube folgende Bedingungen nothwendig:

1) Der Schraubengang MZ muß den Zahn des Rades FM vor der Linie COD ergreifen, und ihn bis O führen.

2) Er muß viereckig (§. 240. 2.) ſeyn, damit der Zahn nicht ſeitwärts abgleiten könne.

3) Die Berührung beyder muß beſtändig in der mit AZ parallelen Linie MO geſchehen, damit das Moment der Schraube, das Rad zu drehen, unveränderlich bleibe.

Man ſieht alſo, daß die Punkte des Zahnes in einem Faden MO liegen müſſen, der vom Umfange des Rades von F bis O abgewickelt wird; nur kann hier ſein Umriß nicht, wie im §. 223., vom Endpunkte des Fadens beſchrieben werden, weil wegen der Schiefe des Schraubenganges die Linie MO mit dem Bogen FO nicht einerley Länge hat.

Um die jedesmalige Länge MO zu finden, die man auf dem abgewickelten Theile des Fadens bis an den Punkt M nehmen muß, der in der Curve des Zahnes liegt, ſetze man den Winkel $FCO = \varphi$, der Halbmeſſer des Rades $= R$, die Länge $MO = u$, ſo iſt $FO = R\varphi$, $Oo = Rd\varphi$; alſo, wenn der Faden um das Stück Oo weiter abgewickelt wird, und dabey M in n zu liegen kommt: $no = nO + Oo = u + Rd\varphi$.

Ferner ſey Mm das an M liegende Element der Curve. Da dies mit dem daran ſtoßenden Stücke des Schraubenganges MZ einerley Lage haben muß, und Mn auf MO ſenkrecht, alſo mit OD parallel iſt, ſo hat man $nMm = DOA$, der Schiefe des Schraubenganges, alſo $\tang nMm = \varkappa$ (§. 237.); daher wird $mn = \varkappa . Mn = \varkappa u d\varphi$, folglich $du = mo - MO = u + Rd\varphi - \varkappa u d\varphi - u = Rd\varphi - \varkappa u d\varphi$, alſo $d\varphi = \frac{du}{R - \varkappa u}$ oder $-\varkappa d\varphi = \frac{-\varkappa du}{R - \varkappa u}$, wovon die Integralgleichung: $C - \varkappa\varphi = \log (R - \varkappa u)$ iſt.

Für $\varphi = 0$, iſt auch $u = 0$, alſo $C = \log R$, daher erhält man: $\varkappa\varphi = \log \left(\frac{R}{R - \varkappa u}\right)$, $\frac{R}{R - \varkappa u}$

$= e^{\varkappa\varphi}$, $R - \varkappa u = R \cdot e^{-\varkappa\varphi}$, und $u = \frac{R}{\varkappa}$. $(1 - e^{-\varkappa\varphi})$.

Setzt man den abgewickelten Theil des Fadens $= s$, und $\frac{R}{\varkappa} = c$, ſo wird, weil $s = FO = R\varphi$ iſt, $\varphi = \frac{s}{R}$, alſo $u = c(1 - e^{-\frac{s}{c}})$.

Die Conſtruktion des Zahnes iſt alſo folgende: Man wickele einen Faden vom Punkte F an, nach und nach vom Umfange des Rades ab, und nehme jedesmal auf dem abgewickelten Stücke S vom Punkte O an, wo es den Umfang verläßt, einen Theil $OM = c(1 - e^{-\frac{s}{c}})$ ab, ſo liegt M in der verlangten Curve FM des Zahnes.

§. 250.

Fig. 63. **Aufgabe.** Vom Umfange aeb der Welle eines Rades AoB hängt eine Laſt P herab, das in eine Schraube ompn eingreift; man ſucht die Kraft V, die ihr am Endpunkte D der Kurbel GD das Gleichgewicht halt.

Aufl. 1) Es ſey der Halbmeſſer AC des Rades $= R$, der Halbmeſſer aC der Welle $= r$, ſo iſt der Laſt P am Umfange des Rades in O eine Kraft $\frac{Pr}{R}$ äquipollent (§. 193.).

2) Dieſe Kraft wirkt auf OC ſenkrecht, alſo nach OM, und da der Zahn die Schraubenfläche ſtets in einem Punkte berührt, der in OM hineinfällt, ſo übt die

Kraft auf den Schraubengang einen mit der Axe der Spindel parallelen Druck aus.

3) Wird alſo die Länge des Hebelarmes GD = f geſetzt, ſo hat man: (§. 247.) $2\pi Vf = \frac{Phr}{R}$, folglich $V = \frac{Phr}{2\pi Rf}$.

Exempel. Es ſey R = 36 Zoll, r = 3 Zoll, h = 1 Zoll, f = 15 Zoll, P = 27000 ℔, ſo wird:

	log. 2Rf	=	3,0334238
	log. π	=	0,4971499
	log 2πRf	=	3,5305737
Ferner:	log Phr	=	4,9084850
alſo:	log V	=	1,3779113
und	V	=	23,87324 ℔ = 23 ℔ 28 Lt.

Zuſammengeſetzte Schrauben.

§. 251.

Die Schraube ohne Ende kann auf mancherley Art mit andern einfachen Maſchinen verbunden werden. Sie läßt ſich ſelbſt mit der Schraube der zweyten Art (§. 246.) wieder zuſammenſetzen, und beyde geben in Verbindung eine Maſchine, die ſehr brauchbar iſt, große Laſten damit auf eine geringe Höhe, z. B. auf einen Wagen zu heben, daher ſie auch vom Hrn. Prof. **Burja**, der ſie in ſeiner Statik anführt, die **Wagenwinde** genannt wird. Ihre Einrichtung iſt folgende:

1) Die ſtehende Schraube hat mit dem beweglichen

Priſma, worin die hohlen Schraubengänge liegen, vertikale Stellung.

2) Die zu hebende Laſt wird in ein Behältniß gepackt, das auf der obern Fläche GI des Priſma's befeſtigt iſt.

3) Unterhalb an der Spindel der Schraube liegt ein horizontales Rad, deſſen Zähne in eine Schraube ohne Ende eingreifen, die dann durch eine Kurbel gedrehet wird.

§. 252.

Es ſey die Höhe des Schraubenganges der erſteren Schraube = g, der Halbmeſſer des Rades = a, die auf GI ruhende Laſt = P, ſo iſt dieſer am Umfange des Rades die Kraft $\frac{gP}{2\pi a}$ äquipollent, die wir = Q ſetzen wollen.

Ferner ſey die Kraft an der Kurbel = V, die Länge der Kurbel = f, die Höhe des Schraubenganges der Schraube ohne Ende = h; ſo hat man für das Gleichgewicht der beyden Kräfte Q und V die Gleichung: $2\pi Vf = Qh$. Darin den Werth für Q ſubſtituirt, giebt $2\pi Vf = \frac{ghP}{2\pi a}$, oder $V = \frac{ghP}{4\pi^2 af}$.

Exempel. Es ſey wieder, wie vorhin f = 15 Zoll, g und h beyde = 1 Zoll; außerdem a = 6 Zoll. Man ſetze die Kraft V = 24 ℔; wie viel Laſt wird man mit dieſer im Gleichgewichte erhalten können?

Man erhält hier	log 4af	=	2,5563025
	log π^2	=	0,9942997
	log $4\pi^2$af	=	3,5506022
dazu:	log V	=	1,3802112
giebt	log P	=	4,9308134
und	P	=	85273,36 ℔.

§. 253.

Eine andere ſehr ſinnreiche Zuſammenſetzung zweyer gewöhnlichen Schrauben, die auf eine ähnliche Art in einander greifen, beſchreibt **Hunter** in den Phil. transact. Vol. 71. part. 1. pag. 58. Sie beſteht in folgendem:

Fig. 70. 1) Die größere Schraube CDA geht bey D durch eine unbewegliche Schraubenmutter, und enthält inwendig ſelbſt wieder eine Schraubenmutter für die kleinere Schraube cda, die zwiſchen den feſten Seitenwänden mp und nq auf und niederſteigen, aber ſich nicht drehen kann.

2) Wenn daher auf die obere Fläche o ein Gewicht gelegt wird, ſo drückt dies die kleinere Schraube gegen die größere, und wirkt dadurch auf letztere zwiefach.

3) In ſofern nemlich dieſer Druck auf ihre innern Schraubengänge geſchieht, wird ſie zu einer Umdrehung von f nach g ſollicitirt; und in ſofern derſelbe auf den ganzen Schraubenkörper geht, der dadurch gegen die in GH liegenden Schraubengänge gedrückt wird, bekommt ſie ein Beſtreben, ſich von g nach f zu drehen.

4) Beyde

4) Beyde Umdrehungen geſchehen nach entgegengeſetzter Richtung, und heben ſich alſo zum Theil einander auf.

§. 254.

Aufgabe. Auf die obere Schraube drückt eine Laſt P, der eine Kraft V am Hebelarme EC das Gleichgewicht hält; man fragt nach dem Verhältniſſe von V zu P.

Aufl. 1) Es ſey die Höhe des Schraubenganges bey der größern Schraube $= g$, bey der kleinern $= h$, ſo hat die Laſt P, in ſofern ſie die größere Schraube gegen die in GH liegenden Schraubengänge drückt, das Moment $\frac{Pg}{2\pi}$, (§. 243. 9.) ſie um ihre Axe nach der Seite gf zu drehen; und in ſofern ſie die kleinere Schraube gegen ihre innere Schraubengänge drückt, das entgegengeſetzte Moment $\frac{Ph}{2\pi}$, weil ſie dadurch eine Umdrehung derſelben nach der Seite fg zu bewirken ſucht.

2) Alſo bleibt ihr das Moment $\frac{P(g-h)}{2\pi}$ nach erſterer Seite zu übrig. Dieſem muß nun das entgegengeſetzte Moment Vf der Kraft V gleich ſeyn, daher hat man:

$$Vf = \frac{P(g-h)}{2\pi} \text{ oder}$$

$$2\pi Vf = P(g-h).$$

Exempel. Es ſey $g = \frac{1}{3}$ Zoll, $h = \frac{1}{4}$ Zoll, $f = 15$ Zoll, die Kraft $V = 24$ ℔, ſo wird $g - h = \frac{1}{12}$ Zoll, alſo

$$\log \frac{2f}{g-h} = \log 360 = 2{,}5563025$$

$$\begin{aligned} \text{dazu: } \log \pi &= 0{,}4971499 \\ \text{und } \log V &= 1{,}3802112 \\ \hline \text{giebt } \log P &= 4{,}4336636 \\ \text{und } P &= 27143{,}362 \text{ ℔.} \end{aligned}$$

Achtes Kapitel.

Vom Keile.

§. 255.

Der Keil iſt ein dreyſeitiges Prisma, von dem zwey Seitenflächen einen ſpitzen Winkel einſchließen. Sein Gebrauch beſteht darinn, daß man ihn zwiſchen Flächen, die durch irgend eine Kraft gegeneinander gepreßt ſind, mit der ſcharfen Kante nach und nach eindringen läßt, und ſie dadurch auseinander treibt. Das Hineintreiben geſchieht entweder durch Druck oder durch wiederholte Schläge auf die dritte Seitenfläche, die man den Rücken des Keiles nennt.

§. 256.

Fig. 71. Es ſey der Keil ACB zwiſchen die beyden Flä-

chen EO und FO eingezwängt, die ein Beſtreben haben, aneinander zu treten (wie z. B. in dem Falle, wenn EOF der Spalt eines feſten Körpers iſt); ſo leidet von ihnen der Keil an den Stellen E und F, wo er mit ihnen in Berührung iſt, einen Druck, ſenkrecht auf ſeine Seitenflächen AC und BC. Es mögen nemlich die Kräfte, die die Flächen EO, FO gegeneinander treiben, nach Richtungen wirken, wonach ſie wollen, ſo laſſen ſie ſich doch allemal nach EG und FG, den Perpendikeln auf AC und BC, und nach EC, FC, parallel mit den Seitenflächen, zerlegen, von denen erſtere beyden nur allein wirkſam ſind.

Das in der Figur gezeichnete Profil gehe durch die Mittelpunkte dieſer Drucke E und F, ſo ſind EG, FG ihre mittlere Richtungen, die ſich irgendwo in G durchſchneiden mögen. Aus beyden entſpringt eine zuſammengeſetzte Kraft nach irgend einer Richtung GD, die allemal aufwärts geht, und folglich den Keil aus dem Zwiſchenraume EOF herauszutreiben ſtrebt; ſoll daher dies verhindert werden, ſo muß auf den Rücken des Keiles eine eben ſo große Kraft nach entgegengeſetzter Richtung DG wirken.

§. 257.

Aufgabe. Die Umſtände zu beſtimmen, unter denen der mittlere Druck von Seiten des Widerſtandes auf den Rücken des Keiles ſenkrecht gerichtet iſt.

Aufl. 1) Es ſey der Druck nach EGr = M, der nach FGu = N; man zerlege erſtere in eine Kraft nach

GD, ſenkrecht auf AB, und in eine nach Gp, parallel AB, ſo iſt jene $= M \text{ Cos } DGr$, dieſe $= M \text{ Sin } DGr$.

2) Da im Vierecke AEGD die Winkel bey E und D rechte Winkel ſind, ſo iſt $EGD + EAD = 180°$, folglich $DGr = EAD$; ſetzt man alſo den Winkel bey $A = \alpha$, ſo wird von jenen beyden Kräften, die nach $GD = M \text{ Cos } \alpha$, und die nach $Gp = M \text{ Sin } \alpha$.

3) Auf gleiche Art zerfällt der Druck N, wenn der Winkel bey $B = \beta$ geſetzt wird, in eine Kraft nach $GD = N \text{ Cos } \beta$, und in eine nach Gq, parallel AB, $= N \text{ Sin } \beta$.

4) Soll daher aus den Kräften M und N eine einzige Kraft nach GD entſpringen, ſo müſſen die beyden Seitenkräfte nach Gp und Gq ſich heben, folglich hat man: $M \text{ Sin } \alpha = N \text{ Sin } \beta$.

§. 258.

Folgerung. 1. Es ſey P die Kraft, die unter dieſen Umſtänden den Kräften M und N das Gleichgewicht hält, ſo bekommt man (2. 3.) $P = M \text{ Cos } \alpha + N \text{ Cos } \beta$. Darin für N ſeinen Werth $\frac{M \text{ Sin } \alpha}{\text{Sin } \beta}$ geſetzt, giebt $P = \frac{M \text{ Cos } \alpha \text{ Sin } \beta + M \text{ Cos } \beta \text{ Sin } \alpha}{\text{Sin } \beta} = \frac{M \text{ Sin } (\alpha + \beta)}{\text{Sin } \beta} = \frac{N \text{ Sin } (\alpha + \beta)}{\text{Sin } \alpha}$.

2. Sind M und N bloß Widerſtandskräfte, die nur das weitere Eindringen des Keiles zwiſchen die Flä-

chen EO und FO verhindern, ſo wird gegenſeitig: $M = \frac{P \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $N = \frac{P \sin \alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

3. Wenn das Dreyeck ACB gleichſchenklig, oder AC = BC iſt, ſo iſt $\alpha = \beta$, folglich wird alsdann

$$M = N = \frac{P \sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{P}{2 \cos \alpha}$$

3. Man ſetze den Winkel bey $C = \gamma$, ſo hat man: $\gamma = 180° - 2\alpha$, alſo $\alpha = 90° - \frac{1}{2}\gamma$, und daher $M = N = \frac{P}{2 \sin \frac{1}{2}\gamma}$. Je ſpitzer alſo der Winkel ACB iſt, deſto größer iſt der Seitendruck auf die anliegenden Flächen, folglich deſto weniger Kraft erforderlich, um ſie zum Weichen zu bringen.

5. Liegen die Berührungspunkte E und F in einer Linie EF, die mit AB parallel iſt, ſo iſt AE = BF, folglich ſind die rechtwinkligen Dreyecke AEG und BFG kongruent, alſo AG = BG; daher iſt das Dreyeck AGB gleichſchenklich, folglich AD = BD. Die Kraft P muß alſo in dieſem Falle auf die Mitte des Rückens wirken.

Vom Drucke der Gewölbe gegen ihre Widerlagen.

§. 259.

Eine der nutzbarſten Anwendungen findet unſtreitig die Theorie des Keiles bey den Gewölben. Jedem, der nur irgend ein Gewölbe mit einiger Aufmerkſamkeit

betrachtet hat, muß von ſelbſt dabey einfallen, daß die einzelnen Wölbſteine, als vielförmige Maſſen, auch wie Keile aufeinander wirken, und durch den Seitendruck, den ſie gegen einander ausüben, dem Gewölbe jene Feſtigkeit ertheilen, die es vor andern Werken der Baukunſt ſo ſehr auszeichnet. Freilich haben nähere Unterſuchungen über dieſen Gegenſtand gezeigt, daß nicht bey jeder Form des Gewölbebogens ein vollkommenes Gleichgewicht der Wölbſteine unter ſich ſtatt finde, aber dies thut auch eigentlich zur Sache nichts; es kommt nur darauf an, ob die Widerlagen, auf die ſich die ganze Maſſe ſtützt, feſt genug ſtehen, um der Gewalt, womit die Wölbſteine einander ſeitwärts zurück zu drängen ſtreben, gehörigen Widerſtand leiſten zu können. Hiervon ſoll in den folgenden §§ gehandelt werden.

§. 260.

Fig. 72. **Aufgabe.** Den Druck zu beſtimmen, den der Wölbſtein IEie eines Gewölbebogens AIB gegen die anliegenden Seitenflächen IE und ie ausübt.

Aufl. 1) Es ſey w das Gewicht des Wölbſteins, das auf ſeinen Schwerpunkt o nach der Vertikale on wirkt. Man fälle aus o auf die Fugen ie und IE die Perpendikel op und oq und nenne p und q die Kräfte, worin das Gewicht w nach dieſen Richtungen zerfällt, ſo hat man (§. 49.)

$$p \text{ Sin } nop = q \text{ Sin } noq$$
$$q \text{ Sin } poq = w \text{ Sin } nop$$

2) Setzt man den Winkel Eqv und epu, welche

die Fugenſchnitte IE, ie mit der Vertikale machen $= I$ und I', ſo wird $nop = opu = 90° - I'$, $noq = oqv = 90° + I$, $poq = 180° - (I' - I)$ folglich:

$$p \, \mathrm{Cos}\, I' = q \, \mathrm{Cos}\, I$$

$$q \, \mathrm{Sin}\, (I' - I) = w \, \mathrm{Cos}\, I'.$$

3) Daher wird $q = \frac{w \, \mathrm{Cos}\, I'}{\mathrm{Sin}\, (I' - I)}$, $p = \frac{q \, \mathrm{Cos}\, I}{\mathrm{Cos}\, I'}$ $= \frac{w \, \mathrm{Cos}\, I}{\mathrm{Sin}\, (I' - I)}$.

§. 261.

Man nenne w' das Gewicht des zunächſt darunter liegenden Wölbſteins $ie\, i'e'$; I'' den Winkel, den die Fuge $i'e'$ mit der Vertikale macht, p' und q' den ſenkrechten Druck auf die Fuge $i'e'$ und ie, ſo hat man auf gleiche Art:

$$p' = \frac{w' \, \mathrm{Cos}\, I'}{\mathrm{Sin}\, (I'' - I')}, \quad q' = \frac{w' \, \mathrm{Cos}\, I''}{\mathrm{Sin}\, (I'' - I')}.$$

Von dieſen iſt letzterer dem Drucke p entgegengeſetzt, und hebt ihn alſo zum Theil auf; daher iſt die Kraft, womit der obere Wölbſtein IEie den untern $iei'e'$ nach Richtung op fortzudrängen ſtrebt, $= p - q' =$

$$\frac{w \, \mathrm{Cos}\, I}{\mathrm{Sin}\, (I' - I)} - \frac{w' \, \mathrm{Cos}\, I''}{\mathrm{Sin}\, (I'' - I')}$$

§. 262.

Man kann den ganzen Gewölbebogen als eine Zuſammenſetzung aus einer unendlichen Menge einzelner Theile anſehen: denn offenbar leidet darunter ſeine Feſtigkeit nicht, ſondern gewinnt vielmehr, wenn am

Ende von den unendlich vielen Fugenſchnitten nur einige wirklich vorhanden ſind. Verbindet man mit dieſer Vorausſetzung noch die zweyte, daß die Fugenſchnitte auf dem innern Bogen AIB ſenkrecht ſtehen, oder Normalen deſſelben ſeyn ſollen, ſo ändern ſich die vorigen Reſultate folgendermaßen ab:

Fig. 73. 1) Der Winkel mIr, den die Normale Ir mit der Vertikale Im macht, iſt $= I$; der Winkel $I' = I + dI$; $I'' = I + 2dI + d^2I$. Nimmt man daher in der Vertikale, die durch den Scheitel der Kurve AIB geht, die Abſciſſe $AP = x$, ſetzt die dazu gehörige Ordinate $PI = y$, und das Element des Bogens $Ii = ds$; ſo wird $\sin I = \sin miI = \frac{dx}{ds}$, $\cos I = \frac{dy}{ds}$, und der Krümmungshalbmeſſer bey I, den wir r nennen wollen, $= \frac{ds}{dI}$.

Fig. 72. 2) Setzt man ferner die Länge des Fugenſchnittes $IE = z$, ſo wird

$$Ii : Ee = r : r + z, \text{ alſo}$$

$$Ee = \left(1 + \frac{z}{r}\right) ds,$$

folglich das arithmetiſche Mittel zwiſchen Ii und Ee $= \left(1 + \frac{z}{2r}\right) ds$, und der Inhalt des Trapeziums IEie $= \left(1 + \frac{z}{2r}\right) zds = \left(1 + \frac{zdI}{2ds}\right) zds = zds + \frac{1}{2} z^2 dI$.

3) Da es geſtattet iſt, die ganze Rechnung auf das Profil des Gewölbes zu beziehen, und das ſpecifi-

ſche Gewicht der Gewölbmaſſe = 1 zu ſetzen, ſo drückt letztere Formel zugleich das Gewicht w des unendlich ſchmalen Wölbſteins IEie aus. Ferner iſt $w' = w + dw$, und, wenn man ds als beſtändig annimmt: $dw = dzds + zdzdI + \frac{1}{2} z\, d^2I$.

4) Demnach wird der Druck $p = \frac{w \operatorname{Cos} I}{\operatorname{Sin} dI}$ $= \frac{w \operatorname{Cos} I}{dI}$, und der ihm entgegengeſetzte $q' = \frac{w' \operatorname{Cos}(I + 2dI)}{\operatorname{Sin}(dI + d^2I)} = \frac{w'(\operatorname{Cos} I - 2 \operatorname{Sin} IdI)}{dI + d^2I}$

$$= \frac{w}{dI}\left(\operatorname{Cos} I - 2 \operatorname{Sin} IdI - \operatorname{Cos} I . \frac{d^2I}{dI}\right) + \frac{\operatorname{Cos} Idw}{dI};$$

alſo der Ueberſchuß des erſtern über letztern, den wir w nennen wollen, $= 2w \operatorname{Sin} I + w \operatorname{Cos} I . \frac{d^2I}{dI^2}$ $- \operatorname{Cos} I . \frac{dw}{dI}$.

5) Setzt man nun hierin für w und dw ihre Werthe, ſo erhält man:

$$w = (zds + \tfrac{1}{2} z^2dI)\left(2 \operatorname{Sin} I + \frac{\operatorname{Cos} Id^2I}{dI^2}\right) - \frac{\operatorname{Cos} Idzds}{dI} z \operatorname{Cos} Idz - \tfrac{1}{2} z^2 \operatorname{Cos} I . \frac{d^2I}{dI^2}$$

$$= 2z \operatorname{Sin} Ids + \frac{zds \operatorname{Cos} Id^2I}{dI^2} + z^2 \operatorname{Sin} IdI - \frac{\operatorname{Cos} Idzds}{dI} - z \operatorname{Cos} Idz$$

6) Da $d\left(\frac{\operatorname{Cos} I}{dI}\right) = -\operatorname{Sin} I - \frac{\operatorname{Cos} I d^2 I}{dI^2}$, ſo wird:

$$\frac{\operatorname{Cos} I d^2 I}{dI^2} = -d\left(\frac{\operatorname{Cos} I}{dI}\right) - \operatorname{Sin} I, \text{ alſo}$$

$$\omega = z \operatorname{Sin} I ds - z ds\, d\left(\frac{\operatorname{Cos} I}{dI}\right) + z^2 \operatorname{Sin} I dI - \frac{\operatorname{Cos} I dz ds}{dI} - z \operatorname{Cos} I dz$$

$$= z dx - z d.\left(\frac{r dy}{ds}\right) - z^2 d\left(\frac{dy}{ds}\right) - \frac{(r+z)\, dy dz}{ds}$$

§. 263.

Aufgabe. Die Geſtalt und Dimenſion des innern Gewölbbogens AIB iſt gegeben, nebſt der Dicke IE des Gewölbes für jeden Punkt I; man fragt, wie viel Breite KF der Widerlage BFKA gegeben werden müſſe, damit ſie hinlängliche Stabilität bekomme, um den Seitendruck des Gewölbes aushalten zu können.

Aufl. 1) Man ziehe aus dem Schwerpunkte o des Elementes IEie die beyden Linien oI und oNZ; erſtere durch den Anfang des Bogens Ii, letztere vertikal, oder parallel mit ADL; ſo hat man $oI = \sqrt{(qI^2 + oq^2)}$, und da oq unendlich klein iſt, $oI = qI$.

2) Nun kann man mit Sicherheit den Punkt q in der Mitte von IE annehmen; ſetzt man alſo $IE = z$, ſo wird $Io = \frac{1}{2}z$, und, weil der Winkel qIo unendlich klein, alſo nIo unendlich wenig von $nIq = 90° - I$ verſchieden iſt: $on = \frac{1}{2}z \operatorname{Cos} I$, $nI = \frac{1}{2}z \operatorname{Sin} I$.

3) Es ſey des Gewölbes Höhe AD $=$ a, ſeine halbe Weite oder Spannung BD $=$ b, die Höhe der Widerlage BF $=$ h, ſeine geſuchte Breite KF $=$ f; ſo wird nN $=$ PD $=$ a $-$ x, alſo oN $=$ a $-$ x $+$ $\frac{1}{2}$z Cos I. Ferner ZL $=$ nP $=$ y $+$ $\frac{1}{2}$z Sin I, folglich die Entfernung VZ $=$ b $+$ f $-$ y $-$ $\frac{1}{2}$z Sin I, welche v heißen ſoll.

4) Man zerlege die Kraft ω, womit das Element IEie auf das nächſtfolgende nach der Richtung op wirkt, in eine horizontale $= \omega$ Cos nIi $= \omega$ Cos I, und in eine vertikale $= \omega$ Sin I. Erſtere hat das Moment ωu Cos I $= \omega$ Cos I (a $+$ h $-$ x $+$ $\frac{1}{2}$z Cos I) die Widerlage um den Punkt K zu drehen, und ſie ſo nach außen zu umzuſtürzen; letztere hat das entgegengeſetzte Umdrehungsmoment ωv Sin I $= \omega$ Sin I (b $+$ f $-$ y $-$ $\frac{1}{2}$z Sin I): daher bleibt dem Elemente w noch das Moment ω (u Cos I $-$ v Sin I) übrig, die Widerlage auswärts hin um K zu drehen.

5) Ein ſolches Moment hat jedes andere Element des Gewölbes; wenn man daher alle dieſe Momente ſummirt, ſo bekommt man für das Moment des ganzen Bogens AIB das Integral $\int \omega$ (u Cos I $-$ v Sin I), das nach geſchehenem Kalkul von x $=$ o, bis x $=$ a genommen werden muß.

6) Das letzte Element bey B übt den Druck p unmittelbar auf die Widerlage aus, alſo fällt der entgegengeſetzte Druck q′ hier weg; woraus erhellet, daß das Moment dieſes Elementes beſonders in Rechnung gebracht werden müſſe. Man ſetze den Winkel I für die

Fuge Bb $= \zeta$, die Länge dieſes Fugenſchnittes $= e$, den Krümmungshalbmeſſer des Bogens an dieſer Stelle $= \varkappa$, ſo wird $w = eds + \frac{1}{2}e^2 dI$, und $p = \frac{w \operatorname{Cos} I}{dI}$ (§. 262. 4.) $= (e\varkappa + \frac{1}{2}e^2) \operatorname{Cos} \zeta$.

7) Dieſer Druck zerfällt in einen horizontalen $= (e\varkappa + \frac{1}{2}e^2) \operatorname{Cos} \zeta^2$, und in einen vertikalen $= (e\varkappa + \frac{1}{2}e^2) \operatorname{Cos} \zeta \operatorname{Sin} \zeta$, wovon erſterer das Moment $(e\varkappa + \frac{1}{2}e^2)\, h \operatorname{Cos} \zeta^2$, letzterer das entgegengeſetzte Moment $(e\varkappa + \frac{1}{2}e^2)\, f \operatorname{Cos} \zeta \operatorname{Sin} \zeta$ hat. Beyder Unterſchied iſt $= (e\varkappa + \frac{1}{2}e^2)(h \operatorname{Cos} \zeta^2 - f \operatorname{Sin} \zeta \operatorname{Cos} \zeta)$, der zum vorhergehenden Momente (5) hinzukommt.

8) Da die Widerlage nur um ein geringes Stück von dem Rechtecke abweicht, deſſen Höhe $= h$ iſt, ſo kann man ihren Schwerpunkt G in der Linie GO annehmen, die ihre Baſis $\varkappa F$ halbirt, und ihren Inhalt $= hf$ ſetzen. Nennt man alſo m das ſpecifiſche Gewicht des Mauerwerks, woraus ſie beſteht, ſo iſt ihr Gewicht $= mhf$, und das Moment deſſelben, ſie um K nach innen zu zu drehen, $= KO \cdot mhf = \frac{1}{2} mhf^2$.

9) Wofern nun die Widerlage vor dem Wanken geſchützt ſeyn ſoll, muß dieſes Moment dem vorigen gleich ſeyn, woraus folgende Gleichung entſteht:

$$(e\varkappa + \tfrac{1}{2}e^2)(h \operatorname{Cos} \zeta^2 - f \operatorname{Cos} \zeta \operatorname{Sin} \zeta) + \int \omega (u \operatorname{Cos} I - v \operatorname{Sin} I) = \tfrac{1}{2} mhf^2$$

in der die unbekannte Größe f nur bis auf den zweyten Grad ſteigt.

§. 264.

Wenn der innere und äußere Gewölbbogen concentriſche Halbkreiſe ſind, deren Halbmeſſer $=$ a und $a + e$, ſo hat man:

1) $r = a$, $b = a$, $z = e$, und $\zeta = 90^\circ$, alſo $\mathrm{Cos}\,\zeta = 0$; daher fällt aus jener Gleichung das erſtere Glied ganz weg, und man behält bloß:

$$\int \omega \,\mathrm{Cos}\, I \left(h + a - x + \frac{edy}{2ds}\right) - \int \omega \,\mathrm{Sin}\, I$$

$$\left(f + a - y - \frac{edx}{ds}\right) = \tfrac{1}{2} mhf^2.$$

2) Da ferner für den Kreis $\frac{dx}{ds} = \frac{y}{a}$, und $\frac{dy}{ds}$ $= \frac{a' - x}{a}$ iſt, (§. 89.) ſo wird

$$d\left(\frac{dy}{ds}\right) = - \frac{dx}{a} \text{ und}$$

$$d\left(\frac{rdy}{ds}\right) = ad\left(\frac{dy}{ds}\right) = - dx; \text{ alſo}$$

$$\omega = 2edx + \frac{e^2dx}{a} = \frac{(2ae + e^2)\,dx}{a}, \text{ folglich:}$$

$$\omega \,\mathrm{Sin}\, I = \frac{\omega dx}{ds} = \frac{(2ae + e^2)\, ydx}{a^2}, \text{ und}$$

$$\omega \,\mathrm{Cos}\, I = \frac{\omega dy}{ds} = \frac{(2ae + e^2)\,(a - x)\,dx}{a^2}$$

3) Man ſetze $a - x = t$; $\frac{2a + e}{a} = \lambda$; ſo wird

$dx = - dt$, und $\omega \operatorname{Cos} I = - \frac{\lambda etdt}{a}$; ferner

$u = h + t + \frac{et}{2a} = h + \frac{1}{2}\lambda t$, alſo

$\omega u \operatorname{Cos} I = - \frac{\lambda ehtdt}{a} - \frac{\lambda^2 et^2 dt}{2a}$, und

$\int \omega u \operatorname{Cos} I = C - \frac{\lambda eht^2}{2a} - \frac{\lambda^2 et^3}{6a}$

4) Da dies Integral für $x = o$, oder $t = a$ verſchwinden ſoll, ſo wird $c = \frac{\lambda eha^2}{2a} + \frac{\lambda^2 ea^3}{6a} = \frac{1}{2}\lambda eha + \frac{1}{6}\lambda^2 ea^2$, dies iſt zugleich ſein vollſtändiger Werth, weil für $x = a$, $t = o$ wird.

5) Ferner hat man $\omega \operatorname{Sin} I = \frac{\lambda eydx}{a}$, $v = f + a - y - \frac{ey}{2a} = f + a - \frac{1}{2}\lambda y$, alſo $v\omega \operatorname{Sin} I = \frac{\lambda e(f + a) ydx}{a} - \frac{\lambda^2 ey^2 dx}{2a}$

6) Nun iſt $\int ydx$, für $x = a$, = dem Inhalte des Quadranten, alſo $= \frac{1}{4}\pi a^2$; daher $\frac{\lambda e(f + a)}{a}$. $\int ydx = \frac{1}{4}\pi\lambda e(af + a^2)$, und

7) $\int y^2 dx = \int (2ax - x^2) dx = ax^2 - \frac{1}{3}x^3$, welches für $x = a$ den Werth $\frac{2}{3}a^3$ bekommt. Alſo wird $\frac{\lambda^2 e}{2a} \int y^2 dx = \frac{1}{3}\lambda^2 ea^2$, folglich:

$\int v\omega \operatorname{Sin} I = \frac{1}{4}\pi\lambda e(af + a^2) - \frac{1}{3}\lambda^2 ea^2$.

8) Dieſe gefundenen Werthe der beyden Integrale in die Gleichung (1) ſubſtituirt, geben:

$\frac{1}{2}mhf^2 + \frac{1}{4}\pi\lambda eaf - \frac{1}{2}\lambda e[ah + (\lambda - \frac{1}{2}\pi)a^2] = 0$

oder wenn man

$\frac{(2ae + e^2)\pi}{mh} = A$ und

$\frac{2ae + e^2}{mh} . [h + e + (2 - \frac{1}{2}\pi)a] = B$ ſetzt:

$f^2 + Af + B = 0$, woraus

$f = -\frac{1}{2}A + \sqrt{(B' + \frac{1}{4}A^2)}$ wird.

Exempel. Es wird a = 10 Fuß, e = $1\frac{5}{6}$ Fuß, h = 10 Fuß, und da bey m das ſpecifiſche Gewicht der Gewölbmaſſe als Einheit zum Grunde liegt, ſo ſey hier auch m = 1.

Demnach wird $2ae + e^2 = 40,027778$

$\log(2ae + e^2) = 1,6023014$

$\log \pi = 0,4971499$

$\log(2ae + e^2)\pi = 2,0995113$

$(2ae + e^2)\pi = 125,75095$

und $A = 6,287647$.

Ferner $(2 - \frac{1}{2}\pi)a = 4,292037$

$h + e = 11,833333$

$h + e + (2 - \frac{1}{2}\pi)a = 16,125370$

wovon der Log: = 1,2075097

hierzu $l(2ae + e^2) = 1,6022614$

giebt: 2,8098711

wozu die Zahl: 645,46274 gehört.

Daher wird B = 64,546274 und

f = 5,4835 = 5 Fuß $5\frac{4}{7}$ Zoll.

Anmerk. Herr Langsdorf trägt in ſeiner Hydraulik pag. 259. eine andere Methode vor, die erforderliche Breite der Widerlagen für kreisförmige Gewölbe zu finden, die im gegenwärtigen Falle $f = 5{,}026$ Fuß giebt. Es iſt nicht möglich, eine Vergleichung zwiſchen ſeiner Formel und der meinigen anzuſtellen, weil ſie Größen enthält, die man zuvor durch eine Art von Falſi beſtimmen muß; aber auf kleinere Reſultate führt ſie gewiß jedesmal, da ſie auf der Vorausſetzung beruhet, daß man den halben Gewölbbogen AIB als eine Zuſammenſetzung aus zweyen ſoliden Stücken anſehen könne.

§. 265.

Die **gedruckten** Bogen werden jetzt gewöhnlich aus dreyen oder mehrern Kreisbogen, die verſchiedene Halbmeſſer haben, zuſammengeſetzt *). Bey dieſer Verzeichnungsart herrſcht ſehr viel Willkührliches, und es iſt gewiß nicht leicht, ſondern erfordert ungemein viel praktiſchen Scharfblick, ſie am bequemſten und vortheilhafteſten einzurichten; hat man aber bereits eine beſtimmte Konſtruktionsmethode erwählt, und in der Ausführung bewährt gefunden, ſo iſt für ſie die Berechnung der Breite der Widerlagen nur umſtändlicher, aber durchaus nicht verwickelter, als beym einfachen Halbkreiſe. Zur nähern Erläuterung dieſes Kalkuls mag folgender beſondere Fall dienen:

§. 266.

Fig. 74. Der gedruckte Bogen BAb beſtehe aus dreyen Kreisbogen: dem mittlern lAi, der durch die Scheitel-

linie

*) S. Müller's analytiſch-praktiſche Abhandlung über die Verzeichnung großer gedruckter Bogen. Göttingen 1792.

linie AD halbirt wird, und den Seitenbogen IB, ib, die der Symmetrie gemäß kongruent ſind, ſo ergeben ſich unmittelbar dieſe Folgen:

1) Der Mittelpunkt O des Bogens IAi muß in der Verlängerung der Vertikale AD angenommen werden; daher ſchneiden die Halbmeſſer IO, iO die Baſis Bb in Punkten C und c, die von D, folglich auch von B und b gleich weit abſtehen.

2) Die Linie IO iſt eine gemeinſchaftliche Normale der Bogen IA und IB, und muß alſo zugleich durch den Mittelpunkt des letztern gehen. Soll ſich nun dieſer Bogen über BD Anfangs ſenkrecht erheben, ſo muß ſein Mittelpunkt auch in BD, folglich in den Durchſchnitt beyder Linien IO und BD, d. i. in C, fallen. Eben dies gilt auf der andern Seite vom Bogen bi.

3) Es ſey nun die Höhe des Gewölbes $AD = a$, die halbe Weite $BD = b$; ferner die Amplitude des obern Bogens $Ii = 2\alpha$, die von BI oder $bi = \beta$, der Halbmeſſer AO zu erſtern $= g$, der zu letztern $= \varkappa$; ſo wird, wenn man durch I und i die Sehne Ii, und auf BD das Perpendikel $I\pi$ zieht:

$$A\omega = g\,(1 - \text{Cos}\,\alpha),\quad I\pi = \varkappa\,\text{Sin}\,\beta, \text{ alſo}$$

$$g\,(1 - \text{Cos}\,\alpha) + \varkappa\,\text{Sin}\,\beta = a.$$

4) Ferner $I\omega = g\,\text{Sin}\,\alpha$, $B\pi = \varkappa\,(1 - \text{Cos}\,\beta)$, folglich:

$$g\,\text{Sin}\,\alpha + \varkappa\,(1 - \text{Cos}\,\beta) = b.$$

5) Beyde Gleichungen verbunden, geben:

$$g = \frac{b \operatorname{Sin}\beta - a(1 - \operatorname{Cos}\beta)}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin}\beta - (1 - \operatorname{Cos}\alpha)(1 - \operatorname{Cos}\beta)}$$ und

$$\varkappa = \frac{a \operatorname{Sin}\alpha - b(1 - \operatorname{Cos}\alpha)}{\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta - (1 - \operatorname{Cos}\alpha)(1 - \operatorname{Cos}\beta)}$$

6) Da überhaupt $\operatorname{Sin}\eta = 2 \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\eta \operatorname{Cos}\frac{1}{2}\eta$, und $1 - \operatorname{Cos}\eta = 2 \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\eta^2$ iſt, ſo laſſen ſich die eben gefundenen Ausdrücke noch unter folgende Form bringen:

$$g = \frac{b \operatorname{Cos}\frac{1}{2}\beta - a \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\beta}{2 \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+\beta)}$$

und: $$\varkappa = \frac{a \operatorname{Cos}\frac{1}{2}\alpha - b \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\alpha}{2 \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\beta \operatorname{Cos}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

Exempel. Es ſey $2\alpha = \beta = 60°$, ſo iſt $\operatorname{Sin}\alpha = \operatorname{Cos}\beta = \frac{1}{2}$, und $\operatorname{Cos}\alpha = \operatorname{Sin}\beta = \sqrt{\frac{3}{4}}$; folglich wird in den erſtern Formeln für g und $\varkappa$ (5) der Nenner $= \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$, alſo:

$$g = \frac{b\sqrt{3} - a}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(b\sqrt{3} - a).(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{3b - a + (b - a)\sqrt{3}}{2}$$

und $$\varkappa = \frac{a - b(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{3} - 1} = \frac{b + a - (b - a)\sqrt{3}}{2}$$

§. 267.

Aufgabe. Der äußere Bogen des Gewölbes ſey mit dem innern parallel, und letzterer auf die eben angezeigte Art konſtruirt; man ſucht die erforderliche Breite der Widerlagen.

Aufl. 1) Da der Bogen AIB aus zweyen ungleichartigen Theilen AI, IB beſteht, ſo muß man das Integral $\int (u\omega \text{ Cos I} - v\omega \text{ Sin I})$ (§. 263. 5.) für jeden dieſer Theile beſonders berechnen, und nachher beyde Reſultate zuſammen addiren.

2) Nun hat man aus §. 264. zuvörderſt für den obern Bogen AI:

$$\omega \text{ Sin I} = \frac{(2ge + e^2)\, ydx}{g^2}$$

$$\omega \text{ Cos I} = \frac{(2ge + e^2)(g - x)\, dx}{g^2}$$

$$u = a + h - x + \frac{e(g - x)}{2g}$$

$$v = b + f - y - \frac{ey}{2g}$$

oder, wenn man wieder $\frac{2g + e}{g} = \lambda$, und außerdem $a + h + \frac{1}{2}e = c$ ſetzt; $\omega \text{ Sin I} = \frac{\lambda eydx}{g}$, $\omega \text{ Cos I} = (\lambda e - \frac{\lambda ex}{g})\, dx$, und $u = c - \frac{1}{2}\lambda x$, $v = b + f - \frac{1}{2}\lambda y$.

3) Daher wird $\int u\omega \text{ Cos I} = \lambda ecx - (\frac{2\lambda ec + \lambda^2 eg}{4g})\, x^2 + \frac{\lambda^2 ex}{6g}$, und für $I = 30^\circ$, oder $x = g(1 - \text{Cos } 30^\circ) = \frac{1}{2}g(2 - \sqrt{3})$, der vollſtändige Werth dieſes Integrals $= \frac{1}{8}\lambda ecg + \frac{1}{48}\lambda^2 eg^2 (5 - 3\sqrt{3})$.

4) Ferner $\int v\omega \text{ Sin I} = \frac{\lambda e(b+f)}{g}\int ydx - \frac{\lambda^2 e}{2g}\int y^2 dx$; $\int ydx$ = Sect. AOI — ΔFOI $= \frac{1}{12}\pi g^2 - \frac{1}{8}g^2\sqrt{3} = \frac{1}{24}g^2(2\pi - 3\sqrt{3})$; $\int y^2 dx = gx^2 - \frac{1}{3}x^3$, und für $x = \frac{1}{2}g(2-\sqrt{3})$, $= \frac{1}{24}g^3(16 - 9\sqrt{3})$; daher $\int v\omega \text{ Sin I} = 0{,}045293\ \lambda eg(b+f) - 0{,}008574\ \lambda^2 eg^2$, alſo das Moment:

$\int(u\omega \text{ Cos I} - v\omega \text{ Sin I}) = \frac{1}{8}\lambda egc - 0{,}045293\ \lambda eg(b+f) + 0{,}004487\ \lambda^2 eg^2$.

5) Da der untere Bogen IB von $I = 30°$ angeht, und bey $I = 90°$ endigt, ſo betrachte man ihn als ein Stück vom ganzen Quadranten, berechne den Werth des Integrals $\int(u\omega \text{ Cos I} - v\omega \text{ Sin I})$ für $I = 90°$, der M heißen mag, und ſubtrahire davon ſeinen Werth M′ für $I = 30°$; der Ueberreſt M — M′ giebt alsdann das geſuchte Moment des Bogens IB.

6) Hierbey iſt nun $u = \varkappa + h - x + \frac{e(\varkappa - x)}{2\varkappa}$, und $v = b + f - y - \frac{ey}{2\varkappa}$; ſetzt man alſo $\frac{2\varkappa + e}{\varkappa} = \lambda'$, und $\varkappa + h + \frac{1}{2}e = d$, ſo wird:

$M = \frac{1}{2}\lambda' eh\varkappa + \frac{1}{2}\lambda'^2 e\varkappa^2 - \frac{1}{4}\pi\lambda' e(f\varkappa + \varkappa^2)$ (§. 246. No. 4 und 7.) $M' = \frac{1}{8}\lambda' e\varkappa d - 0{,}045293\ \lambda' e\varkappa(\varkappa + f) + 0{,}004487\ \lambda'^2 e\varkappa^2$, (4.) folglich

$M - M' = \frac{1}{8}\lambda' e\varkappa(4h - d) + 0{,}495513\ \lambda'^2 e\varkappa^2 - 0{,}740105\ \lambda' e(\varkappa f + \varkappa^2)$.

7) Dies Moment zum vorhergehenden (4.) hinzu addirt, und

$\frac{1}{8}\lambda egc - 0{,}045293\ \lambda egb + 0{,}004487\ \lambda^2 eg^2 = A,$

$0{,}045293\ \lambda eg = C$

$\frac{1}{8}\lambda' e\varkappa\,(4h - d) + 0{,}495513\ \lambda''^2 e\varkappa^2 - 0{,}740105$

$\lambda' e\varkappa^2 = B'$

$0{,}740105\ \lambda' e\varkappa = D$ geſetzt, giebt endlich folgende Gleichung:

$$f^2 + \frac{2(C + D)}{mh} . f - \frac{2(A + B)}{mh} = 0.$$

Exempel. Es ſey $a = 20'$, $b = 30'$, $e = 1\frac{1}{4}'$, $h = 10'$, $m = 1$; ſo wird $g = 43{,}66025$ (§. 266.), $\varkappa = 16{,}33975$, $\lambda = 2{,}02863$, $\lambda' = 2{,}07650$, $c = 30{,}62500$, $4h - d = 13{,}03525$; $\frac{1}{8}\lambda egc = 423{,}824$; $0{,}004487\ \lambda^2 eg^2 = 43{,}999$, $C = 5{,}01453$; daher $A = 317{,}387$. Ferner $\frac{1}{8}\lambda' e\varkappa\,(4h - d) = 69{,}106$; $0{,}495513\ \lambda''^2 e\varkappa = 713{,}050$; $0{,}740105\ \lambda' e\varkappa^2 = 512{,}392$; $B = 269{,}264$, $D = 31{,}389$. Man erhält alſo:

$$f^2 + 7{,}281\,f - 117330 = 0,$$

und daraus $f = 7{,}786$ Fuß.

Gewölbe mit Bekleidung.

§. 268.

Wenn der äußere Bogen des Gewölbes mit Mauerwerk bekleidet iſt, oder ſonſt eine Laſt zu tragen hat, ſo läßt ſich der Seitendruck der ganzen Maſſe gegen die Widerlagen nicht nach dem bloßen Gewichte der Wölbſteine ſchätzen; es bedarf alſo in dieſem Falle der

vorhin geführte Kalkul noch einer Korrektion, die auf folgende Art beſtimmt werden kann:

Fig. 75. 1) Man ſetze die Höhe der Säule MEme, die auf dem Elemente Ee des äußern Bogens aEb ruhet, = t, ihr Gewicht = σ, ſo zerfällt dies in eine Kraft, σ tang I, nach der Horizontale ES, und in eine ſenkrecht auf Ee, = σ Sec. I.

2) Erſtere drückt unmittelbar gegen die Widerlage, und hat alſo das Umdrehungsmoment σu tang I.

3) Letztere bringt dadurch, daß ſie auf den Rücken des Keiles EIei ſenkrecht wirkt, einen Seitendruck auf die anliegenden Elemente hervor, der ſich aus §. 258. beſtimmen läßt. Da nemlich die Fugen IE, ie, wenn man ſie ſich bis zu ihrem Durchſchnitte verlängert denkt, den Winkel dI miteinander machen, ſo hat man hier

$$\gamma = dI,\ P = \sigma\ \text{Sec.}\ I,\ \text{alſo}\ M = N = \frac{\sigma\ \text{Sec}\ I}{2\ \text{Sin}\ \frac{1}{2}\ dI}$$

$$= \frac{\sigma\ \text{Sec}\ I}{dI}.$$

4) Hiervon den entgegengeſetzten Druck $\frac{\sigma'\ \text{Sec}\ I'}{dI'}$ des folgenden Elementes ſubtrahirt, bleibt vom erſtern der Theil $-\, d\left(\frac{\sigma\ \text{Sec}\ I}{dI}\right)$ übrig, der auf die Widerlage wirkt. Wir wollen ihn ψ nennen.

5) Setzt man in §. 262. (2) z = e, ſo wird $Ee = \left(1 + \frac{e}{r}\right) ds$, folglich $Eu = Ee\ \text{Cos}\ I =$

$(1+\frac{e}{r})$ Cos Ids; alſo der Inhalt von MEme $=$ $(1+\frac{e}{r})$ t Cos Ids $= \frac{\sigma}{m}$. Daher $\frac{\sigma \text{ Sec I}}{dI} = mt$ $(r+e)$, und $\psi = -mtdr - m(r+e)dt$.

6) Um ſo viel wird alſo die Kraft ω durch das Gewicht σ vermehrt; daher iſt jezt das Umdrehungsmoment des Gewölbes $= \int (\omega + \psi)$ u Cos I $-$ $(\omega + \psi)$ v Sin I).

7) Zu dieſem kommt nun noch die Summe der Momente σu tang I (2), welche $= \int (1+\frac{e}{r})$ mtu Sin Ids $= m\int(1+\frac{e}{r})$ tudx iſt.

8) Dagegen iſt die Widerlage jezt um das Stück BZ höher als vorhin; ſezt man dies $= l$, ſo wird ihr Gewicht $= m(h+l)f$, und das Moment deſſelben $= \frac{1}{2}m(h+l)f^2$, wodurch folgende Gleichung entſteht:

$$m\int(1+\frac{e}{r})\,tudx + \int(\omega+\psi)(u \text{ Cos I} - v \text{ Sin I}) = \frac{1}{2}m(h+l)f^2.$$

§. 269.

Es ſey der Gewölbbogen ein Halbkreis vom Halbmeſſer a, der Rücken OMZ geradlinigt und horizontal, und ſeine vertikale Höhe aO über dem Schlußſteine des Gewölbes $= g$, ſo wird $t = g + a + x - e$ Cos I $= g + e + x - \frac{e(a-x)}{a}$, oder wenn man $\frac{a+e}{a}$

$= \xi$ ſetzt, $t = g + \xi x$, $\psi = - m\xi^2 a dx$, alſo $\omega + \psi = (e\lambda - m\xi^2 a)\, dx$.

Setzt man daher $\lambda - m \,.\, \frac{\xi^2 a}{e} = \lambda'$, ſo erhält man (§. 264.) $\int (\omega + \psi)(u \operatorname{Cos} I - v \operatorname{Sin} I) = \frac{1}{2}\lambda' eha + \frac{1}{2}\lambda'^2 ea^2 - \frac{1}{4}\pi\lambda' e\,(af + a^2)$.

Ferner iſt $u = a + h - x + \frac{e(a - x)}{2a}$, oder, wenn $a + h + \frac{1}{2}e = c$ geſetzt wird, $u = c - \frac{1}{2}\lambda x$; daher $\int (1 + \frac{e}{r})\, tudx = \xi\int (g + \xi x)(c - \frac{1}{2}\lambda x)\, dx = \xi cgx + (\frac{1}{2}\xi^2\sigma - \frac{1}{4}\lambda\xi g)\, x^2 - \frac{1}{6}\xi^2\lambda x^3$, welches für $x = a$ den Werth $\xi cga + (\frac{1}{2}\xi^2 c - \frac{1}{4}\lambda\xi g)\, a^2 - \frac{1}{6}\xi^2\lambda\alpha^3$ bekommt.

Man ſetze nun noch
$(\xi cg + \frac{1}{2}\lambda' eh)\, a + (\frac{1}{2}\xi^2 c - \frac{1}{4}\lambda\xi g - \frac{1}{4}\pi\lambda' e + \frac{1}{2}\lambda'^2 e)\, a^2 - \frac{1}{6}\xi^2\lambda a^3 = A$, ſo wird endlich:

$A - \frac{1}{4}\pi\lambda' eaf = \frac{1}{2}m\,(h + 1)\, f^2$, oder

$$f^2 + \frac{\pi\lambda' ea}{2m\,(h + 1)}\, f - \frac{2A}{m\,(\lambda + 1)} = 0$$

Exempel. Es ſey $a = 10'$, $h = 10'$, $e = 1\frac{5}{6}$, $g = 2'$, $m = 1$; ſo hat man $\xi = \frac{71}{66}$, $\lambda = \frac{131}{66}$, $\lambda' = \frac{2ae + e^2 - (a + e)^2}{ae} = -\frac{a}{e} = -\frac{60}{11}$, ferner $b = a + e + g = 13\frac{5}{6}$, $h + l = 23\frac{5}{6}$, $c = 20\frac{11}{12}$. Daraus wird nun $A = -0{,}497223\, a + 48{,}47948\, a^2 - 0{,}50954\, a^3 = 4333{,}44$, und

$$f^2 - 6{,}591\, f - 363{,}635 = 0$$

alſo $f = 22{,}647$ Fuß.

Anmerk. Auſſer den hier betrachteten Tonnengewölben giebt es noch mancherley andere Gewölbarten, unter denen die ſogenannten Kuppelgewölbe (voutes en dôme) beſonders für die Statik ein ſehr wichtiger Gegenſtand ſind. Da bey dieſen die Berechnung des Seitendrucks auf eine ganz andere Art geführt werden muß, ſo geſtattet es der Zweck dieſes Buches nicht, mich näher darauf einzulaſſen. Man ziehe darüber folgende Schriftſteller zu Rathe:

Boſſut, Memoires de l'acad. de Paris, 1770.

Friſi, Opera Math. P. I. pag. 72. der Hrn. Boſſut's Formel in mehrern Punkten aber zum Theil falſch, abgeändert hat.

Salimbeni de gli archi e delle Volte. Verona 1787; ein in aller Hinſicht vortrefliches Werk.

Neuntes Kapitel.

Von der Cohäſion feſter Körper.

---

§. 270.

Es läßt ſich keine mechaniſche Operation gedenken, bey der nicht feſte **Punkte** ein weſentliches Erforderniß wären. So wird beym Hebel vorausgeſetzt, daß er eine feſte Unterlage habe; die Rolle und der Flaſchenzug werden an einen feſten Punkt aufgehängt, der ſowohl Kraft als Laſt, ſo wie die ganze Maſchine trägt; das Rad dreht ſich um ſeine Axe, die auf feſten Lagern ruhet u. ſ. w.

Dergleichen feſte Punkte kann man nun auf keine andere Art, als durch die unbeweglichen Theile der Ma-

ſchine erhalten, die ſich entweder geradezu, oder mittelbar gegen den Boden ſtützen, und auf ihn den Druck, den ſie auszuhalten haben, übertragen. Alſo muß man von dieſen genau anzugeben wiſſen, wie viel Widerſtand ſie zu leiſten vermögend ſind, damit man ihnen nicht mehr zu tragen überlaſſe, als ihre Feſtigkeit es geſtattet.

§. 271.

Die Feſtigkeit eines Körpers beruhet auf der Stärke des Zuſammenhanges oder der Cohäſionskraft ſeiner Theile, und läßt ſich alſo dadurch beſtimmen, daß man die Kraft ſucht, die erfordert wird, ſeine Theile von einander zu trennen. Da dies auf zweyerley Art geſchehen kann, ſo unterſcheidet man bey ihm **abſolute** und **reſpektive** Feſtigkeit von einander; erſtere beſteht in der Kraft, die man anwenden muß, ihn zu zerreißen; letztere in derjenigen, die nöthig iſt, um ihn zu zerbrechen. Eigentlich liegt dieſer Unterſchied nicht ſowohl im Körper ſelbſt, als vielmehr in der verſchiedenen Art, wie man die Trennung ſeiner Theile hervorzubringen ſucht.

Anmerk. Muſchenbrök hat bey einer Menge von Körpern Verſuche, ſowohl auf die eine als die andere Art, angeſtellt, und uns eine ſchätzbare Sammlung von Reſultaten hinterlaſſen. S. deſſen phyſ. experim. et geom. diſſert. pag. 421 u. f. wie auch deſſen introd. ad phil. nat. Tom. I. Cap. XXI.

Abſolute Feſtigkeit der Körper.

§. 272.

Um einen Körper zu zerreißen, müſſen auf ihn zwey

gleiche und entgegengeſetzte Kräfte angebracht werden; will man bloß eine einzige Kraft dazu anwenden, ſo muß der andere Theil des Körpers ſo befeſtigt ſeyn, daß er dem Zuge der Kraft nicht nachgeben kann. Muſchenbroek befeſtigt den untern Theil des Körpers an den Boden, und bringt ſeinen obern Theil mit dem Arme eines Wagebalken in Verbindung, der durch ein entgegengeſetztes Gewicht aufwärts gezogen wird. Das Nähere dieſer Verſuche findet man a. a. O. umſtändlich beſchrieben.

Wenn ſonſt keine Nebenumſtände eintreten, die den Verſuch ungewiß machen, ſo erfolgt die Trennung allemal in einer Ebene, die auf die Richtung der Kraft ſenkrecht iſt; z. B. beym vertikalen Zuge der Kraft in einem horizontalen Querſchnitte des Körpers.

§. 273.

Wenn der Körper durchaus gleichartig iſt, ſo hängen alle ſeine Theile mit gleicher Kraft unter einander zuſammen; alſo verhält ſich dann ſeine abſolute Feſtigkeit wie die Menge der Theile, die beym Zerreißen deſſelben von einander getrennt werden, folglich wie der Querſchnitt, in dem die Trennung geſchieht.

Daher iſt die Cohäſion eines ſolchen Körpers für die Einheit der Fläche eine unveränderliche Größe, und kann alſo zum Maaße ſeiner Feſtigkeit dienen. Man ſetze ſie $= A$; die Cohäſion des Körpers für jeden andern Querſchnitt $Z = P$, ſo hat man: $P = AZ$.

§. 274.

Folgerung. 1. Iſt alſo von irgend einer Materie das Maaß ihrer Feſtigkeit bekannt, ſo läßt ſich daraus beſtimmen, wie viel Kraft angewandt werden muß, um ein aus ihr beſtehendes Prisma von gegebener Grundfläche ſeiner Länge nach zu zerreißen.

2. Für einen ſenkrechten Cylinder, deſſen Grundfläche einen Halbmeſſer $= r$ hat, iſt $Z = \pi r^2$, alſo $P = \pi A r^2$; daher verhalten ſich die abſoluten Feſtigkeiten zweyer Cylinder, die aus einerley Materie beſtehen, wie die Quadrate der Halbmeſſer ihrer Grundflächen.

3. Gegenſeitig kann man aus Verſuchen, durch die man zwey zuſammen gehörige Werthe von Z und P gefunden hat, den Werth von A beſtimmen.

Exempel. Nach **Muſchenbrök** zerriß ein Parallelapipedum von weißem Glaſe, 0,2 Zoll breit und dick, von 78 ℔; ein anderes, das 0,16 Zoll ins Gevierte hatte, von 50 ℔. Erſterer Verſuch gäbe alſo für 1 Quad. Zoll Fläche $A = 1950$ ℔; letzterer $A = 1953$ ℔.

Stärke des Holzes.

§. 275.

Die Feſtigkeit des Holzes läßt ſich nur einem beſtimmten Maaße unterwerfen, wenn man ſie im eingeſchränkten Sinne nimmt, und ſie bloß auf die Stärke

ſeiner Fibern bezieht, die durch den ganzen Stamm nach einerley Richtung, gewöhnlich parallel mit der centriſchen Linie des Stammes, fortlaufen. Wiewohl auch dieſe wieder unter ſich zuſammenhängen, ſo iſt doch der Grad dieſer Cohäſion größtentheils ſo verſchieden, daß ſich darüber nichts mit Gewißheit feſtſetzen läßt. Wenn alſo ohne weitern Zuſatz von der Stärke des Holzes die Rede iſt, ſo verſteht man darunter allemal die Kraft, die erforderlich iſt, es ſeiner Länge nach zu zerreißen.

§. 276.

Nach den Beobachtungen, die **Muſchenbroek** in ſ. Introd. ad phil. nat. über die Stärke des Holzes mittheilt, haben die verſchiedenen ringförmigen Schichten, aus denen das Holz beſteht, nicht einerley Feſtigkeit; vom Marke an, das allemal am ſchwächſten iſt, nimmt die Stärke der Fiber nach und nach zu, erreicht nahe am Splinte ihr Maximum, und leidet dann wieder bis zur Rinde eine Abnahme. Dagegen findet in der Feſtigkeit eines Stammes ſeiner Länge nach kein merklicher Unterſchied ſtatt, ſo daß man in der Regel den obern Theil deſſelben, und den untern, nahe an der Wurzel, als gleich ſtark annehmen kann. Obgleich der Boden auf die Feſtigkeit des Holzes einigen Einfluß hat, ſo ſtimmen doch die Verſuche bey einerley Holzart ziemlich genau zuſammen; nach Muſchenbroek zerriß ein Parallelepipedum aus Tannenholz, wovon jede Seite 0,27 Zoll hielt, von 600 ℔; ein anderes, das

0,2 Zoll ins Gevierte betrug, von 333 ℔. Nimmt man hierbey den Quad. Zoll Rheinl. als Einheit an, ſo giebt erſterer Verſuch A = 8230 ℔, letzterer A = 8325 ℔; wozwiſchen offenbar wenig Verſchiedenheit herrſcht. Die Verſuche, die er bey andern Holzarten angeſtellt hat, geben auf gleiche Art für das Maaß der Feſtigkeit

des Buchen- und Eſchenholzes	17147 ℔ Cöln.	
des Eichenholzes — —	15773	—
des Erlen- und Lindenholzes	13717	—
des Ulmenholzes — —	13031	—
des Fichtenholzes — —	7344	—

Stärke der Seile.

§. 277.

Wenn man die Seile aus geſtreckten und parallelen Fäden zuſammenſetzte, ſo würde ſich, wegen ihrer cylindriſchen Form, die Stärke derſelben wie das Quadrat ihres Durchmeſſers verhalten (§. 274. 2.); da ſie aber aus gewundenen Fäden beſtehen, ſo kann man nicht erwarten, daß dies Geſetz im ſtrengſten Verſtande bey ihnen ſtatt finde. Indeß wichen doch die Reſultate, die man durch Verſuche gefunden, zumal bey Seilen, die über $\frac{1}{2}$ Zoll Durchmeſſer haben, ſo wenig davon ab, daß man in der Ausübung dieſen Unterſchied außer Acht laſſen, und jenes einfache Verhältniß ihrer Stärke als völlig richtig annehmen darf.

Nach Muſchenbroeks Angaben zerriß

ein Seil von	6	Pariſ. Lin. Diam. von	190	℔
— — —	8	— — — —	330	—
— — —	10	— — — —	540	—
— — —	12	— — — —	750	—
— — —	15	— — — —	990	—
— — —	16	— — — —	1030	—
— — —	20	— — — —	2080	—
— — —	24	— — — —	3000	—
— — —	30	— — — —	4730	—

Hebt man unter dieſen Angaben die vierte aus, ſo erhält man für die Stärke eines Seiles, deſſen Durchmeſſer in pariſer Zollen = a iſt, 750 a^2 ℔. Hiermit ſtimmen die übrigen Angaben ſo genau überein, daß die geringen Abweichungen, da ſie überdies ſehr unregelmäßig ſind, auch wohl von zufälligen Nebenurſachen herrühren können.

§. 278.

Da die einzelnen Schnüre, aus denen ein Seil beſteht, durch das Drehen an ſich ſchon in eine Spannung verſetzt werden, ſo iſt es begreiflich, warum das Seil deſto weniger Stärke beſitzt, je enger ſeine Schnüre zuſammen gewunden ſind. Ein Seil, deſſen Schnüre um $\frac{1}{3}$ ihrer Länge eingedreht wären, hielt nur 4321 ℔; ein anderes von eben der Dicke, bey dem die Verkürzung $\frac{1}{4}$ betrug, hielt 5187 ℔. Drey andere Seile von gleicher Dicke gaben folgende Reſultate:

Bey $\frac{1}{3}$ Verk. betrug die Stärke	4098	℔
— $\frac{1}{4}$ — —	4850	—
— $\frac{1}{5}$ — —	6205	—

Da beyde Verſuche ſehr nahe einerley Verhältniß der Stärke geben, ſo erhält man aus vorhergehender Formel, die ſich auf Seile von mittlerer Windung bezieht:

Verkürzung	Stärke in ℔
$\frac{1}{3}$	$630 \cdot a^2$
$\frac{1}{4}$	$750 \cdot a^2$
$\frac{1}{5}$	$960\, a^2$.

§. 279.

Aus eben dem Grunde haben die Seile im naſſen Zuſtande weniger Stärke, als wenn ſie trocken ſind, da ſie bekanntlich durch die Näſſe um ein Beträchtliches zuſammenlaufen.

Von zweyen gleichen Seilen zerriß das eine, welches naß gemacht wurde, von 4000 ℔; das andere, welches trocken blieb, hielt dagegen 5400 ℔. Von zweyen andern hielt das naſſe nur 5800 ℔, das trockne hingegen 7800 ℔.

Nach erſterm Verſuche hat die Stärke des trocknen Seiles zu der des naſſen das Verhältniß 1 : 0,741;

Nach letzterm das Verhältniß — 1 : 0,743.

Das mittlere Verhältniß zwiſchen der Stärke beyder wäre alſo — — 1 : 0,742

Um die Seile vor der Näſſe zu ſichern, werden ſie entweder in Theer getränkt, oder gepicht. Dadurch ver-

verlieren ſie zwar auch an Stärke, und zwar in eben dem Verhältniſſe, als durch die Näſſe: behalten aber den anfänglichen Grad ihrer Stärke eine lange Zeit hindurch, und ſind aus dieſem Grunde dauerhafter als die ungepichten Seile, die durch öftere Abwechſelung von Trockniß und Näſſe immer mehr an Haltbarkeit abnehmen.

§. 280.

Ein gewöhnliches gleich dickes Seil iſt gegen das obere Ende zu, nach Verhältniß der Laſt, die es da zu tragen hat, ſchwächer, als am untern Ende: denn jede ſeiner Stellen trägt nicht allein die unten angehängte Laſt, ſondern auch das Gewicht des ganzen Seilsſtücks, das zwiſchen ihr und der Laſt enthalten iſt. Daher iſt ein ſolches Seil allemal oben am meiſten der Gefahr des Zerreißens ausgeſetzt. Soll dies nicht der Fall ſeyn, ſo muß das Seil nach oben zu in dem Maaße dicker werden, als die Laſt durch das darunter liegende Seilſtück zunimmt. Da man, nach des Hrn. Baillet de Belloy *) Berichte, dergleichen coniſche Seile bey der Marine in Frankreich wirklich verfertigt, und auf den daſigen Schiffen gebraucht, ſo will ich die Gründe, worauf ihre richtige Form beruhet, hier kurz auseinander ſetzen.

Fig. 33. 1) Es ſey der Durchmeſſer des Seiles am untern Ende B = a, in der Entfernung BM = x

*) Journal de phyſique May 1788 pag. 375.

vom untern Ende, $= u$; das ſpecifiſche Gewicht der Seilmaſſe $= \varkappa$; die in B hängende Laſt $=$ G.

2) An der Stelle B hat alſo das Seil die Laſt G zu tragen; in M, außer derſelben, noch das Gewicht des Stücks BM, welches für jetzt s heißen ſoll; folglich zuſammen: $G + s$.

3) Man hat alſo folgende Proportion:

$$a^2 : u^2 = G : G + s;$$ welche

$$u^2 = a^2 + \frac{a^2 s}{G}$$ giebt. Davon iſt das Differenzial: $$2udu = \frac{a^2 ds}{G}.$$

4) Da ds das Gewicht des Elementes Mm, und deſſen Inhalt $= \frac{1}{4}\pi u^2 dx$ iſt, ſo hat man $ds = \frac{1}{4}\pi\varkappa u^2 dx$, folglich

$$2Gudu = \frac{1}{4}\pi\varkappa a^2 u^2 dx$$

oder $$\frac{2Gdu}{u} = \frac{1}{4}\pi\varkappa a^2 dx$$

5) Hiervon iſt das Integral:

$$2G \log nat\, u = C + \frac{1}{4}\pi\varkappa a^2 x,$$

und da für $x = o$, $u = a$ iſt:

$$C = 2G . \log nat\, a,$$ folglich:

$$\log nat. \frac{u}{a} = \frac{\pi\varkappa a^2 x}{8G},$$

$$u = a . e^{\frac{\pi\varkappa a^2 x}{8G}}$$

6) $\frac{1}{4}\pi\varkappa a^2 x$ drückt das Gewicht eines Seilſtücks aus, das die Länge x, und allenthalben die Dicke a hat.

Da dies gegen G allemal gering ſeyn wird, ſo folgt, daß der Exponent $\frac{\pi \varkappa a^2 x}{8G}$ ein kleiner Bruch ſey.

7) Bekanntlich iſt nun:

$$e^Z = 1 + Z + \frac{Z^2}{1 . 2} + \frac{Z^3}{1 . 2 . 3} + \ldots,$$

wovon hier füglich das dritte und die folgenden Glieder wegbleiben können, ſo daß:

$$u = a \left(1 + \frac{\pi \varkappa a^2 \pi}{8G}\right) = a + \frac{\pi \varkappa a^3 x}{8G} \text{ wird.}$$

8) Weil ſich nach dieſer Formel die Zunahme der Dicke wie die der Länge x verhält, ſo ſieht man, daß das Seil eine coniſche Form erhalte.

9) Es ſey l die Länge des ganzen Seiles, ſo wird, für x = l, der Durchmeſſer des obern Endes $u = a + \frac{\pi \varkappa a^3 l}{8G}$, oder, wenn das Gewicht des Seiles, das die Länge l, und allenthalben die Dicke a hätte, = F geſetzt wird: $u = a + \frac{aF}{2G}$. Das Verhältniß des untern Durchmeſſers zum obern wäre alſo wie $1 : 1 + \frac{F}{2G}$.

10) Die untere Dicke a hängt von G ab; man hat nemlich, wenn man auf Näſſe Rückſicht nimmt, der das Seil ausgeſetzt ſeyn kann: $G = 0{,}742 \times 750 a^2 = 556 a^2$, alſo $a^2 = 0{,}0017985 \,.\, G$, und $a = 0{,}00424 \sqrt{G}$.

§. 281.

Fig. 76. Wenn man auf die Endpunkte A und B eines prismatiſchen Körpers AFB zwey ſenkrechte Kräfte wirken läßt, und dieſen in ihrem gemeinſchaftlichen Schwerpunkte C ihre Summe entgegenſetzt, ſo haben die drey Kräfte ein Beſtreben, den Körper zu zerbrechen. In manchen Fällen kann die eine oder die andere dieſer Kräfte in der bloßen Rückwirkung eines Widerſtandes beſtehen; ſo z. B. läßt ſich der Körper zerbrechen, wenn man ihn in C unterſtützt, und an den Seiten mit Gewichten behängt; oder umgekehrt, wenn die Unterſtützung in den Endpunkten A und B geſchieht, und die Kraft auf C angebracht wird; endlich kann man auch den einen Arm BC ganz einſchließen, und bloß den andern Arm CA der Wirkung der Kraft überlaſſen. In allen dieſen Fällen erfolgt der Bruch, wenn anders der Körper gleichförmig ſtark iſt, im Punkte C, weil da das Moment des Zerbrechens von beyden Seiten her am größten iſt.

§. 282.

Aufgabe. Der Körper ſey im Punkte C unterſtützt; auf ſeinen Endpunkt A drücke ein Gewicht, oder ſonſt eine Kraft, $= M$; man fragt, wie groß dieſe ſeyn müſſe, um den Körper zu zerbrechen.

Aufl. 1) Es ſey CD das Profil des Querſchnittes, in welchem der Bruch geſchieht, ſo wirken am

Winkelhebel ACD Cohäſion und Laſt einander entgegen. Letztere ſtrebt den Arm AC, und mit ihm die Fläche CD, um C zu drehen; erſtere widerſteht dieſer Umdrehung nach einer auf CD ſenkrechten Richtung.

2) Man ſetze die Cohäſion für die Einheit der Fläche = A, CX = x, das Element der Fläche Xx = ds, ſo iſt die nach Xξ dieſer Stelle ziehende Kraft = Ads, und ihr Moment = Axds. Alſo die Summe aller Momente, oder das Moment der Cohäſion der ganzen Fläche = $A\int xds$.

3) Nennt man y die Breite der Höhe bey X, ſo iſt ds = ydx, folglich jenes Moment auch = $A\int yxdx$.

4) Dieſem muß nun das Moment der Kraft M gleich ſeyn; ſetzt man alſo CA = f, ſo hat man:

$$Mf = A\int yxdx.$$

5) Liegt der Körper horizontal, ſo kommt noch das Moment in Betracht, das der Arm AC durch ſein eigenes Gewicht gegen C hat. Dies Gewicht iſt, bey gleicher Dicke des Körpers, der Länge a proportional; alſo = fK, wenn das Gewicht für die Länge 1, = K geſetzt wird; folglich, da der Schwerpunkt des Armes in die Mitte von AC fällt, das Moment deſſelben = $\frac{1}{2}f^2K$. Man erhält alſo:

$$Mf + \tfrac{1}{2}Kf^2 = A\int yxdx.$$

§. 283.

Folgerung. 1. Iſt der Querſchnitt des Prisma's ein Rechteck, deſſen Höhe = c, Breite = b, ſo iſt y

unveränderlich, alſo $\int yxdx = \frac{1}{2}bx^2$; darin $x = e$ geſetzt, giebt:

$$Mf + \frac{1}{2}Kf^2 = \frac{1}{2}Ac^2b.$$

2. Läßt man das Moment $\frac{1}{2}Kf^2$ gegen Mf weg, ſo wird $M = \frac{Ac^2b}{2f}$; folglich verhält ſich die Kraft, die erfordert wird, ein Parallellepipedum zu zerbrechen, wie das Maaß ſeiner abſoluten Feſtigkeit: wie das Quadrat ſeiner Dicke, einfach wie ſeine Breite; und verkehrt, wie die Entfernung der Kraft am Unterſtützungspunkte.

3. Der Querſchnitt des Prisma's mag eine Geſtalt haben, welche man will, ſo hat doch das Integral $\int yxdx$ für ein und daſſelbe Prisma jedesmal einen beſtimmten Werth. Setzt man dieſen $= e^3$, ſo wird $M = \frac{Ae^3}{f}$.

§. 284.

Aufgabe. Das Prisma ſey in den beyden Endpunkten A und B unterſtützt, und die Kraft M auf den Punkt C angebracht; wie groß wird ſie in dieſem Falle ſeyn müſſen, wenn ſie das Prisma zerbrechen ſoll?

Aufl. 1) Man ſetze die Kräfte, worin ſie ſich auf die Punkte A und B vertheilt, $= M'$ und M'', ſo iſt jetzt M' was vorhin M war; alſo, wenn man wieder $CA = f$, und außerdem $CB = g$ ſetzt: $M' = \frac{Ae^3}{f}$, und auf gleiche Art: $M'' = \frac{Ae^3}{g}$.

2) Nun iſt $M' = \frac{Mg}{f+g}$, $M'' = \frac{Mf}{f+g}$ (§. 19.); folglich erhält man: $\frac{Mg}{f+g} = \frac{Ae^3}{f}$; $\frac{Mf}{f+g} = \frac{Ae^3}{g}$, und aus beyden Gleichungen: $M = \frac{Ae^3(f+g)}{fg}$.

§. 295.

Um den Punkt C zu finden, wo ſich das Prisma, wenn es in A und B unterſtützt iſt, am leichteſten zerbrechen läßt, ſuche man den Werth von f, wofür M ein Minimum wird. Zu dem Ende ſetze man die ganze Länge des Prisma's AB = a, ſo wird f + g = a, g = a — f, folglich $M = \frac{Ae^3a}{af - f^2}$. Dieſer Ausdruck iſt dann am kleinſten, wenn ſein Nenner $af - f^2$ am größten, alſo $(a - 2f)\,df = 0$, oder $f = \frac{1}{2}a$ iſt; daraus folgt alſo, daß ein Prisma in der Mitte der Gefahr des Zerbrechens allemal am meiſten ausgeſetzt ſey.

Für dieſen Fall erhält man: $M = \frac{4Ae^3}{a}$, und beym Parallelepipedum: $M = \frac{2Abc^2}{a}$.

Feſtigkeit ſteinerner Mauern.

§. 286.

Wir haben bisher die Feſtigkeit der Mauern bloß nach ihrer Stabilität beurtheilt, oder ſie als Maſſen

betrachtet, die durch ihr Gewicht allein vor dem Umſturze geſichert ſind. Da ſie aber auf den Boden nicht, wie andere feſte Körper, bloß hingeſtellt, ſondern mit demſelben durch Kalk oder Mörtel verbunden werden, ſo liegt noch ein zweyter Grund ihrer Feſtigkeit in der Cohäſion. Dieſe erfordert zwar erſt eine gewiſſe Zeit, ehe ſie ihre volle Wirkſamkeit erreichen kann; allein da man auch gewöhnlich einer Mauer dieſe Zeit, ſich zu befeſtigen, geſtattet, ſo iſt es allerdings erlaubt, bey derſelben auf Cohäſion, als eine wichtige Urſache ihrer Stärke, Rückſicht zu nehmen.

§. 287.

Fig. 77. Aufgabe. Es ſey das Rechteck ABCD das Profil einer gleichdicken Mauer; ihre Dicke CD = c, ihre Höhe AC = h, und die Länge derſelben = b; außerdem ſey das Gewicht eines Kubikfußes der Steinmaſſe = m, und die Cohäſion des Steines mit dem Kalke für jeden Quadratfuß Fläche = A. Man ſucht das Moment der ganzen Kraft, mit der die Mauer der Umdrehung um den Punkt C widerſteht.

Aufl. 1) Wir wollen die Kraft, die oben in A ſenkrecht auf AC angebracht werden muß, um den Widerſtand der Mauer aufzuheben, = M ſetzen, ſo hat dieſe am Arme AC des Winkelhebels ACD das Umdrehungsmoment = Mh, dem alſo die Mauer, theils durch ihr Gewicht, theils durch die Kraft, womit ſie in der Grundfläche CD an dem Boden haftet, ein gleiches Moment entgegenſetzen muß.

2) Ihr Gewicht iſt nun $= mcbh$, und wirkt aus ihrem Schwerpunkte G auf die Mitte E des Hebelarmes CD ſenkrecht; hat alſo an dieſem das Moment $CE . mcbh = \frac{1}{2} mc^2bh$.

3) Die Cohäſion widerſteht einem Theile von M, $= \frac{Ac^2b}{2h}$ (§. 287. 2.), mit dem ſie folglich einerley Moment $\frac{1}{2} Ac^2b$ hat. Beyde Momente zuſammengenommen geben daher:

$$Mh = \tfrac{1}{2} c^2b \, (A + mh).$$

§. 288.

Nach den von Lorgna *) über die Cohäſion zwiſchen Kalk und Stein mitgetheilten Verſuchen, iſt für Felsſteine $A = 1728$ pariſer Pfunde, für Backſteine $A = 1296$ ℔; dabey wog der Kubikfuß des erſtern 200 ℔, des letztern 140 ℔. Subſtituirt man dieſe Werthe für A und m in vorhergehender Formel, ſo erhält man für Felsſteine:

$$Mh = \tfrac{1}{2} c^2b \, (1728 + 200h),$$

und für Backſteine:

$$Mh = \tfrac{1}{2} c^2b \, (1296 + 140h).$$

Exempel. Wenn man nach dieſer Formel die in §. 269. gefundene Gleichung für f verbeſſern will, ſo iſt dort f, h + l, l, was hier c, h, b genannt iſt; daher hat man für das eigentliche Moment des Widerſtandes daſelbſt: $\frac{1}{2} mf^2 \, (8{,}64 + h + l)$, und die Gleichung ändert ſich alſo in ſofern ab, daß man allent-

*) Saggi di Statica e di meccanica pag. 91.

halben darin für $h + 1$, $h + 1 + 8{,}64$ ſetzen muß. Man erhält alſo in dem beygefügten Exempel:

$$f^2 - 4{,}838\,f - 266{,}895 = 0,$$

woraus $f = 18{,}954$ Fuß wird.

§. 289.

Aufgabe. Die Mauer ſey an der Seite, wo ſie der Gefahr des Umſturzes ausgeſetzt iſt, noch durch eine Widerlage ACF verſtärkt; man fragt, wie groß jetzt die Kraft M ſeyn müſſe, um den Widerſtand der Mauer aufzuheben.

Aufl. 1) Das Gleichgewicht zwiſchen Kraft und Widerſtand bezieht ſich jetzt auf den Winkelhebel AFD. An dieſem hat die Kraft M, wie vorhin, das Moment Mh; dagegen iſt jetzt das Moment des Rechtecks ACBD $= mcbh \cdot FE$, oder, wenn wir $CF = d$ ſetzen, $= mcbh\,(d + \frac{1}{2}c)$.

2) Ferner iſt das Gewicht des Prisma's AEC $= \frac{1}{2}mdbh$, und wenn man aus ſeinem Schwerpunkte I auf FC das Perpendikel IK fällt, $CK = \frac{2}{3}d$, alſo ſein Moment $= \frac{1}{3}md^2bh$.

3) Endlich iſt das Moment des Widerſtandes von Seiten der Cohäſion $= \frac{1}{2}A\,(c + d)^2b$; folglich alles dreyes zuſammengenommen:

$$Mh = mcbh(d + \tfrac{1}{2}c) + \tfrac{1}{3}md^2bh + \tfrac{1}{2}A(c + d^2)b$$
$$= bc\,(\tfrac{1}{2}c + d)\,(A + mh) + bd^2\,(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{3}mh).$$

4(Setzt man in dieſer Gleichung für A und m ihre Werthe aus §. 288, ſo erhält man

für Felsſtein: $Mh = (bc^2 + 2bcd)(864 + 100h)$
$+ bd^2 (864 + 66\frac{2}{3}h)$

für Backſtein: $Mh = (bc^2 + 2bcd)(648 + 70h)$
$+ bd^2 (648 + 46\frac{2}{3}h)$.

Feſtigkeit dehnbarer und elaſtiſcher Körper.

§. 290.

Die im §. 282. gefundene Relation zwiſchen abſoluter und reſpektiver Feſtigkeit gründet ſich auf die Vorausſetzung, daß in der ganzen Fläche des Bruchs die Theile des Körpers zu gleicher Zeit von einanderreißen; daher ſchränkt ſie ſich bloß auf ſolche Körper ein, bey denen das Zerbrechen plötzlich geſchieht, wohin z. B. die verſchiedenen Steinarten, ſo wie alle ſpröden Körper, als Glas, ſpröde Metalle u. ſ. w. gehören. Ganz anders verhält ſich dagegen die Sache bey Körpern, die einer Ausdehnung und Zuſammenziehung fähig ſind; dieſe nehmen vor dem Zerbrechen allemal eine mehr oder minder gebogene Form an, und zerreißen deshalb an der konvexen Seite, weil ſie da am meiſten ausgedehnt ſind, zuerſt; worauf dann nach und nach auch der Bruch in den übrigen Stellen erfolgt. Dies allmählige Zerbrechen macht, daß ihre reſpektive Feſtigkeit nach Verhältniß ihrer abſoluten weit geringer iſt, als bey unbiegſamen Körpern, wie in den folgenden §§ näher gezeigt werden ſoll.

§. 291.

Ueber die Geſetze, nach denen priſmatiſche Körper

durch angehängte Gewichte ausgedehnt werden, hat man zwar noch keine genauen Verſuche angeſtellt; da aber bey Körpern, die ſich zerbrechen laſſen, die Ausdehnung nach Verhältniß ihrer Länge immer ſehr gering iſt, ſo läßt ſich für dieſe als ein ſicheres Axiom annehmen:

daß die Ausdehnung eines und deſſelben Körpers dem Gewichte, durch das ſie hervorgebracht wird, proportional ſey.

Daraus folgt nun unmittelbar:

Fig. 78. 1) Daß bey einerley Querſchnitt des prismatiſchen Körpers AB, und einerley angehängtem Gewichte G, die Ausdehnung deſſelben Ff ſich wie ſeine Länge AF verhalten müſſe.

Man denke ſich nemlich den Körper in lauter gleiche Querſtreifen wie MNmn getheilt, ſo leidet jeder derſelben vom Gewichte G eine gleiche Spannung, folglich auch gleiche Ausdehnung $m\mu$; daher verhält ſich die Ausdehnung Ff des ganzen Körpers ABFI wie die Menge der Streifen, alſo wie ſeine Länge.

2) Daß bey einerley Länge des Körpers das Gewicht ſich wie ſein Querſchnitt verhalten müſſe, wenn es dieſelbe Ausdehnung in ihm hervorbringen ſoll.

Gedenkt man ſich nemlich jetzt den Körper ſeiner Länge nach in lauter gleiche Prismen getheilt, ſo erfordert jedes derſelben, um einerley Ausdehnung zu bekommen, einerley angehängtes Gewicht; will man daher im ganzen Körper dieſe Ausdehnung hervorbringen, ſo iſt dazu in eben dem Verhältniſſe mehr Gewicht

nöthig, als die Menge der gleichen Prismen, oder der Querſchnitt des Körpers größer iſt.

3. Man ſetze nun, es ſey bey einem Prisma von gegebener Materie für den Querſchnitt 1, Länge 1, zur Ausdehnung ε das Gewicht G nöthig, ſo erfordert ein Prisma deſſen Querſchnitt $= S$, Länge $= 1$, zu eben der Ausdehnung ε das Gewicht GS (2.); folglich wird bey einem Prisma deſſen Querſchnitt $= S$, Länge $= l$, durch das Gewicht GS, die Ausdehnung εl hervorgebracht (1). Setzt man alſo für eben die Dimenſionen des Prisma's die Ausdehnung, die durch das Gewicht P entſteht, $= z$, ſo hat man

$$GS : P = \varepsilon l : z$$

folglich: $z = \frac{P\varepsilon l}{GS}$

4. Da die Ausdehnung allemal der Länge des Körpers proportional iſt, ſo ſetze man $z = \omega l$; alsdann wird $\omega = \frac{\varepsilon P}{GS}$, wo ε den Theil der Länge bedeutet, um den ein Prisma vom Gewichte G ausgedehnt wird, deſſen Querſchnitt $= 1$ iſt.

5. Eben dieſe Formel gilt nun auch offenbar für die Verkürzung eines Prisma's, wenn es durch ein Gewicht oder ſonſt eine Kraft zuſammengedrückt wird.

§. 292.

Fig. 79. **Aufgabe.** Ein Parallelepipedum, deſſen Länge $CA = f$, Dicke $IE = c$, und Breite $= b$ iſt, ſey im Punkte I unterſtützt, und an ſeinem Endpunkte

A mit einem Gewichte M behängt; wie groß wird dies ſeyn müſſen, um an der unterſtützten Stelle eine gegebene Krümmung hervor zu bringen?

Aufl. 1) Indem der Körper durch das Gewicht gebogen wird, wird ſeine obere Seite ausgedehnt, und die untere zuſammengedrückt; es muß alſo zwiſchen beyden eine Stelle C geben, die weder Ausdehnung noch Zuſammenziehung leidet, und folglich ſeine natürliche Länge behält.

2) Es ſey Cc ein Element dieſer Länge, O der Mittelpunkt ſeiner Krümmung, ſo ſchließen die Halbmeſſer OC und Oc einen gebogenen Querſtreif Eeli des Körpers ein, und man hat für jede andere Stelle P deſſelben:

$$OC : OP = Cc : P\pi$$

oder, wenn man $OC = r$, $CP = x$, und $Cc = df$ ſetzt:

$$r : r + x = df : P\pi, \text{ alſo}$$

$$P\pi = \frac{(r+x)\,df}{r} = df + \frac{xdf}{r}$$

3) Da nun das Element $P\pi$ im natürlichen Zuſtande $= Cc$ war, ſo iſt es durch das Biegen um $\frac{xdf}{r}$, oder um den Theil $\frac{x}{r}$ ſeiner Länge ausgedehnt; ſetzt man alſo die Kraft, die zu dieſer Ausdehnung erfordert wird, $= dp$; die Dicke des Elementes $Pp = dx$; ſo hat man: $S = bdx$, $\omega = \frac{x}{r}$, $P = dp$, folglich: $\frac{x}{r} = \frac{\varepsilon dp}{Gbdx}$, und $dp = \frac{Gbxdx}{\varepsilon r}$.

4) Dieſe Kraft wirkt demnach im Punkte P am Winkelhebel ECa dem Gewichte M entgegen, und hat an denſelben das Moment $xdp = \frac{Gbx^2dx}{er}$. Hiervon iſt das Integral $= \frac{Gbx^3}{2er}$, und für $x = CE = g$, die Summe der Momente von allen zwiſchen C und E liegenden Elementen $= \frac{Gbg}{2er}$.

5) Es bleibt jetzt noch übrig, den Widerſtand von Seiten der unterhalb C liegenden Elemente zu beſtimmen. Da dieſe ſich im zuſammengedruckten Zuſtande befinden, ſo haben ſie ein Beſtreben, ſich auszudehnen, und wirken daher auf gleiche Art am Arme IC des Winkelhebels ICa dem Gewichte M entgegen. Setzt man alſo im vorigen Integrale $x = CI = c - g$, ſo erhält man für die ganze Summe ihre Momente: $\frac{Gb(c-g)^3}{3er}$

6) Beyde Momente zuſammengenommen müſſen nun dem Momente M . Ca des Gewichtes M gleich ſeyn. Setzt man darin für Ca die ganze Länge $CA = f$, (von der Ca immer nur wenig abweichen kann, wofern die Biegung des Armes CA nicht ſehr beträchtlich iſt) ſo wird:

$$\frac{Gb[g^3 + (c-g)^3]}{3er} = Mf.$$

7) Um aus dieſer Formel die Größe G wegzuſchaffen, müßte man das Verhältniß von g zu c kennen, oder im Querſchnitte ECI die Lage des Punktes C an-

zugeben wiſſeſt. Da aber dieſer Punkt höher oder tie- fer fällt, je nachdem der Körper ſich leichter zuſammen- drücken oder ausdehnen läßt, ſo beruhet das Verhältniß $g : c$ auf der jedesmaligen Beſchaffenheit des Körpers, und kann alſo nur aus der Erfahrung abgeleitet wer- den. Setzen wir vorläufig $g = \varkappa c$, ſo wird $g^3 + (c - g)^3 = c^3(1 - 3\varkappa + 3\varkappa^3)$, folglich:

$$Mf = \frac{Gbc\,(1 - 3\varkappa + 3\varkappa^2)}{3r}$$

§. 293.

Die Krümmung des Körpers nimmt alſo in dem Maaße zu, wie man das Gewicht M vergrößert, bis zuletzt der Körper oben bey E ſo weit ausgedehnt wird, daß er an dieſer Stelle zerreißen muß. Sobald dies geſchieht, eefolgt der Bruch, ohne Vermehrung des Gewichtes, auch nach und nach in den übrigen Stellen des Querſchnittes ECI: denn man ſieht offenbar, daß der Widerſtand von Seiten des Körpers immer mehr abnehmen müſſe, je weniger Theile von ihm in der Flä- che ECI noch miteinander zuſammenhängen.

Um daher das Gewicht M zu finden, wodurch der Bruch des Körpers bewirkt wird, ſetze man G = dem Maaße A der abſoluten Feſtigkeit des Körpers; als- dann bezeichnet ε den Coefficienten der Ausdehnung, die unmittelbar dem Zerreißen vorhergeht, folglich, da die Ausdehnung des obern Elementes $Ee = \frac{gdf}{r}$ iſt, (§. 292. 3.) hat man: $\varepsilon = \frac{g}{r}$, $\varepsilon r = g = \varkappa c$, alſo:

Mf

$$Mf = Abc^2 \left(\frac{1 - 3\varkappa + 3\varkappa^2}{3\varkappa} \right);$$

oder, wenn man den beſtändigen Faktor $\frac{1 - 3\varkappa + 3\varkappa^2}{3\varkappa}$ $= \lambda$ ſetzt:

$$Mf = \lambda Abc^2.$$

§. 294.

Vergleicht man dieſe Formel mit der, die wir vorhin (§. 283. 2.) für die reſpektive Feſtigkeit unbiegſamer Körper gefunden haben, ſo zeigt ſich, daß beyde bloß in dem beſtändigen Coefficienten von einander abweichen. In letzterer iſt nemlich allemal $\lambda = \frac{1}{2}$; in erſterer kann λ nach Beſchaffenheit der Materie mancherley Werthe annehmen, die ſich aber, wie ſchon erinnert iſt, nur durch Verſuche beſtimmen laſſen.

Bey Körpern, die bloß dehnbar, aber nicht compreſſibel ſind, iſt $CI = 0$, alſo $g = c$, $\varkappa = 1$, folglich $\lambda = \frac{1}{3}$.

Bey Körpern hingegen, die vollkommen elaſtiſch ſind, oder eben ſo viel Ausdehnungs- als Zuſammenziehungsvermögen beſitzen, fällt der Punkt C unſtreitig zwiſchen E und I in die Mitte; folglich hat man für dieſe: $g = \frac{1}{2}c$, $\varkappa = \frac{1}{2}$, alſo $\lambda = \frac{1}{6}$.

§. 295.

Wird das Parallelepipedum in ſeinen beyden Endpunkten A und B unterſtützt, und das Gewicht in der Mitte C aufgehängt, ſo bringt dies dieſelbe Wirkung hervor, als wenn der Punkt C unterſtützt würde, und

bey A und B die Hälfte des Gewichtes vorwärts zöge. Setzt man alſo im gegenwärtigen Falle das Gewicht, wodurch das Parallelepipedum zerbrochen wird, $= P$, ſeine ganze Länge $= a$, ſo wird $M = \frac{1}{2}P$, $f = \frac{1}{2}a$, folglich:

$$Pa = 4\lambda Abc^2.$$

Reſpektive Feſtigkeit des Holzes.

§. 296.

Bey den Verſuchen, die Muſchenbrök über das Zerbrechen des Eichenholzes angeſtellt hat, hatten die Parallelepipeda insgeſammt einerley Länge $a = 18''$ Rheinl. und Breite $b = 0{,}26'$; ſie wurden an den Seiten unterſtützt, und in der Mitte mit Gewichten behängt, die in ſehr geringen Quantitäten nach und nach vermehrt wurden, bis der Bruch erfolgte. In nachſtehender Tafel enthält die erſte Kolumne die verſchiedene Dicke derſelben, die zweyte das Gewicht, wovon ſie zerbrochen, und die dritte den daraus berechneten Werth von λA:

c	P	λA
0,33″	13½ ℔	2146 ℔
0,40	23½ —	2542 —
0,52	31½ —	2016 —
0,58	32½ —	1671 —
0,68	50½ —	1860 —

Das Mittel zwiſchen dieſen Reſultaten genommen, gäbe demnach: $\lambda A = 2053$.

Auf gleiche Weiſe erhält man aus ſeinen übrigen Verſuchen für Ulmenholz $\lambda A =$ 946 ℔
— Eſchenholz — 2588 —
— Lindenholz — 1719 —
— Tannenholz — 1504 —

Anmerk. Büffons *) merkwürdige Verſuche mit eichenen Balken von 7 bis 28 Fuß Länge und 4 bis 8 Zoll Dicke würden unſtreitig vor allen andern Verſuchen dieſer Art den Vorzug verdienen, wenn ſie nicht leider mit gar zu weniger Sorgfalt angeſtellt wären. Es iſt nemlich ein äußerſt wichtiges Verſehen von ihm, daß er die Gewichte nicht nach und nach, ſondern jedesmal 500 Pfd. weiſe, ja bey einigen Verſuchen ſogar 1000 Pfd. weiſe, verſtärkt hat, wodurch begreiflich die Fibern des Holzes, vorzüglich bey langen Balken, weit über das Geſetz des Gleichgewichtes ausgedehnt, und daher viel früher zerriſſen worden ſind, als es bey einem vorſichtigen Verfahren der Fall hätte ſeyn können. Da die Reſultate ſeiner Verſuche für einerley Länge der Balken allemal ziemlich genau zuſammenſtimmen, ſo ſetze ich davon in nachſtehender Tafel bloß die mittleren Werthe her:

Länge.	mittl. Werth von λA
7 Fuß	1840 Pfd.
8 —	1783 —
9 —	1724 —
10 —	1667 —
12 —	1659 —
16 —	1547 —
20 —	1429 —

Man ſieht aus dieſer kurzen Zuſammenſtellung, daß ſeine Balken nach Verhältniß deſto leichter zerbrachen, je länger ſie waren; offenbar aus dem Grunde, weil bey längern Balken die Fibern durch die plötzliche Zunahme des Gewichtes deſto mehr erſchüttert, und zum Bruche ſollicitirt wurden.

*) Mem. de l'acad. de Paris 1740. pag. 453. und 1741 pag. 292. Auch im Hamb. Magazin V. Band. S. 506.

§. 297.

Aufgabe. Unter den rechtwinklichten Balken, die aus einem cylindriſchen Stamme von gegebenem Durchmeſſer e gehauen werden können, denjenigen zu beſtimmen, der die meiſte reſpektive Feſtigkeit hat.

Fig. 80. Aufl. 1) Man ſetze die Breite des Balken $AD = x$, ſeine Höhe $DB = u$; ſo ſind zwey Bedingungen zu erfüllen: einmal ſoll $x^2 + u^2 = e^2$, und dann das Produkt $\lambda A x u^2$ ein Maximum ſeyn.

2) Letztere giebt, weil λA ein unveränderlicher Faktor iſt: $d(xu^2) = u^2 dx + 2xudu = 0$.

erſtere . . . $2xdx + 2udu = 0$.

3) Multiplicirt man die zweyte Gleichung mit x, und zieht ſie von erſterer ab, ſo bleibt übrig:

$(u^2 - 2x^2)\, dx = 0$, oder $u^2 = 2x^2$, woraus $u = x\sqrt{2}$ wird.

4) Man fälle aus D auf AB das Perpendikel DE, und ſetze $AE = Z$, ſo hat man:

$$AB : AD = AD : AE$$
$$e : x = x : z, \text{ alſo}$$
$$ez = x^2.$$

Da nun $e^2 = u^2 + x^2 = 3x^2$, ſo wird $e^2 = 3ez$, alſo $z = \frac{1}{3}e$. Hieraus fließt folgende Conſtruktion:

Man theile den Durchmeſſer AB in drey gleiche Theile, errichte auf ihm aus einem der Theilungspunkte E ein Perpendikel, und verlängere dies, bis es den Kreis irgendwo in D ſchneidet, ſo ſind AD und BD die verlangte Seiten des Rechtecks.

§. 298.

Fig. 81. Aufgabe. Ein rechtwinkliger Balken AB, der in ſeinen Endpunkten A und B unterſtützt iſt, ſey mit dem Gewichte P beladen, das aber nicht, wie vorhin, auf einer einzelnen Stelle ruhet, ſondern gleichförmig auf ihm, ſeiner Länge nach, vertheilt iſt; man fragt, wie groß dies ſeyn müſſe, um ihn zu zerbrechen.

Aufl. 1) Es ſey AYB die Kurve, in die der Balken unmittelbar vor dem Zerbrechen gebogen wird. Man ſetze ſeine ganze Länge = a, die Abſciſſe AX = x, ſo iſt das Gewicht, das auf das Element Yy drückt, weil man ohne merklichen Fehler Yy = Xx ſetzen kann, $= \frac{Pdx}{a}$, und ſein Moment gegen die Mitte c = Xf. $\frac{Pdx}{a} = \frac{P}{a} . (x - \frac{1}{2}a)\ dx$, deſſen Integral $= \frac{P}{2a}$ $(x^2 - ax + C)$ iſt.

2) Dies Integral iſt für $x = \frac{1}{2}a$, = o, alſo $C = \frac{1}{4}a^2$. Setzt man nun ferner darin x = a, ſo wird das Moment des ganzes Armes cB gegen c = $\frac{PC}{2a} = \frac{1}{8}Pa$.

3) Der Unterſtützungspunkt B übt dagegen auf den Endpunkt des Balken den entgegengeſetzten Druck $= \frac{1}{2}P$ aus, der das Moment $\frac{1}{2}P \times \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}Pa$ hat, den Arm cB nach entgegengeſetzter Richtung um c zu drehen, und den Balken an dieſer Stelle zu krümmen; wird daher erſteres Moment $\frac{1}{8}$ Pa von letzterm

abgezogen, ſo bleibt für das wahre Moment der Biegung $\frac{1}{8}$Pa übrig.

4) Man hat alſo (§. 293.) $\frac{1}{8}Pa = \lambda Abc^2$, oder

$$Pa = 8\lambda Abc^2$$

Daher muß das Gewicht, um den Balken zu zerbrechen, doppelt ſo groß ſeyn, als nöthig wäre, wenn es in ſeiner Mitte aufgehängt würde (§. 295.).

§. 299.

Zur Erläuterung dieſer Formel mag folgendes leichte Beyſpiel dienen:

Die Sparren eines Daches ſind zum Theil ihrem eigenen Gewichte ausgeſetzt, zum Theil ruhet auf ihnen die äußere Bekleidung des Daches; man kann alſo fragen, wie ſtark ſie zum wenigſten ſeyn müſſen, damit ſie unter dieſer Laſt nicht brechen?

Fig. 26. Man ſetze ihre Breite $= x$, ihre Dicke $= u$, das ſpecifiſche Gewicht des Holzes $= G$, die äußere Laſt, die auf jedem Fuße ihrer Länge ruhet $= \kappa$; ferner ſey die halbe Breite des Daches $AD = b$, der Neigungswinkel der Dachfläche $CAD = I$, ſo iſt ihre Länge $AC = \frac{b}{\text{Cos } I}$, alſo das ganze Gewicht O, das jede Sparre zu tragen hat $= \frac{b}{\text{Cos } I}(K + Gxu)$.

Da dies Gewicht auf einer ſchiefen Fläche liegt, ſo leidet die Sparre von ihm bloß den ſenkrechten Druck O Cos I; man hat alſo gegenwärtig $P = b(K + Gxu)$.

Weil man die Sparren gewöhnlich an irgend einer Stelle F unterſtützt, ſo wollen wir ſetzen, dies geſchehe in der Mitte; alsdann iſt hier $a = \frac{b}{2 \text{ Ccs } I}$, folglich bekommt man die Gleichung:

$$\frac{b^2 (K + Gxu)}{2 \text{ Cos } I} = 8\lambda A x u^2$$

und wenn man zwiſchen x und u das vortheilhafteſte Verhältniß 1 : $\sqrt{2}$ annimmt (§. 297.):

$$b^2 (K + Gx^2 \sqrt{2}) = 32\lambda A x^3$$

$$\text{oder } x^3 - \frac{b^2 G \sqrt{2}}{32\lambda A \text{ Ccs } I} . x^2 - \frac{b^2 K}{32\lambda A \text{ Cos } I} = 0.$$

Exempel. Für tannene Balken iſt nach Lorgna's Verſuchen *) $4\lambda A = 5973$ ℔, $G = 44$ ℔; dieſe Werthe ſubſtituirt, geben vorläufig:

$$x^3 - 0{,}00130222 . b^2 \text{ Sec } I\, x^2 - 0{,}000020927$$
$$b^2 K \text{ Sec } I = 0.$$

Es ſey nun b = 12 Fuß, I = 45°, das Gewicht von 1 Quadratfuß Dachfläche = 6 ℔, die Diſtanz der Sparren 4 Fuß, ſo iſt K = 12 ℔, folglich erhält man:

$$x^3 - 0{,}26519\, x^2 - 0{,}05826 = 0$$

und daraus x = 0,4992 Fuß, oder ſehr nahe 6 Zoll, welches u = $8\frac{1}{2}$ Zoll giebt.

Feſtigkeit cylindriſcher Körper.

§. 300.

Lehrſatz. Die Gewichte, wodurch zwey Cylinder von einerley Materie zerbrochen wer=

*) a. a. O. pag. 65.

den, verhalten ſich direkt wie die Cuben ihrer Durchmeſſer und verkehrt wie ihre Längen.

Fig. 59. Beweis. 1) Es ſey von einem dieſer Cylinder EMNI der Querſchnitt, in dem der Bruch geſchieht, O ſein Mittelpunkt, C der Grenzpunkt zwiſchen Ausdehnung und Zuſammenziehung; der Durchmeſſer $EI = c$, $EC = g$, $CP = x$; die Ordinate $MN = y$, ſo iſt das Element $MNmn = ydx$, alſo (§. 292. 3.) $dp = \frac{Gyxdx}{\varepsilon r}$; das Moment $xdp = \frac{Gyx^2dx}{\varepsilon r}$, und die Summe dieſer Momente $= \frac{G\int yx^2dx}{\varepsilon r}$.

2) In dieſem Integrale muß nun theils $x = g$, theils $x = c - g$ geſetzt werden (ebendaſ. 4. 5.). Für erſteres x ſey $\int yx^2dx = M$, für letzteres $= N$, ſo hat man für das Moment des geſammten Widerſtandes: $\frac{G(M+N)}{\varepsilon r}$.

3) Für den Fall des Zerbrechens iſt nun, wenn man $G = A$ ſetzt, $\varepsilon r = g$. Heißt alſo a die Länge des cylindriſchen Armes, an dem die Kraft wirkt, die ihn zerbricht, und die wir P nennen wollen, ſo iſt $Pa = \frac{A(M+N)}{g}$.

4) Um zu ſehen, wie ſich y durch x ausdrucken läßt, nenne man $OP = u$, ſo hat man $y^2 = c^2 - 4u^2$, und $x = u + g - \frac{1}{2}c$ oder $u = x - g + \frac{1}{2}c$, folglich $y = \sqrt{[c^2 - (2x - 2g + c)^2]}$.

5) Für den andern Cylinder ſey nun c', g', a',

x' u. ſ. f., was vorhin c, g, a u. ſ. f. hieß. Man ſetze $c' = mc$, ſo iſt auch $g' = mg$, $x' = mx$, folglich $dx' = mdx$, und $y' = \sqrt{[m^2c^2 - m^2(2x - 2g + c)]} = my$, alſo $y'x'dx' = m^4yx^2dx$, mithin $M' = m^4M$, $N' = m^4N$.

6) Daher hat man $P'a' = \frac{A(M' + N')}{g'} = \frac{m^4A(M + N)}{mg} = m^3Pa$ (3), folglich $P'c^3a' = m^3c\,Pa = Pc'^3a$, und

$$P : P' = c'^3a' : c'a = \frac{c^3}{a} : \frac{c'^3}{a'}.$$

§. 301.

Folgerung 1) Da $\frac{Pa}{c^3} = \frac{P'a'}{c'^3}$, ſo iſt $\frac{Pa}{c^3}$ eine beſtändige Größe, es mögen a und c Werthe haben, welche man will. Setzt man alſo $\frac{Pa}{c^3} = K$, ſo wird $P = \frac{Kc^3}{a}$; in welcher Formel der unveränderliche Koefficient K durch Verſuche beſtimmt werden muß.

F. 83. 2) Wenn eine Kette durch ein Gewicht P geſpannt wird, ſo trägt jedes Glied derſelben aebg dies Gewicht in den Punkten a und b, wo die beyden nächſten Glieder in daſſelbe eingreifen, und davon vertheilt ſich die Hälfte auf jeden der Punkte e und f. Dieſe Kraft könnte, wenn ſie groß genug iſt, den Ring an den Stellen e und f zerreißen: ſie wirkt aber eher darauf hin, ihn in b zu zerbrechen, weil letzteres leichter

geſchehen kann, als erſteres. Setzt man daher die Dicke des Ringes $es = c$, ſeine innere Weite $ey = f$, ſo iſt die mittlere Breite deſſelben $= f + c$, alſo das Gewicht, wodurch er zerbrochen wird: $P = \frac{4Kc^2}{f+c}$.

3) Man ſieht hieraus, daß die Stärke einer Kette nicht bloß auf der Dicke der Glieder, ſondern auch zugleich auf ihrer Weite beruhe, und daß es alſo ſehr zweckmäßig ſey, ihnen eine längliche Form zu geben.

4) Setzt man $f = nc$, ſo wird $P = \frac{4Kc^2}{n+1}$; daher gilt der gewöhnliche Satz: daß ſich die Stärke der Kette wie das Quadrat der Dicke ihrer Glieder verhalte, nur dann, wenn Weite und Dicke bey ihnen ein beſtimmtes Verhältniß zu einander haben.

Vom Widerſtande feſter Körper beym Zuſammendrücken derſelben.

§. 302.

Es bleibt noch der Fall zu betrachten übrig, wo ein priſmatiſcher Körper zweyen entgegengeſetzten Kräften ausgeſetzt iſt, die ihn genau ſeiner Länge nach zuſammen zu drücken ſtreben. Wiewohl die bisherige Theorie nicht zeigt, wie dadurch der Zuſammenhang ſeiner Theile leiden könne, da er hier weder unmittelbar angegriffen, noch durch Hebelkraft zum Widerſtande gereizt wird; ſo lehrt doch die Erfahrung, daß auch unter dieſen Umſtänden die Feſtigkeit des Körpers ihre

Grenzen habe: der Stein wird nemlich durch eine zu große Laſt, die man ihm aufbürdet, im eigentlichen Verſtande zerdrückt; das Holz, ſo wie jeder andere dehnbare Körper, wird dadurch ſeitwärts gebogen, und zerbricht endlich.

Erſteres Ereigniß, das Zerdrücken harter Körper, wird ſchwerlich aus mechaniſchen Principien genugthuend erklärt werden können, wofern man nicht zu Konjekturen über die Form ihrer Elemente ſeine Zuflucht nehmen will; letzteres hingegen, das Zerknicken biegſamer Körper, läßt ſich ſehr gut auf die vorhergehende Theorie zurückführen, wie Euler in ſeiner vortreflichen Abhandlung: Determinatio onerum, quae columnae geſtare valent *), gezeigt hat.

§. 303.

Fig. 8'. Man ſetze, der Balken AB habe eine vertikale Stellung, und ſey oben bey A mit einem Gewichte O beladen, das ihn, ſeiner Länge nach, ſenkrecht gegen den horizontalen Boden drückt.

So lange der Balken im geſtreckten Zuſtande bleibt, hat die Laſt weiter keine Wirkung auf ihn, als daß etwa ſeine Fibern durch das Zuſammenpreſſen ſich um ein Geringes verkürzen; allein zerbrechen kann ſie ihn auf dieſe Art nicht. Sobald er aber unter ihr auch nur die mindeſte Krümmung leidet, bekommt ſie nun ein Moment ihn ferner zu biegen, das mit der Biegung ſtufenweiſe zunimmt, und folglich zuletzt größer

*) Acta acad. ſc. Petropol. 1778. P. I. pag. 121.

werden kann, als das Moment des Widerſtandes, den ihr die Feſtigkeit des Balken entgegen zu ſetzen fähig iſt.

Es ſey AyB die Kurve, in die der Balken bereits gebogen iſt, c die Mitte derſelben, ſo wirkt die Laſt O als Hebelkraft an dem krummlinigten Arme Ayc, und ſtrebt dieſen um c zu drehen. Fällt man alſo cf auf ihre Richtung AB ſenkrecht, ſo erhält man für das Umdrehungsmoment derſelben: cf . O (§. 59.).

Hierdurch werden nun, eben ſo wie oben (§. 59.), die Fibern des Elementes Elei auf der einen Seite von Cc ausgedehnt, und auf der andern zuſammengedrückt; mit einem Worte: ſo wie in jenem Falle Gewicht und Cohäſion am Winkelhebel ECa gegeneinander wirkten, ſo geſchieht dies jetzt am geradlinigten Hebel ECf.

§. 304.

Auf gleiche Art wird auch die Krümmung an jeder andern Stelle der Kurve AyB durch die Laſt O hervorgebracht. Setzt man alſo Ax = x, xy = y den Bogen Ay = s, und den Krümmungshalbmeſſer bey y = r, ſo bekommt man die Gleichung (§. 292. 7.)

$$Oy = \frac{Gbc^3(1 - 3\varkappa + 3\varkappa^2)}{3\varepsilon r}$$

oder, wenn man $\frac{G(1 - 3\varkappa + 3\varkappa^2)}{3\varepsilon} = E$ ſetzt: $Oy = \frac{Ebc^3}{r}$.

Bekanntlich iſt nun $r = -\frac{ds^3}{d^2y\,dx}$; weil aber

die Kurve AyB doch gewiß ſehr wenig von der geraden Linie AB abweicht, ſo kann man hier ohne Bedenken $ds = dx$ ſetzen, wodurch $r = -\frac{dx^2}{d^2y}$ wird. Dieſer Werth von r giebt:

$$Oydx^2 + Ebc^3d^2y = o.$$

Multiplicirt man dieſe Gleichung durch dy, und integrirt dann, ſo erhält man:

$$\tfrac{1}{2}Oy^2dx^2 + \tfrac{1}{2}Ebc^3dy^2 = Cdx^2$$

oder, wenn man $C = \frac{1}{2}Of^2$ ſetzt:

$$O(f^2 - y^2)dx^2 = Ebc^3dy^2, \text{ alſo}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{(f^2 - y^2)}} \cdot \sqrt{\frac{Ebc^3}{O}}$$

Setzt man nun noch $\sqrt{\frac{Ebc^3}{O}} = g$, ſo wird $dx = \frac{gdy}{\sqrt{(f^2 - y^2)}}$, und davon das Integral genommen:

$$x = C + g \,.\, \text{arc Sin} \frac{y}{f}.$$

§. 305.

Aus dieſer Gleichung für die Kurve AyB laſſen ſich folgende Schlüſſe ziehen:

1) Für $x = o$, iſt auch $y = o$, alſo $C = o$, man hat alſo bloß $x = g \,.\, \text{arc Sin} \,.\, \frac{y}{f}$, und gegenſeitig: $y = f \,.\, \text{Sin} \frac{x}{g}$.

2) Zunächſt wird y wieder $= o$, für $\frac{x}{g} = \pi$,

oder $x = g\pi$, und da dies unten bey B geſchieht, ſo wird, wenn wir die ganze Länge des Balken $AB = a$ ſetzen: $a = g\pi$.

3) Darin für g ſeinen Werth $\sqrt{.\frac{Ebc^3}{O}}$ geſetzt, giebt: $Oa^2 = \pi^2 Ebc^3$, oder $O = \frac{\pi^2 Ebc^3}{a^2}$. Da dieſer Ausdruck lauter beſtändige Größen enthält, ſo folgt hieraus der merkwürdige Satz: **daß einerley Gewicht erfordert werde, den Balken, er ſey mehr oder weniger gebogen, in ſeiner Krümmung zu erhalten.**

4) Wenn man die Gleichung $y = f \operatorname{Sin} \frac{x}{g}$ differenziirt, ſo erhält man: $\frac{dy}{dx} = \frac{f}{g} . \operatorname{Cos} \frac{x}{g}$; alſo wird y ein Maximum für $\operatorname{Cos} \frac{x}{g} = 0$, oder $x = \frac{1}{2} g\pi = \frac{1}{2} a$, d. i. in der Mitte c, und daſelbſt iſt $y = f$.

5) Durch nochmaliges Differenciiren wird: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{f}{g^2} \operatorname{Sin} \frac{x}{g}$, folglich $\frac{1}{r} = \frac{y}{g^2} = \frac{\pi^2 y}{a^2}$. Je mehr alſo der Balken gebogen iſt, deſto größer iſt zwar das Moment der Laſt Oy, aber auch zugleich in eben dem Verhältniſſe deſto größer das Moment des Widerſtandes $\frac{Ebc^3}{r}$, woraus der Satz (3) nun ſehr begreiflich wird.

§. 306.

Da der für O gefundene Werth bloß auf die Biegung des Balken ſich bezieht, ſo könnte es ſcheinen, als müſſe die Laſt, die ihn wirklich zerbrechen ſoll, größer als O ſeyn. Allein dies wäre offenbar falſch geſchloſſen: denn da nicht mehr Laſt erfordert wird, den Balken in größerer als in geringerer Biegung zu erhalten, ſo iſt eben dieſe Laſt auch im Stande, ihm die Biegung zu ertheilen, die unmittelbar dem Bruche vorhergeht. Ueberdies lehrt die höhere Mechanik, daß wenn eine Bewegung einmal eingeleitet iſt, und dabey Kraft und Widerſtand ſich das Gleichgewicht halten, ſie alsdann ungehindert fortdaure; daraus folgt alſo für unſern Fall: daß der Balken, wenn er einmal angefangen hat ſich zu krümmen, bey eben dem Gewichte O ſich von ſelbſt immer mehr und mehr krümmen müſſe, und das ſo lange, bis er endlich bricht.

§. 307.

Nach der hier vorgetragenen Theorie verhält ſich demnach die Laſt, die ein Parallelepipedum von gegebener Materie zu tragen im Stande iſt: wie der Kubus derjenigen Seite ſeines Querſchnittes, nach der es gebogen wird, einfach wie die andere Seite, und verkehrt, wie das Quadrat ſeiner Länge.

Sehen wir jetzt, in wie weit die Erfahrung hiermit übereinſtimmt:

1. In Anſehung des Verhältniſſes der Länge. Nach Muſchenbrök (Diſſ. phyſ. pag. 655.) zerbrach

ein Parallelepipedum aus Eichenholze, 0,23 Zoll breit und dick,

bey 18 Zoll Länge unter einer Laſt von 23 ℔
— 9 — — — — — — 92 —
— 8 — — — — — — 128 —

Wie genau dieſe drey Verſuche mit der Theorie zuſammenſtimmen, zeigt ſich aus folgender Vergleichung der letztern beyden mit erſterm:

Länge	angegebenes Gewicht	berechnetes Gewicht
18 Zoll	23 Pfd.	23 Pfd.
9 —	92 —	92 —
8 —	118 —	$116\frac{1}{2}$ —

Ein Parallelepipedum aus Eſchenholze, 9 Zoll lang, zerbrach unter einem Gewichte von 100 Pfd. Nach dieſer Angabe hätte eben dies Parallelepipedum bey 12 Zoll Länge zerbrechen müſſen von — $56\frac{1}{4}$ Pfd.
es zerbrach von — — 55 —

Es iſt alſo keinem Zweifel unterworfen, daß das verkehrte Verhältniß des Quadrates der Länge der Natur vollkommen angemeſſen ſey.

2. In Anſehung des Verhältniſſes der Dicke.

Ein Parallepd. aus Tannenholze, 4 Fuß lang, 0,51 Zoll breit und dick, zerbrach unter einer Laſt von 64 Pfd. 9 Unzen. (Muſchenb. ad phil. Tom. I pag. 474.)

Ein anderes, das bey eben der Länge 0,7 Zoll ins Gevierte betrug, zerbrach von 226 Pfd.

Erſterer Verſuch giebt $\pi^2 E = 2197815$
letzterer — — $\pi^2 E = 2168696$

Man

Man ſieht hieraus, daß ſich beym Tannenholze auch das kubiſche Verhältniß der Dicke als richtig annehmen läßt. Bey andern Holzarten hingegen, namentlich beym Eichenholze, ſcheint es vielmehr, als richte ſich der Widerſtand nach dem Quadrate der Dicke; doch ſind die von Muſchenbrök darüber angeſtellten Verſuche nicht zahlreich genug, als daß man aus ihnen ſichere Reſultate ziehen könnte.

§. 308.

Fig. 26. **Aufgabe.** Ein horizontal liegender Balken AB ſey in den Endpunkten A und B unterſtützt, und in der Mitte D durch eine Hängeſäule CD mit zweyen Streben AC und BC verbunden, die ſich bey A und B gegen Widerlagen ſtützen, und bey C ineinander gefugt ſind; man fragt, wie viel Gewicht der Balken unter dieſen Umſtänden zu tragen im Stande ſey.

Aufl. 1) Wenn der Schwerpunkt der Laſt in die Mitte D fällt, ſo iſt klar, daß der Balken keine Biegung leiden könne, ohne die Säule CD mit ſich herabzuziehen; dies kann aber nicht geſchehen, wofern nicht zugleich die Streben AC und CB gebogen werden. Es kommt alſo hier nur darauf an, wie viel Widerſtand dieſe ihrer Länge nach auszuüben im Stande ſind, ohne ſich zu krümmen, oder, welches einerley iſt, ohne zu zerbrechen (§. 305. 3.).

2) Setzt man nun die Dicke der Streben $=$ c, ihre Breite $=$ b, die halbe Länge des Balken AD $=$ a, den Winkel CAB $=$ CBA $=$ I, ſo iſt AC $=$ BC $=$

$\frac{a}{\text{Cos I}}$, alſo der Widerſtand, den ſie nach AC und BC ausüben können, $= \frac{\pi^2 \text{Ebc}^3 \text{ Cos I}^2}{a^2}$.

3) Die geſuchte Laſt, die wir P nennen wollen, ſtrebt die Säule CD niederzuziehen, und drückt folglich auch den Verbindungspunkt C der beyden Streben herabwärts; daher zerfällt ſie in zwey Seitenkräfte nach CA und CB, jede $\frac{P}{2 \text{ Cos } (90° - I)} = \frac{P}{2 \text{ Sin I}}$; und da dieſen die Feſtigkeit der Streben das Gleichgewicht halten muß, ſo hat man

$$\frac{P}{2 \text{ Sin I}} = \frac{\pi^2 \text{Ebc}^3 \text{ Cos I}^2}{a^2}$$

$$\text{alſo: } P = \frac{2\pi^2 \text{Ebc}^3 \text{ Sin I Cos I}^2}{a^2}.$$

Exempel. Es ſey a = 15′, b = c = 6″, I = 30°, das Holz, woraus die Streben beſtehen, Tannenholz; ſo hat man aus §. 307. für π^2E den mittlern Werth: 2183256, folglich

$$P = \frac{2 \cdot 1296 \cdot 3 \cdot 2183256}{32400 \cdot 2 \cdot 4} = 65497{,}68 \text{ ℔.}$$

§. 282.

Fällt der Schwerpunkt der Laſt P nicht in die Mitte des Balken, ſondern in irgend einen andern Punkt H, ſo wirkt ſie auf die Säule CD nur mittelbar durch den Hebelarm AHD, und es iſt ihr an dieſem im

Punkte D die Laſt P . $\frac{AH}{AD}$ äquipollent. Setzt man alſo AH = f, ſo wird jetzt:

$$\frac{Pf}{a} = \frac{2\pi^2 Ebc^3 \text{ Sin I Cos I}^2}{a^2},$$

$$\text{folglich } P = \frac{2\pi^2 Ebc^3 \text{ Sin I Cos I}^2}{af}.$$

Da aber der Balken in H nicht gehalten wird, ſo muß man zugleich darauf Rückſicht nehmen, ob ſeine Hälfte AD auch ſtark genug ſey, dieſe Laſt tragen zu können. Man ſetze die Laſt, die ihm in eben dem Punkte H ſeine reſpektive Feſtigkeit zu tragen geſtattet, = Q, ſeine Dicke = e, Breite = g, ſo hat man:

$$\frac{Qf(a-f)}{a} = \lambda Age^2 \text{ (§. 293.)}$$

$$\text{alſo: } Q = \frac{\lambda Age^2 a}{af - f^2}.$$

Zwiſchen dieſen beyden Gewichten P und Q darf man offenbar nur dasjenige wählen, welches am kleinſten iſt.

§. 310.

Sowohl für I = o, als für I = 90° iſt P = o; es muß alſo irgend einen Winkel geben, wofür P ein Maximum wird, oder für den der Balken, bey einerley Breite und Dicke der Streben, die möglichſt größte Laſt zu übernehmen im Stande iſt. Um dieſen zu

finden, ſetze man $\mathrm{Sin}\ I = x$, ſo wird $\mathrm{Cos}\ I^2 = 1 - x^2$ alſo:

$$P = \frac{2\pi^2 Ebc^3 (x - x^3)}{a^2}.$$

Hierin das Differenzial des veränderlichen Faktors $x - x^3 = 0$ geſetzt, giebt $3x^2 = 1$, und $x = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = 0{,}5773503$; daher iſt der geſuchte Winkel $I = 35^\circ 15' 52''$.

Zehntes Kapitel.

Von der Friktion.

---

§. 311.

Unter Friktion verſteht man den Widerſtand, den die Rauhigkeit zweyer an einander gedrückten Flächen der Kraft entgegenſetzt, die die eine längſt der andern fortzubewegen ſtrebt.

§. 312.

Man kann die Friktion zwar dadurch vermindern, daß man die Urſache derſelben wegzuräumen ſucht, d. h. daß man den Flächen, ſo viel es ſich thun läßt, ihre Rauhigkeit benimmt; aber gänzlich aufheben läßt ſie ſich dennoch nie, weil jeder Körper doch immer nur einen gewiſſen Grad von Glätte anzunehmen fähig iſt. Dieſer Grad iſt nach Beſchaffenheit der Materie ver-

ſchieden, z. B. bey harten Körpern größer, als bey weichen; bey biegſamen größer als bey ſpröden; woraus ſchon vorläufig erhellet, daß auch die Friktion beym einen Körper größer oder geringer ſeyn müſſe, als beym andern, und daß ſich folglich im Allgemeinen nichts Beſtimmtes darüber feſtſetzen laſſe. Indeß ſtimmen doch alle Verſuche, die man ihrentwegen angeſtellt hat, in folgenden Punkten miteinander überein:

1) Die Friktion richtet ſich nicht nach der Größe der Flächen, die dabey mit einander in Berührung ſind; wenigſtens iſt die Verminderung derſelben, wenn man kleinere Flächen nimmt, ſo gering, daß man in den meiſten Fällen keine Rückſicht darauf zu nehmen braucht.

2) Dagegen hängt ſie von dem Drucke ab, den der Körper gegen die Fläche ausübt, an der er ſich reibt, und iſt dieſem Drucke ziemlich genau proportional. Bey größerem Drucke iſt ſie verhältnißmäßig etwas geringer.

3) Der Umſtand, ob der Körper aus der Ruhe in Bewegung geſetzt wird, oder vorher ſchon eine Bewegung hat, bewirkt in der Friktion einen ſehr merklichen Unterſchied; im erſtern Falle iſt ſie nemlich bey weitem größer als im letztern.

4. Gleichartige Körper reiben ſich nach Verhältniß ſtärker aneinander als ungleichartige. Vielleicht deshalb, weil ihre Theile wegen gleicher Struktur tiefer in einander greifen.

5) Holzarten ſind einer geringern Reibung unterworfen, wenn ſie ſich der Länge ihrer Fibern nach

auf einander hin bewegen, als in die Quere. Nach Herrn Coulomb *) iſt die Friktion im erſtern Falle zu der im letztern wie 234 : 376.

6. Bey wälzender Bewegung iſt die Friktion viel geringer, als bey gleitender. Daher iſt ſie bey gemiſchter Bewegung, wie z. B. bey der Umdrehung der Axen in ihren Pfannen größer, als im erſtern Falle, aber doch immer kleiner als im letztern.

§. 313.

Wenn man annimmt, daß der Körper durch die Kraft, die zur Ueberwindung der Friktion nöthig iſt, über die hervorragenden Hinderniſſe der Fläche hinüber gezogen werden müſſe, ſo läßt ſich daraus erklären, warum die Größe der Fläche auf die Friktion keinen Einfluß hat. Man ſetze, es ſeyen auf dem Theile der Fläche, den der Körper berührt, n ſolcher kleinen Hinderniſſe vorhanden, ſo kommt auf jedes derſelben vom ganzen Drucke des Körpers, den wir P nennen wollen, der Theil $\frac{P}{n}$.

Ferner ſey die ſchiefe Seitenfläche eines ſolchen Theilchens um den Winkel I über der ebenen Grundfläche erhoben, ſo muß bey jedem derſelben eine Kraft $= \frac{1}{n}$ P tang I, parallel mit der Grundfläche ange-

*) Journal de phyſique. Sept. 1785. Hrn. Coulomb's Art, ſich auszudrücken, kann leicht zu Irrthümern Veranlaſſung geben: er beſtimmt die Friktion nach dem Nenner ihres Coefficienten, und nennt ſie größer, wenn es dieſer Nenner iſt; da man ſie doch eigentlich dann kleiner nennen ſollte.

wandt werden, um den Körper hinüber zu ziehen; daher erfordern alle n Hinderniſſe die Totalkraft = P tang I, die alſo vom Drucke P ein unveränderlicher Theil iſt.

Setzt man demnach die Friktion, die beym Drucke P zu überwinden iſt, = F, tang I = λ, ſo hat man F = λP; wo der Coefficient λ für jede beſondere Art von Flächen durch Verſuche beſtimmt werden muß.

§. 314.

Indeß gilt die Vorausſetzung, worauf dies ſich gründet, nur ſo lange, als P nicht ſehr beträchtlich iſt. Man ſieht nemlich leicht, daß bey größerm Drucke manches hervorragende Theilchen niedergebogen werde, das bey kleinerm Drucke widerſteht; es kann alſo der Coefficient λ wohl nicht ganz unveränderlich ſeyn, ſondern muß mit wachſendem Drucke abnehmen, und dies beſtätigt auch die Erfahrung. So z. B. iſt nach den Verſuchen des Herrn **Ximenes** *), wenn ſich Eiſen auf Meſſing reibt, für P = 100 ℔, λ = 0,137; für P = 2400 ℔, λ = 0,103, alſo um den vierten Theil geringer.

§. 315.

Sobald die Bewegung eingeleitet iſt, wird die Friktion plötzlich um ein Anſehnliches geringer, ſo daß ſie z. B. beym Holze nur etwa noch $\frac{1}{4}$ ſo viel beträgt, als zu Anfange. Die Metalle machen indeß hiervon

*) Theoria e Pratica delle Reſiſtenze de' Solidi ne' loro Attriti P. II.

eine Ausnahme, bey denen zwiſchen der Friktion der Bewegung und der Ruhe nie ein ſehr merklicher Unterſchied ſtatt findet. Man kann dies alles aus folgender Tafel näher beurtheilen:

	λ für Ruhe	λ für Bewegung
Eichen auf Tannen	0,65	0,16
Tannen auf Tannen	0,56	0,17
Eichen auf Eichen	0,43	0,10
Ulmen auf Ulmen	0,46	0,10
Eiſen auf Eichen	0,20	0,11
Kupfer auf Eichen	0,18	0,08
Eiſen auf Eiſen	0,28	0,25
Meſſing auf Eiſen	0,17	0,17

Dieſe Verſchiedenheit zwiſchen der Friktion ruhender und bewegter Körper zeigt unverkennbar, daß der Widerſtand nicht bloß vom Reiben herrühre, ſondern daß auch Cohäſionskräfte ſich hierbey einmiſchen. Noch wahrſcheinlicher wird dieſe Vermuthung durch die genauern Verſuche, die von Herrn **Coulomb** in dieſer Hinſicht angeſtellt ſind: je länger die Flächen zuvor in Berührung geweſen waren, deſto größer wurde dadurch der Widerſtand; doch erreichte er nach längerer oder kürzerer Dauer jedesmal eine gewiſſe Grenze, über welche er nie hinauswuchs.

Da die Cohäſion deſto größer iſt, je mehr Theile mit einander in Berührung kommen, ſo ließe ſich das, was bey der Friktion von der Größe der Fläche abhängt, ihrer Einwirkung allein zuſchreiben; und auf

ſolche Art iſt es gedenkbar, daß die Friktion im eingeſchränktern Sinne von der Fläche durchaus unabhängig iſt.

§. 316.

Ein gewöhnliches Hülfsmittel, die Friktion zu vermindern, beſteht darin, daß man die Flächen mit Talg, Theer, Oelen oder andern ſchlüpfrigen Materien überzieht, wodurch begreiflich ihre Zwiſchenräume zum Theil ausgefüllt, alſo die Ungleichheiten auf ihnen mehr geebnet werden.

Bey Metallen bedient man ſich vorzüglich der Oele; beym Holze hingegen, ſo wie bey Metallen, die ſich auf Holz reiben, giebt der Talg die angemeſſenſte Schmiere, der z. B. die Friktion zwiſchen Eichen und Eichen bis auf $\frac{1}{20}$, zwiſchen Buxbaum und Ulmen auf $\frac{1}{80}$, und zwiſchen Metallen und Eichen auf $\frac{1}{40}$ des Drucks herabſetzt. Da jedoch der Talg wegen ſeines leichten Zerfließens ſehr oft erneuert werden muß, ſo bedient man ſich in der Ausübung dennoch lieber der zäheren Schmieren, z. B. des Theers, wenn gleich die Friktion nicht in ſo hohem Grade dadurch vermindert wird.

Friktion eines Körpers, der auf horizontalem Boden fortgezogen wird.

§. 317.

Fig. 84. **Aufgabe.** Die Kraft zu beſtimmen, wodurch eine gegebene Laſt P auf horizontalem Boden fortgezogen wird.

Aufl. 1) Es ſey die geſuchte Kraft $= M$, der Winkel rBu, den ihre Richtung Br mit der Horizontale Bu macht, $= \vartheta$, ſo zerfällt ſie in eine nach Bu $= M \operatorname{Cos} \vartheta$, und in eine nach der Vertikale Bv $= M \operatorname{Sin} \vartheta$.

2) Erſtere wird allein darauf verwandt, die Friktion zu überwinden, der ſie alſo gleich ſeyn muß. Setzt man daher den Druck, den der fortzuziehende Körper gegen den Boden ausübt, $= \Pi$, die Verhältnißzahl der Friktion $= \lambda$, ſo wird $M \operatorname{Cos} \vartheta = \lambda\Pi$.

3) Das Gewicht des Körpers iſt eigentlich auf die Fläche BD, worin er den Boden berührt, gleichförmig vertheilt; da aber hier die Fläche nicht in Betracht kommt, ſo iſt es einerley, wenn man ſich ſein Gewicht bloß auf die Endpunkte B und D vertheilt denkt.

4) Es komme nun auf B der Theil P', auf D der Theil P'', ſo hat man $P' + P'' = P$, und weil von P' der Theil $M \operatorname{Sin} \vartheta$ (1) aufgehoben wird: $\Pi = P' - M \operatorname{Sin} \vartheta + P'' = P - M \operatorname{Sin} \vartheta$.

5) Daher wird $M \operatorname{Cos} \vartheta = \lambda P - \lambda M \operatorname{Sin} \vartheta$,

folglich: $$M = \frac{\lambda P}{\operatorname{Cos} \vartheta + \lambda \operatorname{Sin} \vartheta}.$$

§. 318.

Wenn ein Pferd vor einem Schlitten nach der ſchrägen Richtung Br zieht, ſo iſt M die Spannung des Zugſeiles, und die eigentliche Kraft, die das Pferd

anzuwenden hat, iſt (§. 163.) $= M \cos \vartheta = \frac{\lambda P}{1 + \lambda \tang \vartheta}$, alſo jederzeit kleiner, als beym horizontalen Zuge, und zwar beträgt der Unterſchied $\frac{\lambda^2 P \tang \vartheta}{1 + \lambda \tang \vartheta}$, den wir $= p$ ſetzen wollen.

Dagegen iſt der vertikale Druck, den das Pferd leidet, $= M \sin \vartheta = \frac{\lambda P \tang d}{1 + \lambda \tang \vartheta} = \frac{p}{\lambda}$, folglich $> p$, weil λ allemal < 1 iſt.

Man ſieht alſo hieraus, daß dennoch der ſchräge Zug, er geſchehe unter welchem Winkel man will, nie Vortheil gewähren kann, weil dabey das Pferd weit mehr zu tragen bekommt, als ihm das Fortziehen erleichtert wird; da doch bekanntlich allen Thieren das Tragen beſchwerlicher fällt, als das Ziehen.

Gleichgewicht auf der ſchiefen Fläche mit Betrachtung der Friktion.

§. 319.

Fig. 23. **Aufgabe.** Einem Gewichte P, das auf der ſchiefen Fläche CA liegt, wirke nach der Richtung HG, die durch ſeinen Schwerpunkt G geht, die Kraft V entgegen; man fragt, wie groß dieſe ſeyn müſſe, um zu verhindern, daß das Gewicht längs der Fläche herabgleite.

Aufl. 1) Wenn die Winkel, welche die Linien AC und GH mit der Horizontale CB machen, wie im

§. 117. I und I′ heißen, ſo entſpringt aus dem Gewichte P nach der Richtung GI, parallel mit der Fläche, die Kraft = P Sin I, und der auf die Fläche ſenkrechte Druck = P Cos I.

2) Wird die Kraft V auf gleiche Art zerlegt, ſo erhält man aus ihr, da der Winkel IGD = GDO = I′ — I iſt, nach den entgegengeſetzten Richtungen IG und OG die Kräfte: V Cos (I′ — I) und V Sin (I′ — I).

3) Dieſe beyden Kräfte wirken jenen erſtern entgegen; daher behält das Gewicht nach GI noch die Kraft P Sin I — V Cos (I′ — I), und der eigentliche Druck, den es ſenkrecht gegen die Fläche ausübt, wird = P Cos I — V Sin (I′ — I).

4) Soll alſo das Gewicht in Ruhe bleiben, ſo muß die Friktion, die aus letzterem Drucke entſpringt, die noch vorhandene Kraft nach GI aufheben, folglich hat man:

$$P \operatorname{Sin} I - V \operatorname{Cos} (I' - I) = \lambda P \operatorname{Cos} I - \lambda V \operatorname{Sin} (I' - I),$$

woraus $V = \dfrac{P(\operatorname{Sin} I - \lambda \operatorname{Cos} I)}{\operatorname{Cos}(I' - I) - \lambda \operatorname{Sin}(I' - I)}$ wird.

§. 320.

Folgerung 1. Wenn die Richtung der Kraft V mit AC parallel iſt, ſo iſt I′ = I, alſo V = P (Sin I — λ Cos I).

2. Iſt ſie dagegen horizontal, ſo wird I′ = 0, folglich:

$$V = \frac{P(\operatorname{Sin} I - \lambda \operatorname{Cos} I)}{\operatorname{Cos} I + \lambda \operatorname{Sin} I} = \frac{P(\operatorname{tang} I - \lambda)}{1 + \lambda \operatorname{tang} I};$$ oder,

wenn man unter ω einen Winkel verſteht, deſſen Tangente $= \lambda$ iſt: $V = P . \text{tang} (I - \omega)$.

3. Für $V = o$, iſt $\text{Sin } I - \lambda \text{ Cos } I = o$, alſo $\text{tang } I = \lambda$, $I = \omega$. Bey dieſem Neigungswinkel der Fläche iſt alſo der Körper, ſich ſelbſt überlaſſen, im Begriff herabzugleiten; er bleibt aber doch noch ruhig auf ihr liegen, ohne daß eine Kraft ihn zu halten braucht. **Parent**, der ihn zuerſt in den Mem. de l'acad. de Paris 1704 betrachtet hat, nennt ihn den **Winkel des Gleichgewichtes**; ſonſt pflegt man ihn auch wohl den **Ruhewinkel** zu nennen.

4. Da man den Ruhewinkel durch Verſuche finden kann, ſo veranlaßt dies eine Methode, die Reibungszahl λ zu beſtimmen; man erhält aber begreiflich auf dieſe Art nur den Werth von λ für die Friktion der Ruhe.

§. 321.

Aufgabe. Es bleibe alles wie im §. 319. ungeändert; man ſucht, wie groß die Kraft V ſeyn müſſe, um nicht bloß den Körper im Gleichgewichte zu erhalten, ſondern auch deſſen Friktion zu überwinden; ſo daß durch die geringſte Verſtärkung derſelben der Körper zum Weichen gebracht würde.

Aufl. 1) Der Theil von ihr $V \text{ Cos } (I' - I)$ muß alſo in dieſem Falle größer ſeyn, als die Kraft $P \text{ Sin } I$, womit der Körper nach GI zu ſinken ſtrebt, und der Ueberſchuß $V \text{ Cos } (I' - I) - P \text{ Sin } I$ muß hinreichend ſeyn, um die Friktion, die aus dem ſenk-

rechten Drucke $P \cos I - V \sin (I' - I)$ entſpringt, aufheben zu können.

2) Man hat daher:

$$V . \cos (I' - I) - P \sin I = \lambda P \cos I - \lambda V \sin (I' - I)$$

woraus $V = \frac{P (\sin I + \lambda \cos I)}{\cos (I' - I) + \lambda \sin (I' - I)}$ wird.

3) Für $I' = I$ bekommt man $V = P (\sin I + \lambda \cos I)$. Der Körper wird alſo durch jede mit der Fläche parallele Kraft im Gleichgewichte erhalten, die zwiſchen die Grenzen $P (\sin I - \lambda \cos I)$ und $P (\sin I + \lambda \cos I)$ fällt. Bey erſterer iſt der Körper im Begriff zu ſinken, bey letzterer zu ſteigen.

4) Für $I' = 0$, wird $V = \frac{P (\sin I + \lambda \cos I)}{\cos I - \lambda \sin I}$

$$= \frac{P (\text{tang}\, I + \text{tang}\, \omega)}{1 - \text{tang}\, \omega\, \text{tang}\, I} = P . \text{tang}\, (I + \omega).$$

Friktion bey der Schraube.

§. 322.

Bey der Schraube bewirkt die Friktion, eben ſo wie bey der ſchiefen Ebene, in dem zwiſchen Kraft und Laſt (§. 242.) gefundenen Verhältniſſe eine Aenderung in zwiefacher Hinſicht. Soll nemlich die Friktion vom Gewichte P überwunden werden, ſo iſt in den meiſten Fällen weit weniger Kraft nöthig, als die dortige Gleichung angiebt, um zu verhindern, daß das Gewicht niederſinke; ſoll ſie aber durch die Kraft ſelbſt überwunden werden, ſo muß dieſe bey weitem größer ſeyn.

Im erſtern Falle entſteht aus dem Gewichte p (ebendaſelbſt 5.) nach der Richtung OI die Kraft p tang (I — ω) (§. 320. 2.); folglich erhält man, Fig. 65. da alles Uebrige ungeändert bleibt: $2\pi Vf = \frac{Ph \tan(I-\omega)}{\tan I}$.

Im letztern Falle übt das Gewicht p nach eben der Richtung den Widerſtand p tang (I + ω) aus; alſo wird hier: $2\pi Vf = \frac{Ph \tan(I+\omega)}{\tan I}$.

Es bleibt jetzt noch der Winkel I zu beſtimmen übrig, den man auf folgende Art findet:

In der Ecke bey M, die an MO rechtwinklicht iſt, hat man die Proportion:

$$1 : \tan I = \sin OMT : \tan NMO$$
$$= \sin \lambda : \tan \vartheta$$

Ferner, in der Ecke bey T, die an TO rechtwinklicht iſt:

$$1 : \tan I = \sin MTO : \tan NTO$$
$$= \cos \lambda : \tan \alpha$$

Erſtere Proportion giebt: $\sin \lambda^2 \tan I^2 = \tan \vartheta^2$

letztere: $\cos \lambda^2 \tan I^2 = \tan \alpha^2$

folglich wird: $\tan I^2 = \tan \alpha^2 + \tan \vartheta^2$

und $\tan I = \sqrt{(\tan \alpha^2 + \tan \vartheta^2)}$.

§. 323.

Folgerung. 1. Bey viereckigen Schraubengängen (§. 240. 2.) iſt $\vartheta = 0$, alſo $\tan I = \tan \alpha = \frac{h}{2\pi r}$, folglich

der kleinere Werth von $V = \frac{Pr(h - 2\pi\lambda r)}{f(2\pi r + \lambda h)}$

der größere $= \frac{Pr(h + 2\pi\lambda r)}{f(2\pi r - \lambda h)}$

2. Für $V = 0$, wird $I = \omega$, folglich $\tan I = \tan\omega$, oder $\sqrt{(\tan\alpha^2 + \tan\vartheta^2)} = \lambda$. So lange alſo $\tan\alpha^2 + \tan\vartheta^2$ nicht größer als λ^2 iſt, bewirkt die Friktion, ohne Beyhülfe einer Kraft, allein ſchon den Stillſtand der Schraube; das Gewicht P mag ſo groß ſeyn, als man will.

3. Sind die Schraubengänge viereckig, ſo iſt ihre größte Schiefe, bey der noch die Friktion dem Gewichte Widerſtand leiſtet, $= \omega$; alſo z. B. für $\lambda = \frac{1}{4}$, $\tan\alpha = 0{,}25$, $\alpha = 14°$.

Friktion eines Seiles, das ſich um einen cylindriſchen Körper ſchlägt.

§. 324.

Fig. 85. **Aufgabe.** An einem Seile, das über den Umfang AγB eines cylindriſchen Körpers gelegt iſt, ziehen bey a und f zwey Kräfte P und Q nach den Tangenten Aa, Ff; man fragt, um wie vieles Q größer als P ſeyn könne, ohne daß das Gleichgewicht zwiſchen beyden aufgehoben, oder das Seil nach der Seite F hinüber gezogen werde.

Aufl. 1) Es ſey an irgend einer Stelle y, wie im §. 172., die Spannung des Seiles $= T$; der Krümmungshalbmeſſer $= r$; ſo iſt die Kraft, womit

das

das Element $yy' = ds$ ſenkrecht gegen die Fläche gedrückt wird, (ebendaſ.) $= \frac{Tds}{r}$; alſo die Friktion, die dieſes Druckes wegen zu überwinden iſt, $= \frac{\lambda Tds}{r}$.

2) Um ſo viel kann daher die Spannung des folgenden Elementes $y'y''$ größer als T ſeyn, ohne daß das Gleichgewicht zwiſchen beyden geſtört wird, oder man hat: $dT = \frac{\lambda Tds}{r}$.

3) Wird die Amplitude des Bogens $Ay = \varphi$ geſetzt, ſo iſt $r = \frac{ds}{d\varphi}$, $d\varphi = \frac{ds}{r}$; alſo $dT = \lambda T d\varphi$, $\frac{dT}{T} = \lambda d\varphi$; wovon das Integral: $\log nat. T = \lambda\varphi + C$ iſt.

4) Für $\varphi = 0$, iſt $T = P$, folglich $\log T = \lambda\varphi + \log P$, oder $\log . \frac{T}{P} = \lambda\varphi$; daher $T = P . e^{\lambda\varphi}$.

5) Nennt man die Amplitude des Bogens AF, d. i. den Winkel AOF, den die beyden Normalen AO und FO mit einander machen, $= \alpha$, ſo iſt für $\varphi = \alpha$, $T = Q$; alſo $Q = P . e^{\lambda\alpha}$.

6) Man kann auch das Verhältniß der Kräfte P und Q durch den Winkel $AIF = \gamma$ beſtimmen, den ihre Richtungen aAI und fFI miteinander einſchließen. Da nemlich im Vierecke AOFI ſowol IAO als $IFO = 90^\circ$ iſt, ſo iſt $\alpha = 180^\circ - \gamma$, alſo $Q = P . e^{\lambda(\pi - \gamma)}$

§. 325.

Folgerung 1. Der Widerſtand von Seiten der Friktion wächſt demnach in einem geometriſchen Verhältniſſe, wenn die Amplitude des Bogens, den das Seil auf dem Umfange des cylindriſchen Körpers umſchließt, im arithmetiſchen Verhältniſſe zunimmt.

Euler Novi Comment. acad. Sc. Petrop. Tom. XX. pag. 304.

Belidor arch. hydraul. Tom. I. pag. 113.

2. Für den Bogen AyB = 180°, wobey die Richtungen Aa, Bb der beyden Kräfte parallel werden, hat man $Q = P \cdot e^{\lambda\pi}$. Nimmt man alſo z. B. λ zu $\frac{1}{3}$ an, ſo wird

$$\log Q = \log P + \tfrac{1}{3}\pi \log e.$$ Nun iſt

$$\begin{aligned} le &= 0{,}43429448 \\ \tfrac{1}{3}\pi &= 1{,}0471975 \\ \hline \tfrac{1}{3}\pi\, le &= 0{,}4547921 \\ e^{\frac{1}{3}\pi} &= 2{,}849653 \end{aligned}$$

folglich: $Q = 2{,}849653 \cdot P$

3. Geht das Seil ganz um den Cylinder herum, ſo iſt $Q = P \cdot e^{2\lambda\pi}$; und iſt es n mal um ihn herumgeſchlagen; $Q = P \cdot e^{2n\lambda\pi}$; man würde alſo z. B. für $n = 3$ nach voriger Rechnung $Q = 535\frac{1}{2}\ P$ erhalten.

Bey mehrern Umwindungen kann daher Q ſehr beträchtlich werden, ſelbſt wenn das herabhängende Stück Aa keine fremde Laſt trägt, ſondern bloß durch ſein eigenes Gewicht geſpannt wird.

Friktion der Zapfen in den Pfannen.

§. 326.

Fig. 86. **Aufgabe.** Am Umfange der Welle BGE zieht eine gegebene Laſt P nach der Tangente Bβ; man ſucht die Kraft V, die am Endpunkte A des Hebelarmes AO nach ſenkrechter Richtung Aα angebracht, ihr das Gleichgewicht hält, und zugleich den Widerſtand aufhebt, der durch das Reiben des Zapfens aDb in der Pfanne FID bewirkt wird.

Aufl. 1) Die beyden Kräfte V und P drücken gemeinſchaftlich den Zapfen bey D gegen den innern Umfang der Pfanne, und zwar eben ſo, als wenn ſie nach parallelen Richtungen auf den Punkt D unmittelbar angebracht wären (§. 69.); ſetzt man alſo den Winkel, den ihre Richtungen Aα und Bβ zuſammen einſchließen, $= \gamma$, ſo entſteht aus beyden der mittlere Druck $\Pi = \sqrt{(V^2 + 2VP \operatorname{Cos} \gamma + P^2)}$ (§. 50.).

2) Wäre der Zapfen keiner Reibung unterworfen, ſo müßte die Richtung dieſes Drucks durch ſeinen Mittelpunkt O gehen, oder auf der Tangente Dt, die die Umfänge des Zapfens und der Pfanne am Berührungspunkte D mit einander gemein haben, ſenkrecht ſeyn: aber wegen des Reibens kann der Druck nach einer ſchiefen Richtung Dϱ geſchehen, ohne daß der Zapfen aus dem Gleichgewichte kommt. Wie groß die Abweichung ϱDr von der ſenkrechten Richtung Dr ſeyn dürfe, läßt ſich ſo beſtimmen:

3) Man ſetze $\varrho\mathrm{D}r = \omega$, ſo entſpringt aus dem

Drucke Π der ſenkrechte nach $Dr = \Pi \text{ Cos } \omega$, und ein anderer nach der Tangente $Dt = \Pi \text{ Sin } \omega$. Letztere Kraft ſtrebt den Zapfen nach Dt fortzuſchieben; erſtere verurſacht nach entgegengeſetzter Richtung den Widerſtand $= \lambda\Pi \text{ Cos } \omega$; ſoll alſo dieſer aufgehoben werden, ſo muß $\Pi \text{ Sin } \omega = \lambda\Pi \text{ Cos } \omega$, folglich $\text{tang } \omega = \lambda$ ſeyn.

4) Es widerſtehen demnach der Kraft V an den Hebelarmen OB und QD die beyden Kräfte P und $\lambda P \text{ Cos } \omega$, die eine Umdrehung um O nach entgegengeſetzter Seite zu bewirken ſuchen. Wird alſo $AO = f$, $OB = r$, $OD = e$ geſetzt, ſo erhält man für das Gleichgewicht:

$Vf = Pr + \lambda e\Pi \text{ Cos } \omega = Pr + e\Pi \text{ Sin } \omega$; oder, wenn man für Π ſeinen Werth aus (1) ſubſtituirt:

$Vf = Pr + e \text{ Sin } \omega \sqrt{(V^2 + 2VP \text{ Cos } \gamma + P^2)}$ woraus folgende quadratiſche Gleichung entſteht:

$$V^2 - \frac{2VP(fr + e^2 \text{Sin } \omega^2 \text{ Cos } \gamma)}{f^2 - e^2 \text{ Sin } \omega^2} + \frac{P^2(r^2 - e^2 \text{ Sin } \omega^2)}{f^2 - e^2 \text{ Sin } \omega^2} = 0.$$

5) Sind die Richtungen $A\alpha$ und $B\beta$ parallel, ſo iſt $\gamma = 0$, $\text{Cos } \gamma = 1$, alſo:

$$Vf = Pr + e \text{ Sin } \omega (V + P)$$

$$\text{oder } V = \frac{P(r + e \text{ Sin } \omega)}{f - e \text{ Sin } \omega}.$$

§. 328.

Bey der Rolle hat man auf folgenden Unterſchied zu ſehen: entweder ſitzt der Bolzen an der Rolle feſt, und dreht ſich auf beyden Seiten in Pfannen, oder er iſt

an ſich unbeweglich, und geht in der Mitte durch eine Oeffnung der Rolle. Die Gleichung zwiſchen Kraft und Laſt iſt in beyden Fällen dieſelbe; da hier nemlich $f = r$ iſt, ſo erhält man:

$$V^2 - 2VP\left(\frac{r^2 + e^2 \operatorname{Sin} \omega^2 \operatorname{Cos} \gamma}{r^2 - e^2 \operatorname{Sin} \omega^2}\right) + P^2 = 0,$$

und wenn beyde nach parallelen Richtungen ziehen:

$$V = P.\left(\frac{r + e \operatorname{Sin} \omega}{r - e \operatorname{Sin} \omega}\right);$$

nur bedeutet im erſtern Falle e den Halbmeſſer des Bolzen, und im andern, da die Umdrehung allemal um den Mittelpunkt der Rolle geſchieht, den Halbmeſſer der Oeffnung in der Rolle.

§. 329.

Der Unterſchied zwiſchen V und P wird bloß auf die Ueberwindung der Friktion verwandt: denn wenn keine Friktion ſtatt fände, ſo würde $V = P$ ſeyn müſſen. Man ſetze $V - P = p$, und dividire in der letztern Formel Zähler und Nenner wirklich in einander, ſo bekommt man:

$$V = P\left(1 + \frac{2e \operatorname{Sin} \omega}{r - e \operatorname{Sin} \omega}\right)$$

alſo $P = \dfrac{2Pe \operatorname{Sin} \omega}{r - e \operatorname{Sin} \omega}$.

p

§. 330.

Da das Reiben bey allen drehenden Bewegungen auf einerley Art geſchieht, ſo laſſen ſich darüber mit der

Rolle die einfachſten Verſuche anſtellen; ein Werth von p, den man durch einen Verſuch gefunden hat, giebt nemlich gegenſeitig:

$$\text{Sin}\,\omega = \frac{pr}{(2P + p)\,e}.$$

Eine Rolle von Guajacholz, die Herr **Coulomb** zu einem ſeiner Verſuche gebrauchte, hatte 144‴ im Durchmeſſer, und wog 14 ℔; ihr Bolzen, um den ſie beweglich war, war von Eiſen, und 19‴ dick; dabey betrug der Spielraum zwiſchen ihm und dem Umfange der Oeffnung $1\frac{3}{4}$‴. Man hat alſo hier $e = 20\frac{3}{4}$, folglich ſehr nahe $\frac{r}{e} = 7$, und da das Gewicht der Rolle zu 2P + p hinzu kommt,

$$\text{Sin}\,\omega = \frac{7p}{2P + p + 14}.$$

Folgendes Täfelchen enthält Herrn **Coulombs** Angaben, nebſt den daraus berechneten Werthen von Sin ω:

P	p	Sin ω
103	6	0,186
200	$10\frac{1}{2}$	0,148
400	21	0,151
		3) 0,485

mittl. Werth von Sin ω = 0,162

Ich füge hier noch einige Reſultate ſeiner übrigen Verſuche bey:

1) Bey eiſernen Axen, die ſich auf kupfernen

Zapfenlagern drehen, iſt Sin $\omega = \frac{1}{6}$, und wenn Talg dazwiſchen gebracht wird, Sin $\omega = \frac{1}{11}$; Schmiere $= \frac{2}{17}$; Oel $= \frac{1}{8}$.

2) Das Reiben eiſerner Axen auf hölzernen Lagern iſt in den meiſten Fällen, wenn die Schmiere vortheilhaft gewählt wird, $= \frac{1}{20}$; beym Oele hingegen $= \frac{1}{8}$ und mehr, doch nie über $\frac{2}{15}$.

3) Beym Drehen eichener Axen auf Guajacholz, das mit Talg geſchmiert wird, iſt Sin $\omega = \frac{1}{26}$; auf Ulmenholz $= \frac{1}{33}$; und, wird der Talg wieder abgewiſcht, im erſtern Falle $= \frac{1}{17}$, im letztern $= \frac{1}{20}$.

4) Die Geſchwindigkeit hat in allen dieſen Fällen keinen Einfluß auf die Friktion.

§. 331.

Da ſich die Rolle bey ihrer Umdrehung an dem Seile, das über ihren Umfang geht, fortwälzt, ſo entſteht eigentlich auch dadurch eine Art von Reibung, die von der Kraft überwunden werden muß; indeß iſt dieſe ſicher zu gering, als daß ſie gegen das Reiben der Axe auf den Pfannen in Anſchlag käme. Bey weiten größer iſt dagegen der Widerſtand, den das Seil durch ſeine Steifheit der Kraft entgegenſetzt: ſoll nemlich die Rolle ſich umdrehen, ſo muß von dem ſtraffen Seilſtücke, woran die Laſt hängt, ein Theil nach dem andern über ihren Umfang herumgebogen werden, und dazu iſt allemal eine gewiſſe Kraft nöthig, die deſto größer ſeyn muß, je weniger das Seil Biegſamkeit beſitzt.

Nach Amonton's Verſuchen *) verhält ſich die Kraft, die zur Biegung eines Seiles erfordert wird, direkt wie ſeine Dicke und Spannung, und verkehrt wie der Krümmungshalbmeſſer. Aus Herrn Coulomb's Verſuchen hingegen läßt ſich auf kein beſtimmtes Verhältniß in Anſehung der Dicke des Seiles ſchließen; jedoch ſtimmt nachſtehende Formel mit den meiſten dieſer Verſuche, ſo viel es die Unregelmäßigkeit derſelben zuläßt, ziemlich genau überein:

$$w = \frac{c^{1,7}}{r} \cdot (2{,}45 + 0{,}053\, t)$$ **)

worin c die Dicke des Seiles in Linien ausgedrückt, t ſeine Spannung, r den Halbmeſſer der Rolle oder der Welle ebenfalls in Linien, und w die Kraft bedeutet, die auf die Biegung des Seiles verwandt wird.

Exempel. Es ſey der Halbmeſſer der Rolle $r = 24'''$, $c = 9'''$, die Spannung $t = 625$ ℔, ſo hat man $c^{1,7} = 42$; $2{,}45 + 0{,}053\, t = 35{,}575$ ℔, alſo

$$w = \frac{42 \times 35{,}575}{24} = 62\tfrac{1}{4} \text{ ℔}.$$

§. 332.

Um dieſen Widerſtand zugleich mit in Rechnung zu bringen, ſetze man $w = \frac{G + gt}{r}$, und $\sin \omega = \lambda$, ſo wird (§. 327. 5.)

*) Mem. de l'acad. de Paris 1699.

**) Prony Nouvelle archit. hydraul. P. I. pag. 499.

$$Vf = Pr + \lambda e\,(V + P) + G + gP$$

$$V\,(f - \lambda e) = P\,(r + \lambda e + g) + G$$

folglich $V = \dfrac{(r + \lambda e + g)\,P + G}{f - \lambda e}$,

und bey der Rolle:

$$V = \frac{(r + \lambda e + g)\,P + G}{r - \lambda e}$$

alſo p (§. 329.) $= \dfrac{(2\lambda e + g)\,P + G}{r - \lambda e}$

Exempel. Es ſey $P = 500$ ℔, $r = 72'''$, $e = 18'''$, die Dicke des Seiles $c = 9'''$, ſo wird $G = 103$ ℔, $g = 2{,}226$; folglich, wenn wir $\lambda = \frac{1}{6}$ ſetzen:

$$p = \frac{4113 + 103}{72 - 3} = 61\tfrac{7}{69}\ ℔.$$

§. 333.

Aufgabe. Beym Flaſchenzuge das genauere Verhältniß zwiſchen Kraft und Laſt zu beſtimmen, wenn dabey ſowol die Friktion, als die Steifheit der Seile in Betracht gezogen werden ſoll.

Aufl. Es ſey die zu hebende Laſt $= P$; die Kraft, die ihr das Gleichgewicht hält, und zugleich den Widerſtand beyderley Art überwindet, $= V$; die Anzahl der Rollen in jeder Flaſche $= n$; ihr mittlerer Halbmeſſer $= r$, der Halbmeſſer ihrer Zapfen $= e$; die Spannung des Seilſtücks, woran unmittelbar die Kraft zieht, $= t$; die der folgenden $= t', t'', t''' \ldots t^{(2n)}$, ſo hat man

1) $t = V$ und

$$t' + t'' + t''' \ldots + t^{(2n)} = P$$

2) Wegen gedachter Hinderniſſe geht von der Spannung des Seiles jedesmal, wenn es ſich um eine andere Rolle ſchlägt, ein Theil verloren, ſo daß die Werthe t, t', t'' u. ſ. w. eine abnehmende Reihe bilden. Es wird nemlich:

$$t = \frac{(r + \lambda e + g)\,t' + G}{r - \lambda e} \quad (\text{§. } 332.)$$

oder gegenſeitig $t' = \dfrac{(r - \lambda e)\,t - G}{r + \lambda e + g}$

und auf gleiche Art: $t'' = \dfrac{(r - \lambda e)\,t' - G}{r + \lambda e + g}$ u. ſ. w.

3) Man ſubſtituire allemal den vorhergehenden Ausdruck in den nächſtfolgenden, und ſetze der Kürze wegen $\dfrac{r - \lambda e}{r + \lambda e + g} = i$, $\dfrac{G}{r + \lambda e + g} = \varkappa$, ſo erhält man:

$t' = it - \varkappa$, $t'' = i^2 t - (i + 1)\varkappa$, $t''' = i^3 t - (i^2 + i + 1)\varkappa$ u. ſ. w. oder:

$$t' = it - \varkappa$$

$$t'' = i^2 t - \left(\frac{1 - i^2}{1 - i}\right)\varkappa$$

$$t''' = i^3 t - \left(\frac{1 - i^3}{1 - i}\right)\varkappa \text{ u. ſ. w.}$$

$$t^{(2n)} = i^{2n} t - \left(\frac{i - i^{2n}}{i - i}\right)\varkappa$$

$$P = \frac{i(1 - i^{2n})}{1 - i} \cdot t - \left[\frac{2n}{1 - i} - \frac{i(1 - i^{2n})}{(1 - i)^2}\right]\varkappa$$

alſo $V = t = \dfrac{(1 - i)}{i(1 - i^{2n})} \cdot P + \left(\dfrac{2n}{i(1 - i^{2n})} - \dfrac{1}{1 - i}\right)\varkappa$

4) Setzt man $1 - i = \frac{2\lambda e + g}{r + \lambda e + g} = \omega$, und läßt die höhern Potenzen, ſo wird $1 - i^{2n} = 2n\omega\,(1 - (n - \tfrac{1}{2})\omega)$, und $\frac{2n}{i(1 - i^{2n})} - \frac{1}{1 - i} = \frac{1}{\omega(1 - (n + \tfrac{1}{2})\omega)} = \frac{1}{\omega} = (n + \tfrac{1}{2})$, folglich:

$$V = \frac{[1 + (n + \tfrac{1}{2})\omega]\,P}{2n} + (n + \tfrac{1}{2})\,\varkappa,$$

$$= \frac{P}{2n} + (n + \tfrac{1}{2}) \cdot \left(\frac{P\omega}{2n} + \varkappa\right)$$

$$= \frac{P}{2n} + \frac{2n + 1}{4n} \cdot \left[\frac{(2\lambda e + g)\,P + 2nG}{r + \lambda e + g}\right]$$

Friktion bey der Waage.

§. 334.

Es ſey an der Schnellwage AOB

der kürzere Arm AO . . .	$= a$
die in A aufgehängte Laſt . .	$= P$
das Laufgewicht	$= V$
ſeine Entfernung OF vom Ruhepunkt	$= f$
das Gewicht des ganzen Wagebalken	$= G$
die Entfernung ſeines Schwerp. von O	$= g$
der Halbm. des Zapfen, um den er ſich dreht	$= e$

ſo wird nach §. 327.

$$Vf + Gg = Pa + \lambda e\,(V + P + G)$$

oder $V\,(f - \lambda e) = P\,(a + \lambda e) - G\,(g - \lambda e)$

Man nenne die Laſt, die der Arm OB durch ſein eigenes Gewicht aufwiegt, $= H$, ſo erhält man für $V = o$:

$$H(a + \lambda e) - G(g - \lambda e) = o$$

$$\text{alſo } G = \frac{H(a + \lambda e)}{g - \lambda e}$$

Dieſer Werth für G, in voriger Gleichung ſubſtituirt, giebt:

$$V(f - \lambda e) = (P - H)(a + \lambda e).$$

§. 335.

Bey der gleicharmigen Wage iſt $g = o$, $f = a$, alſo:

$$Va = Pa + \lambda e\,(V + P + G)$$

oder, wenn man $V - P = p$ ſetzt:

$$pa = \lambda e\,(2P + p + G),$$

$$p(a - \lambda e) = \lambda e(2P + G);$$

$$\text{daher } p = \frac{\lambda e(2P + G)}{a - \lambda e}.$$

Da von einer genauen Wage gefordert wird, daß ſie den geringſten Unterſchied zwiſchen den Gewichten anzeigen ſoll, ſo muß man bey ihr den Einfluß der Friktion, ſo viel, als ſich thun läßt, zu vermindern ſuchen. Dies geſchieht, wie die Formel zeigt:

1) dadurch, daß der Zapfen eine ſehr geringe Dicke bekommt; doch muß er Stärke genug behalten, um die Laſt $2P + G$, die auf ihm ruhet, tragen zu können. Man findet deshalb an ſehr feinen Wagen zuweilen priſmatiſche Zapfen, die auf der innern Fläche der Oeffnungen in der Schwere mit der ſcharfen Kante aufliegen.

2) Indem man die Arme ſo lang und dabey ſo leicht macht, als ohne die Gefahr, daß ſie bey größern Gewichten ſich biegen könnten, geſchehen darf. Wegen letzterer Rückſicht beſteht der Wagebalken bey den Ramsden'ſchen Wagen aus zweyen hohlen Kegeln, die am Ruhepunkte mit ihren Grundflächen zuſammenſtoßen.

Friktion bey ſtehender Welle.

§. 336.

Fig. 87. **Aufgabe.** Eine cylindriſche Welle, deren Gewicht = P iſt, ruhet mit ihrer Grundfläche DGEB auf horizontalem Boden, und iſt um die vertikale Axe beweglich, die durch ihren Mittelpunkt O geht; man fragt, wie viel Kraft an den Endpunkt F des Hebelarmes OF nach ſenkrechter Richtung Ff angebracht werden muß, um die Friktion zwiſchen der Grundfläche und den Boden aufzuheben.

Aufl. 1) Wir wollen ſetzen, eine Vertikale aus dem Schwerpunkte der Welle treffe die Grundfläche in O, ſo vertheilt ſich der Druck P auf ihr gleichförmig (§. 158.); ſetzt man daher ihren Halbmeſſer = ϱ, ſo iſt $\pi\varrho$ ihr Inhalt, folglich $\frac{P}{\pi\varrho^2}$ die Einheit des Druckes, die wir = $\varkappa$ ſetzen wollen.

2) Es kommt alſo auf den unendlich ſchmalen Ring, der von O allenthalben um OI = Z abſteht, und die Breite Ii = dz hat, vom ganzen Drucke der Theil $2\pi\varkappa z dz$, und die Friktion, die dadurch entſteht, iſt = $2\pi\lambda\varkappa z dz$.

3) Da dieſer Widerſtand in einer Entfernung von $O = Z$ überwunden werden muß, ſo iſt am Hebelarme OIF ſein Moment $= 2\pi\lambda\kappa z\, dz$, und die Summe dieſer Momente von allen einzelnen Ringen, aus denen die Grundfläche beſteht, $= \int 2\pi\lambda\kappa z^2 dz = \frac{2}{3}\pi\lambda\kappa z^3$; welches Integral für $z = e$, $= \frac{2}{3}\pi\lambda\kappa e^3$ wird.

4) Heißt demnach M die geſuchte Kraft, f die Länge des Hebelarmes OF, ſo hat man:

$Mf = \frac{2}{3}\pi\lambda\kappa e^3$, oder wenn man für κ ſeinen Werth $\frac{P}{\pi\varrho^2}$ ſetzt (1): $Mf = \frac{2}{3}\lambda eP$.

§. 337.

Folg. 1. Wenn die Welle unten auf einem dünnern Zapfen läuft, ſo trägt dieſer ihr ganzes Gewicht, das ſich auf ſeiner Grundfläche gleichförmig vertheilt. Daher bedeutet c in dem Falle den Halbmeſſer des Zapfen, und die Dicke der Welle kommt dabey weiter gar nicht in Betracht; alles Uebrige aber bleibt in der Formel ungeändert.

2. Da die Kraft M von der Friktion aufgehoben wird, ſo leidet der Zapfen keinen Seitendruck, alſo auch weiter keine Friktion, als die an der Grundfläche. Dieſer Fall tritt aber ein, wofern die Welle unter irgend einem Winkel ϑ gegen die Vertikale geneigt wird: man nenne M′ den Theil von M, der alsdann auf die Friktion an der Grundfläche des Zapfen, und M″ den Theil, der auf die Seitenfriktion verwandt wird, ſo hat man: $M'f = \frac{2}{3}\lambda eP \operatorname{Cos} d$, und wenn man die

Friktionszahl der drehenden Bewegung λ' nennt:

$$M''f = \lambda'e\,(M'' + P \,\mathrm{Sin}\,\vartheta)\ (\S.\ 327.\ 5.)$$

$$M'' = \frac{\lambda'eP\,\mathrm{Sin}\,\vartheta}{f - \lambda'e};$$

folglich wird $M = M' + M'' = \frac{2\lambda eP\,\mathrm{Cos}\,\vartheta}{3f} + \frac{\lambda'eP\,\mathrm{Sin}\,\vartheta}{f - \lambda'e}$; oder, wenn wir $\lambda' = \lambda$ ſetzen, und im Nenner des zweyten Theiles $\lambda'e$ als unbedeutend gegen f weglaſſen: $M = \frac{\lambda eP}{f}\left(\frac{2}{3}\,\mathrm{Cos}\,\vartheta + \mathrm{Sin}\,\vartheta\right)$.

3. Das Differenzial des eingeſchloſſenen Faktors iſt $= (\mathrm{Cos}\,\vartheta - \frac{2}{3}\,\mathrm{Sin}\,\vartheta)\,d\vartheta$; alſo poſitiv, ſo lange tang $\vartheta < \frac{3}{2}$ iſt, und negativ, ſo bald tang $\vartheta < \frac{3}{2}$ wird. Daher wird die Friktion Anfangs mit zunehmender Schräge der Axe größer; erreicht für $\vartheta = 56°18'$ ein Maximum, und nimmt dann wieder ab, ſo wie ſich die Axe mehr der horizontalen Lagenähert.

4. Hierin liegt vorzüglich der Grund, warum manche Uhren nur in horizontaler Lage richtig gehen, und wenn ſie aufgehängt, oder in irgend eine andere Lage gebracht werden, um ein merkliches zurückbleiben.

5. Da der Zapfen in vertikaler Lage nach Verhältniß ſeiner Dicke weit mehr tragen kann, als in horizontaler Lage, ſo kann bey einerley Druck ſein Halbmeſſer e im erſtern Falle viel kleiner ſeyn, als im letztern; alſo hat auch in dieſer Rückſicht die vertikale Welle vor der horizontalen den Vorzug.

Friktion beym Räderwerke.

§. 338.

Im §. 219 u. f. iſt gezeigt, daß bey einer angemeſſenen Form der Zähne die Kraft M am Umfange jederzeit von einer gleich großen Kroft am Umfange des dareingreifenden Getriebes im Gleichgewichte erhalten werde. Soll nun letztere Kraft das Rad wirklich in Bewegung ſetzen, ſo muß ſie, um Theils die Friktion an den zuſammenſtoßenden Zähnen, theils die an den Axen zu überwinden, offenbar größer als M ſeyn; da letzteres Hinderniß nach §. 326. leicht beſtimmt werden kann; ſo wollen wir bloß ſuchen, wieviel von ihr auf die Ueberwindung der Friktion an den Zähnen verwandt wird.

§. 339.

Fig. 54. Man ſetze dieſe Kraft = m; den gegenſeitigen Druck, den die Zähne ſenkrecht aufeinander, oder nach der Normale MO ausüben, = N; ſo bewirkt dieſer die Friktion = λN, deren Richtung nach der Tangente uMt geht, die die beyden Zähne am Punkte M ihres Zuſammenſtoßens mit einander gemein haben.

Man zerlege den Widerſtand λN in eine Kraft nach CM = λN Cos uMC = λN Sin CMO, und in eine nach der darauf ſenkrechten Richtung Mm = λN Sin uMC = λN Cos CMO; erſtere wirkt auf den feſten Punkt C, und wird alſo aufgehoben; letzterer, die

am

am Hebelarme MC das Moment MC . λN Cos CMO hat, iſt am Endpunkte O des Halbmeſſers OC die Kraft $\frac{MC}{OC}$. λN Cos CMO äquipollent, und da dieſe unmittelbar der Kraft m entgegenwirkt, ſo hat man

$$m = \frac{MC}{OC} . \lambda N \operatorname{Cos} CMO.$$

Nun iſt $N = \frac{M}{\operatorname{Sin} MOC}$ (§. 217.) und

$MC : OC = \operatorname{Sin} MOC : \operatorname{Sin} CMO$, folglich wird

$$m = \frac{\lambda M \operatorname{Cos} CMO}{\operatorname{Sin} CMO} = \lambda M \operatorname{Cot.} CMO.$$

Die Friktion iſt alſo während der Zeit, daß zwey Zähne aneinander fortgleiten, beſtändigen Aenderungen unterworfen, und hängt jedesmal von dem Winkel MCO ab, um den ſich der Halbmeſſer MC von der Mittelpunktslinie CD entfernt hat. Man ſetze dieſen Winkel $= \varphi$, ſo erhält man im Dreyecke MCO : tang

$$CMO = \frac{OC \operatorname{Sin} \varphi}{MC - OC \operatorname{Cos} \varphi}$$

Da der Halbmeſſer MC von OC höchſtens um die Länge des Zahns, oder den Halbmeſſer des Triebſtocks verſchieden ſeyn kann, ſo darf man, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, MC = OC ſetzen; dadurch wird $\operatorname{tang} CMO = \frac{\operatorname{Sin} \varphi}{1 - \operatorname{Cos} \varphi} = \frac{2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\varphi \operatorname{Cos} {}^{1}\varphi}{2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\varphi^2}$ $= \operatorname{Cot} \frac{1}{2}\varphi$, alſo endlich:

$$m = \lambda M \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi$$

mithin die ganze Kraft am Getriebe:

$$M + m = M\,(1 + \lambda \tang \tfrac{1}{2}\varphi)$$

Exempel. Für 20 Zähne oder Triebſtöcke iſt die größte Abweichung $\varphi = 18°$, alſo $\tang \frac{1}{2}\varphi = 0{,}1583845$, und wenn $\lambda = \frac{1}{3}$ geſetzt wird, $m = 0{,}0527948\,M$, $M + m = 1{,}0527948\,M$, oder beynahe $= \frac{20}{19}\,M$.

Anmerk. Nach Belidors Rechnung beträgt in gegenwärtigem Falle (eigentlich für $\varphi = 18°26'$) $m = \frac{1}{18}\,M$, welches mit dem eben gefundenen Reſultate ziemlich genau überein kommt. Beträchtlicher weicht Herrn Langdorfs Formel *) von der meinigen ab; ich muß aber bekennen, daß die Art, wie er ſich dabey des Prinzips der virtuellen Geſchwindigkeiten bedient hat, mir einigen Bedenklichkeiten unterworfen zu ſeyn ſcheint.

§. 340.

Aufgabe. Am Umfange der Welle des Rades OGB hängt die Laſt P; man fragt, wie viel Kraft V auf den Umfang des Rades AEF angebracht werden muß, damit nicht allein die Laſt im Gleichgewichte erhalten, ſondern auch die Friktion an den Zähnen überwunden werde.

Aufl. 1) Man ſetze den Halbmeſſer $AC = R$, $aC = r$, $OD = R'$, $Db = r'$; ſo iſt der Kraft V am Punkte O die Kraft $M + m = \frac{VR}{r}$, und der Laſt P an eben dem Punkte die Kraft $M = \frac{Pr'}{R'}$ äquipollent (§. 209). Es wird alſo:

*) Maſchinenlehre I. Th. pag. 48.

$$\frac{VR}{r} = \frac{Pr'}{R'}(1 + \lambda \tang \tfrac{1}{2}\phi), \text{ oder}$$

$$V = \frac{r \cdot r'}{RR'} \cdot P (1 + \lambda \tang \tfrac{1}{2}\phi)$$

2) Beym Eingreifen mehrerer Räder in einander kann man für tang $\frac{1}{2}\phi$ einen mittlern Werth $\varkappa$ annehmen. Auf dieſe Art erhält man für drey Räder: $V = \frac{rr'r''}{RR'R''} \cdot P (1 + \lambda\varkappa)^3$.

§. 341.

Wenn das Getriebe in ein Kronrad eingreift, ſo ſind zwey Fälle zu unterſcheiden.

1. Wenn das Getriebe Zähne hat: Alsdann berühren ſich die Zähne beyder Räder beſtändig in einem Punkte der Linie OM, die auf CI ſenkrecht iſt (§. 225.); daher iſt hier der Winkel CMO jedesmal $= 90° - OCM = 90° - \phi$, alſo $m = \lambda M \text{ Cot } CMO = \lambda m \tang \phi$, und folglich $M + m = M (1 + \lambda \tang \phi)$.

2. Bey Triebſtöcken hingegen geſchieht die Berührung allemal in der Sehne MO, die den Winkel MCO mißt (§. 235.); folglich iſt in dieſem Falle wieder $CMO = 90° - \frac{1}{2} MCN$, alſo $m = \lambda M \tang \frac{1}{2}\phi$.

§. 342.

Fig. 61. **Aufgabe.** Es ſey das Gewicht des Stempels AB, der vermittelſt des Daumen FM gehoben werden ſoll, $= P$; man fragt, um wieviel die Kraft an dem Umfange der Welle OFK größer ſeyn müſſe,

damit ſowohl die Friktion zwiſchen der Hebelatte und dem Daumen, als auch die an den Wänden der Leitungen Ee und Gg überwunden werde.

Aufl. 1) Man ſetze die Länge der Hebelatte DM mit Inbegriff der halben Dicke des Stempels (§. 232.) $= f$, die Entfernung EG $= a$, die Kraft, die auf den Punkt O nach der Tangente OM angebracht werden muß $= P'$, ſo bewirkt dieſe an den Scheidelatten bey E und g den Seitendruck $\frac{fP'}{a}$, und folglich an jeder Seite die Friktion $\frac{\lambda fP'}{a}$.

2) Demnach iſt der geſammte Widerſtand, der ſich der Kraft P' unmittelbar nach der Vertikale MO entgegenſetzt, $= P + \frac{2\lambda fP'}{a}$.

3) Aus dieſem entſpringt ferner bey M die Friktion $= \lambda\,(P + \frac{2\lambda fP'}{a})$, deren Richtung MD iſt; man zerlege ſie in eine Kraft nach Mr, längſt dem Halbmeſſer CM, und in eine darauf ſenkrechte nach Mn.

4) Erſtere iſt $= \lambda\,(P + \frac{2\lambda fP'}{a})$ Cos DMr, und wird am Mittelpunkte C aufgehoben; letztere iſt $= \lambda\,(P + \frac{2\lambda fP'}{a})$ Sin DMr, für die man am Punkte O, ſenkrecht auf CO, die Kraft $\frac{MC}{OC} \cdot \lambda\,(P + \frac{2\lambda fP'}{a})$ Sin DMr $= \lambda\,(P + \frac{2\lambda fP'}{a})$ tang MCO ſubſtituiren kann.

5) Setzt man alſo CMO $= \varphi$, ſo wird:

$$P' = P + \frac{2\lambda f P'}{a} + \lambda\left(P + \frac{2\lambda f P'}{a}\right) \text{tang}\, \varphi$$

$$= \left(P + \frac{2\lambda f P'}{a}\right)(1 + \lambda\, \text{tang}\, \varphi)$$

folglich $P'\left(1 - \frac{2\lambda f}{a} - \frac{2\lambda^2 f\, \text{tang}\, \varphi}{a}\right) = P$ $(1 + \lambda\, \text{tang}\, \varphi$, und, wenn man $\lambda^2\, \text{tang}\, \varphi$ gegen λ wegläßt:

$$P' = \frac{aP(1 + \lambda\, \text{tang}\, \varphi)}{a - 2\lambda f}$$

6) Es ſey noch die Höhe OM, zu der der Stempel gehoben wird, $= h$, der Halbmeſſer der Welle OC $= r$, ſo hat man $h = r\, \text{tang}\, \varphi$; alſo wird der größte Werth, den P' annehmen kann, $= \frac{aP(r + \lambda h)}{r(a - 2\lambda f)}$.

§. 343.

Es bleibt jetzt noch übrig, den Einfluß der Friktion bey der Schraube ohne Ende zu beſtimmen, die in die Zähne eines daranliegenden Rades eingreift.

Da die Laſt P (§. 250.) durch den Zahn des Rades einen Widerſtand $= \frac{Pr}{R}$ gegen den daranſtoßenden Schraubengang parallel mit der Axe ausübt (§. 249. 3.), und die Gänge der Schraube allemal viereckig ſind (ebendaſ. 2.), ſo hat man, wenn man den Halbmeſſer der Spindel ϱ nennt: $V = \frac{\varrho Pr(h + 2\pi\lambda\varrho)}{Rf(2\pi\varrho - \lambda h)}$ (§. 323.)

Um zugleich die Friktion an der Axe des Rades in Betracht zu ziehen, wollen wir den gewöhnlichen Fall annehmen, die Schraube habe eine horizontale Lage. Man ſetze nun, ſtatt V ſey jetzt die Kraft $(1+i)V$ nöthig, ſo iſt die Rückwirkung der Schraube auf den Zahn $= \frac{(1+i)Pr}{R}$, und da deren Richtung mit der Richtung der Laſt einen rechten Winkel macht, ſo bewirken beyde in Verbindung auf die Axe C Fig. 68. den Druck $\sqrt{(P^2 + (\frac{(1+i)^2P^2r^2}{R^2})} = P\sqrt{(1 + \frac{(1+i)^2r^2}{R^2})}$, wodurch an ihrem Zapfen die Friktion $\lambda P\sqrt{(1 + \frac{(1+i)^2r^2}{R^2})}$ entſteht.

Da dieſe als Hebelkraft wirkt, ſo kann man ihr am Punkte o, wenn man den Halbmeſſer des Zapfen $= e$ ſetzt, die Kraft $\frac{\lambda eP}{R}\sqrt{(1 + \frac{(1+i)^2r^2}{R^2})}$ ſubſtituiren; man erhält demnach:

$$\frac{Pr}{R} + \frac{\lambda eP}{R}\sqrt{(1 + \frac{(1+i)^2r^2}{R^2})} = \frac{(1+i)Pr}{R}, \text{ oder}$$

$$1 + \frac{\lambda e}{r}\sqrt{(1 + \frac{(1+i)^2r^2}{R^2})} = 1 + i$$

Es iſt alſo i beynahe $= \frac{\lambda e}{r}$, und wenn man dies mit dem i, das unter dem Wurzelzeichen ſteht, verwechſelt, ſo bekommt man genauer:

$$1 + i = 1 + \frac{\lambda e}{r}\sqrt{(1 + \frac{(r+\lambda e)^2}{R^2})},$$

womit folglich der oben gefundene Werth von V noch multiplicirt werden muß.

Friktion der wälzenden Bewegung.

§. 344.

Es ſey (Fig. 25.) EBG der Querſchnitt eines Cylinders, der auf horizontalem Boden liegt, ſein Halbmeſſer CB = a, ſein Gewicht = P, der jedesmalige Zwiſchenraum zwiſchen den hervorragenden Hinderniſſen des Bodens = f, ſo iſt nach §. 126., wenn man daſelbſt $\varepsilon = 0$ ſetzt, die Kraft, die nach horizontaler Richtung CE auf ſeinen Schwerpunkt C angebracht, die Friktion überwindet, $= \frac{Pf}{a}$. Dieſe Kraft verhält ſich alſo direkt, wie das Gewicht des Cylinders, und verkehrt, wie ſein Halbmeſſer.

Herr Coulomb *) fand eben daſſelbe durch Verſuche auf folgende Art:

Fig. 85. Er ließ über einen Cylinder EBD, der auf zwey horizontale Leiſten gelegt war, ein dünnes Seil FDEG gehen, und behing beyde Enden deſſelben DF, EG anfangs mit gleichen Gewichten; dann aber legte er auf der einen Seite ſo viel Gewicht hinzu, bis der Cylinder fortzurollen anfing. In nachſtehender Tafel enthält die erſte Kolumne das ganze Gewicht P, womit der Cylinder gegen die Fläche gedrückt wurde; die andern beyden enthalten das Gewicht p, das zur Ueberwindung der Friktion nöthig war.

*) a. a. O. pag. 287.

P	Diam. 6 Zoll	Diam. 2 Zoll
100 ℔	0,6 ℔	1,6 ℔
500 ⸗	3,0 ⸗	9,4 ⸗
1000 ⸗	6,0 ⸗	18,0 ⸗

Dies Gewicht p wirkt hier am Hebelarme BE nach der ſchiefen Richtung EG, und hat folglich das Moment p . BI = p . CE; ihm iſt alſo am Arme BC des Winkelhebels CBE nach horizontaler Richtung CE eine gleich große Kraft p äquipollent. Man ſetze nun den Halbmeſſer CE = a, ſo wird: für a = 3 Zoll, und P = 100,500 und 1000 ℔, pa = 0,018 P;

für a = 1 Zoll	pa
P = 100 ℔	1,6 ℔ = 0,016 P
= 500 ⸗	9,4 ⸗ = 0,019 ⸗
= 1000 ⸗	18,0 ⸗ = 0,018 ⸗
	3) 0,053 P
	mittl. Werth von pa = 0,0177 P

Daher kann man $p = 0{,}018 . \frac{P}{a}$ ſetzen, wobey a in Zollen ausgedruckt ſeyn muß.

Bey den hier angeführten Verſuchen war ſowol der Cylinder, ſo wie die Fläche, worauf er fortrollte, von Guajacholz; beym Ulmenholze war dagegen die Friktion um $\frac{2}{5}$ größer, alſo $p = 0{,}025 . \frac{P}{a}$. Talg und andere Fettarten bewirkten in dieſer Art von Friktion keinen Unterſchied.

§. 345.

Fig. 24. Wenn alſo ein cylindriſcher Körper, deſſen Gewicht P iſt, längs der ſchiefen Fläche AO durch eine Kraft V aufwärts gewälzt werden ſoll, die auf ſeinen Schwerpunkt G nach einer mit der Fläche parallelen Richtung angebracht iſt, ſo hat dieſe Kraft zugleich die Friktion zu überwinden, die aus dem ſenkrechten Drucke des Körpers gegen die Fläche entſpringt. Heißt nun I der Neigungswinkel der Fläche, a der Halbmeſſer des Cylinders, μ die Friktionszahl, ſo iſt jener Druck $= P. \text{Cos}\, I$, folglich $V = P \text{ Sin } I + \frac{\mu P \text{ Cos } I}{a}$.

Soll dagegen die Kraft bloß verhindern, daß der Körper herabrolle, ſo hat man:

$$V = P \text{ Sin } I - \frac{\mu P \text{ Cos } I}{a}.$$

Setzt man in letzterer Formel $V = 0$, ſo erhält man für den Neigungswinkel der Fläche, unter dem der Cylinder auf ihr von ſelbſt fortzurollen anfängt: $\text{tang } I = \frac{\mu}{a}$; alſo z. B. für $a = 12$ Zoll, und $\mu = 0{,}025$, $\text{tang } I = 0{,}002$, $I = 6'50''$. Man könnte daher auch auf dieſe Weiſe die Friktion der wälzenden Bewegung durch Verſuche beſtimmen.

§. 346.

Da die Friktion dieſer Art ſo äußerſt gering iſt, ſo ſucht man bey mechaniſchen Operationen, wo es ſich thun läßt, jedesmal die gleitende Bewegung in eine

wälzende zu verwandeln. So bedient man ſich z. B. zur Fortſchaffung großer Laſten auf horizontalem Boden mit vielem Vortheile der Walzen; dieſe werden nemlich der Laſt untergelegt, und vermittelſt durchgeſteckter Hebelarme zum Fortrollen gebracht, wodurch die Laſt wegen der ungleich größern Friktion der gleitenden Bewegung zugleich mit fortgezogen wird.

Fig. 90. Man ſetze nun, auf einer dieſer Walzen DEB ruhe das Gewicht P, und am Hebelarme FC, deſſen Länge wir = f ſetzen wollen, ſey nach ſenkrechter Richtung Ff die Kraft w angebracht; außerdem ſey der Halbmeſſer der Walze = a, und der Winkel, den FC mit der Vertikale CL macht, = ϑ, ſo zerfällt

1) die Kraft w in eine nach der Vertikale Fo = w Cos fFo = w Sin ϑ, und in eine nach der Horizontale Fl = w Cos ϑ.

2) Erſtere hat am Hebelarme HB = oC das Moment oC . w Sin ϑ = FC . w Sin ϑ^2 = fw Sin ϑ^2; letztere am Hebelarme LB = LC + CB = f Cos ϑ + a das Moment fw Cos ϑ^2 + aw Cos ϑ.

3) Beyde Kräfte müſſen am Winkelhebel HBL der Kraft p nach CE (§. 344.) das Gleichgewicht halten, alſo ihre Momente zuſammen genommen dem Momente pa gleich ſeyn. Dies giebt:

$$wf + wa \text{ Cos } \vartheta = pa = \mu P;$$

$$w = \frac{\mu P}{f + a \text{ Cos } \vartheta}$$

4) Da aber auch die Friktion an der obern Fläche bey A überwunden werden muß, an der die Walze

gleichfalls fortzurollen genöthigt iſt, ſo erfordert dies noch eine zweyte Kraft w′. Man erhält dieſe, wenn man in der Formel (3) ſtatt ϑ den Winkel FCB = 180° — ϑ ſetzt; daher wird:

$$w' = \frac{\mu P}{f - a \operatorname{Cos} \vartheta'}$$

alſo die ganze Kraft M, die zur Fortwälzung des Cylinders am Hebelarme FC nöthig iſt, $= w + w' = \frac{2\mu f P}{f^2 - a^2 \operatorname{Cos} \vartheta^2}$.

5) Dieſe Kraft iſt am kleinſten für $\operatorname{Cos} \vartheta = 0$, oder bey horizontaler Lage des Hebelarms, und wird für den Fall $= \frac{2\mu P}{f}$.

§. 347.

Auf dieſem vortheilhaften Gebrauche der Walzen beruhet die von Herrn Scheldom *) erfundene Methode, geſunkene Balken an einer feſten Wand AE in die Höhe Fig. 91. zu treiben. Man bringt unter die Laſt bey E eine Stütze EG in ſchräger Richtung, und ſtemmt dieſe gegen die Nuth einer Unterlage BD, die auf zwey oder mehrere Walzen gelegt iſt. Werden nun die Walzen durch Hebelarme cf, cf, die an den Seiten durchgeſteckt ſind, umgedreht, ſo wird die Unterlage nach A fortgeſchoben, und die Stütze EG dadurch der vertikalen Stellung näher gebracht; welches nicht anders geſchehen kann, als indem der Widerſtand bey E in die Höhe weicht.

*) Schwed. Abhandl. Band IX. S. 45 u. f.

Es ſey der Winkel GEA, den die ſchräge Richtung GE der Stütze mit der Vertikale EA macht, $= \eta$, der Widerſtand nach vertikaler Richtung $= S$; die Kraft, die auf den Hebelarm fc ſenkrecht wirken muß, um ihm das Gleichgewicht zu halten, und zugleich die Friktion zu überwinden, $= M$; die Länge von fc $= f$; der Halbmeſſer der Walze $= a$. Man zerlege nun:

1) die Kraft S in eine nach EG, und in eine nach Ee, ſenkrecht auf die vertikale Wand EA, ſo iſt erſtere $= \frac{S}{\text{Cos } \eta}$, und letztere, die durch die Feſtigkeit der Wand aufgehoben wird, $= S \text{ tang } \eta$.

2) Die Kraft $\frac{S}{\text{Cos } \eta}$ zerlege man ferner in eine horizontale $= \frac{S \text{ Sin } \eta}{\text{Cos } \eta} = S \text{ tang } \eta$, und in eine vertikale $= \frac{S \text{ Cos } \eta}{\text{Cos } \eta} = S'$.

3) Erſtere hat am Hebelarme $ab = 2a$ das Moment $2aS \text{ tang } \eta$; letztere bringt durch den Druck auf die Walze das Moment der Friktion $2\mu S$ hervor (§. 346.); alſo hat man:

$$Mf = (2a \text{ tang } \eta + 2\mu) S.$$

4) Da μ etwa $= \frac{1}{40}$ iſt, ſo erhellet, daß 2μ gegen $2a \text{ tang } \eta$, worin a durch Zolle ausgedrückt werden muß (§. 344.), nicht in Betracht komme. Bedeutender iſt dafür die Friktion bey E, die man ſo findet:

Der Kraft M iſt am Punkte a, nach ſenkrechter Richtung auf ab die Kraft $\frac{Mf}{2a}$ äquipollent; man zer-

lege ſie in eine nach der Vertikale, und in eine nach EG, ſo iſt erſtere $= \frac{Mf}{2a} \cdot \tang EGD$, die gegen den Boden drückt, und dadurch aufgehoben wird; letztere $= \frac{Mf}{2a \cos EGD} = \frac{Mf}{2a \sin \eta}$. Dieſe zerfällt noch in eine vertikale $= \frac{Mf \cos \eta}{2a \sin \eta} = \frac{Mf}{2a \tang \eta}$, und in eine horizontale nach Ee $= \frac{Mf \sin \eta}{2a \sin \eta} = \frac{Mf}{2a}$, wodurch die Friktion $\frac{\lambda Mf}{2a}$ entſteht; man hat alſo: $\frac{Mf}{2a \tang \eta} = S + \frac{\lambda Mf}{2a}$, folglich:

$$Mf = \frac{2aS \tang \eta}{1 - \lambda \tang \eta}.$$

5) Ruhet nun der Block BD auf n Walzen, und iſt auf jeder Seite derſelben ein Hebelarm durchgeſteckt, ſo wird dadurch die Kraft M in 2n Theile getheilt.

§. 348.

Die Friktion allein muß hier bewirken, daß durch die Kraft S tang η die Unterlage auf den Walzen nicht fortgeſchoben wird. Es iſt alſo eine nothwendige Bedingung, daß $\lambda S > S \tang \eta$, oder $\tang \eta < \lambda$ ſey.

Setzt man daher lE $= h$, ſo darf Gl wenigſtens nicht größer als λh, folglich EG nicht größer als $h \sqrt{(1 + \lambda^2)}$ ſeyn; alſo iſt die Höhe, zu der die Laſt hinaufrücken kann, $=$ EG $-$ El $= h \cdot \sqrt{(1 + \lambda^2)} - h$.

Bey einer zweyten Operation iſt $EI = h\sqrt{(1+\lambda^2)}$, und $EG = h(1+\lambda^2)$; bey einer dritten iſt $EG = h(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}$, und nach n maliger Wiederderhohlung $= h(1+\lambda^2)^{\frac{n}{2}}$; mithin die ganze Höhe, um die alsdann die Laſt geſtiegen iſt, $= h(1+\lambda^2)^{\frac{n}{2}} - 1)$.

Soll demnach die Laſt durch einen gegebenen Raum g gehoben werden, ſo hat man $h((1+\lambda^2)^{\frac{n}{2}} - 1) = g$, folglich:

$$(1+\lambda^2)^{\frac{n}{2}} = 1 + \frac{g}{h}, \text{ und}$$

$$n = \frac{2\log\left(1+\frac{g}{h}\right)}{\log(1+\lambda\ )}$$

Es betrage z. B. der Raum g ein Zehntel von h, und λ ſey $= \frac{1}{3}$, ſo iſt $\log\left(1+\frac{g}{h}\right) = 0{,}0413927$, $\log(1+\lambda^2) = 0{,}0457574$, $n = \frac{827854}{457574}$; alſo muß die Operation zweymal geſchehen.

§. 349.

Bey der eben betrachteten Maſchine, ſo wie in andern ſolchen Fällen, wo die Laſt nur um ein Geringes fortrücken ſoll, leiſten die Hebelarme ſehr gute Dienſte; es würde aber dennoch nicht rathſam ſeyn, ſie damit auf eine beträchtliche Weite fortzuſchaffen. Man bedient ſich alsdann mit größerm Vortheile der Stricke, wobey freylich das Ungemach wieder eintritt, daß ſich

die Walzen aus ihrer Lage, die begreiflich immer ſenkrecht auf die Richtung des Zuges ſeyn muß, leicht verſchieben, und dadurch den gleichförmigen Gang der Bewegung ſehr häufig unterbrechen.

Aus dieſem Grunde wurde der ungeheure Granitblock, eine Laſt von drey Millionen Pfunden, worauf nachher die Statue Peters des Großen errichtet worden iſt, vom Finniſchen Meerbuſen bis nach St. Petersburg auf Kugeln tranſportirt. *) Da dies Unternehmen unſtreitig eine der merkwürdigſten mechaniſchen Operationen iſt, die je im Großen angeſtellt worden ſind, ſo will ich das Nähere davon hier im Kurzen beyfügen:

Fig. 92. 1. Die Kugeln beſtanden aus einer meſſingartigen Metallmiſchung, und hatten 5 Zoll im Durchmeſſer. Sie wälzten ſich zwiſchen zweyen Riemen AA und BB fort, wovon die obere durch zwey Querbalken mit einer danebenliegenden verbunden, der Laſt zur Baſis diente. Die Entfernung cd der Berührungspunkte betrug $3\frac{1}{2}$ Zoll.

2. Die ganze Steinmaſſe wurde auf dieſen Kugeln durch zwey Stricke fortgezogen, an deren jedem ein dreyrolliger Flaſchenzug angebracht war, von dem das Seil um die Welle einer Erdwinde ging, die zwey Fuß im Durchmeſſer hatte.

3. An jeder der beyden Winden befanden ſich 8 Hebelarme von 8 Fuß Länge, und an jedem einzelnen

*) S. des Grafen *Carburi* monument élevé à la gloire de Pierre le Grand. Paris 1777.

Arme ſchoben 4 Leute, ſo daß in allem die Laſt durch 64 Menſchen fortbewegt wurde. (a. a. O. pag. 24.)

4. Es verſteht ſich, daß hier nur von horizontalen Strecken die Rede iſt; bey Anhöhen mußten 4, auch wohl 6 Winden gebraucht werden.

Man ſetze nun

1) das Gewicht der Maſſe $= P$, den Reibungscoefficienten μ nach §. 344. $= \frac{1}{40}$, ſo war das Moment der Friktion $2\mu P = \frac{1}{20} P$ (§. 346. 5.), und da der Hebelarm f hier $= 3\frac{1}{2}$ Zoll iſt (1), die erforderliche Kraft zum Fortziehen $= \frac{2\mu P}{f} = \frac{1}{70} P$; alſo die Spannung jedes der beyden Stricke $= \frac{1}{140} P$.

2) Folglich die des Seiles an der Welle der Winde $= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{140} \cdot P = \frac{P}{840}$ (§. 184.), deren Moment ebenfalls $\frac{P}{840}$ iſt, da der Halbmeſſer der Welle 1 Fuß beträgt.

3) Es ſey endlich M die Kraft, die jeder Arbeiter anzuwenden hatte; ſo wird, wenn man die Länge des Hebelarmes in vier gleiche Theile theilt, und den Punkt des Angriffs jedesmal in die Mitte eines ſolchen Theiles ſetzt; $7M + 5M + 3M + M$ das Moment an einem der Arme, folglich dies 8 mal genommen:

$$8 . 16\,M = 128\,M = \frac{P}{840}, \text{ mithin } M = \frac{P}{107520}.$$

4) Da nun $P = 3000000$ ℔, ſo erhält man $M = 27\frac{101}{112}$ ℔, eine Kraft, die man in der Regel

jedem

jedem Arbeiter ſelbſt bey anhaltender Anſtrengung zu=
muthet, und die ſie hier um ſo leichter anwenden konn=
ten, da die Arbeit durch die Stellveränderung der Win=
den ſehr häufig unterbrochen wurde.

Friktionsräder.

§. 350.

Die Umdrehung der Zapfen in ihren Pfannen iſt eigentlich mehr gleitend als wälzend; man kann ſie aber dadurch zu einer bloß wälzenden Bewegung umſchaffen, daß man den Zapfen auf die Umfänge zweyer neben einander liegenden Räder bringt, die gleichfalls um ihre Axen beweglich ſind. Wenn ſich nemlich alsdann der Zapfen dreht, ſo bewirkt die Friktion, daß die Räder zugleich mit umlaufen, alſo der Zapfen auf ihren Umfängen ſich bloß fortwälzt. Hierdurch wird nun zwar das Hinderniß, das man zu vermeiden ſucht, nicht ganz gehoben, weil allemal wieder eine Bewegung der erſtern Art durch die Axen der beyden Räder entſteht; aber wenigſtens kann doch die damit verbundene Friktion nun weit leichter überwunden werden, als wenn der Zapfen ſich unmittelbar auf unbeweglichen Lägern dreht.

§. 351.

Fig. 93. **Aufgabe.** Die Welle EFG leide nach vertikaler Richtung CD den Druck P; man fragt, wie viel Kraft auf den Hebelarm AC, der mit ihr verbunden iſt, nach der auf ihn ſenkrechten Richtung Aa ange=

bracht werden müſſe, damit die Friktion ſowohl bey F und G, als auch an den Zapfen der beyden Räder überwunden werde.

Aufl 1) Man ſetze die geſuchte Kraft = M, die Länge des Hebelarmes AC = f, den Halbmeſſer des Zapfen FC = a, den Halbmeſſer des Rades Fo = r, und den ſeines Zapfen of = e; außerdem ſey der Winkel FCD = η, ſo zerfällt

1) der Druck P in einen nach CFo, und in einen nach CGo, wovon jeder $= \frac{P \,\text{Sin}\, \eta}{\text{Sin}\, 2\eta} = \frac{P}{2 \,\text{Cos}\, \eta}$ iſt.

2) Dadurch entſteht an jedem der kleinern Zapfen die Friktion $\frac{\lambda P}{2 \,\text{Cos}\, \eta}$, die das Moment $\frac{\lambda e P}{2 \,\text{Cos}\, \eta}$ hat, und zur Ueberwindung an dem Umfange des Rades bey F und G eine Kraft $= \frac{\lambda e P}{2 r \,\text{Cos}\, \eta}$ erfordert.

3) Der Zapfen EFG leidet alſo bey ſeiner Umdrehung den Widerſtand $= \frac{\lambda e P}{r \,\text{Cos}\, \eta}$, und da dieſer an ſeinem Umfange nach der Tangente gerichtet iſt, ſo hat er daran das Moment $= a \,.\, \frac{\lambda e P}{r \,\text{Cos}\, \eta}$.

4) Hierzu kommt nun noch das Moment $\frac{2 \mu P}{2 \,\text{Cos}\, \eta} = \frac{\mu P}{\text{Cos}\, \eta}$ der Friktion, die das Wälzen der Zapfen bey F und G hervorbringt; alſo hat man:

$$Mf = \left(\mu + \frac{\lambda ea}{r}\right) \frac{P}{\mathrm{Cos}\,\eta}, \text{ oder}$$

$$M = \left(\mu + \frac{\lambda ea}{r}\right) \cdot \frac{P}{f\,\mathrm{Cos}\,\eta}$$

5) Drehete ſich der Zapfen auf unbeweglichen Lagern, ſo wäre $M = \frac{\lambda aP}{f}$; daher wird, weil μ unbeträchtlich iſt, die Friktion durch Hülſe der Räder beynahe in dem Verhältniſſe $1 : \frac{P}{r\,\mathrm{Cos}\,\eta}$ vermindert.

Exempel. Es ſey $f = 12$ Zoll, $a = e = 1$ Zoll; $r = 6$ Zoll, ſo wird, wenn man $\lambda = \frac{1}{6}$ und $\mu = \frac{1}{40}$ ſetzt, $M = (\frac{1}{40} + \frac{1}{36}) \cdot \frac{P}{12\,\mathrm{Cos}\,\eta} = \frac{19}{4320} \cdot \frac{P}{\mathrm{Cos}\,\eta}$.

Nun ſey ferner die Diſtanz der Mittelpunkte o,o $= 9$ Zoll, ſo hat man $oD = 4\frac{1}{2}''$, $oC = 7''$, alſo $\mathrm{Sin}\,\eta = \frac{9}{14}$, $\mathrm{Cos}\,\eta = 0{,}766$; mithin wird $M = 0{,}00567\,P$.

Bey unbeweglichem Zapfenlager wäre dagegen $M = \frac{1}{72} P = 0{,}01389\,P$, folglich mehr als $2\frac{1}{2}$ mal ſo groß, als im erſtern Falle.

§. 352.

Man nenne c die halbe Diſtanz der Mittelpunkte der beyden Räder, ſo iſt $\mathrm{Sin}\,\eta = \frac{c}{r+a}$, und $\mathrm{Cos}\,\eta = \sqrt{\left[1 - \frac{c^2}{(r+a)^2}\right]}$.

Je größer alſo c iſt, deſto kleiner iſt $\mathrm{Cos}\,\eta$, folg-

lich M bey einerley P deſto gröſser; theils weil $\cos\eta$ ſich darin im Nenner befindet, theils weil die Zapfen bey o und o, wegen des gröſsern Druckes, der nach der ſchrägen Richtung Fo geht, um ſo dicker ſeyn müſſen. Es muſs alſo die Diſtanz der Mittelpunkte ſo klein angenommen werden, als möglich; damit aber die Axen und Umfänge der Räder nicht zuſammenſtoſsen, muſs ſie doch allemal etwas gröſser als r ſeyn. Gewöhnlich nimmt man ſie zu $\frac{4}{3}$ r an.

Eilftes Kapitel.

Prinzip der virtuellen Geſchwindigkeiten.

---

§. 353.

Fig. 94. **Lehrſatz. Wenn mehrere Kräfte S, S′, S″ u. ſ. f. an einem Punkte D einander das Gleichgewicht halten, und wir ſetzen, der Punkt bewege ſich nach irgend einer Seite durch einen unendlich kleinen Raum, ſo iſt allemal die Summe der Produkte aus den einzelnen Kräften in die Wege, die ſie dabey nach ihren Richtungen zurücklegen, = o.**

Beweis 1) Man ziehe nach Gefallen drey Axen OA, OB, und OC, die ſich in irgend einem Punkte O rechtwinklig durchſchneiden, und nenne die Koordinaten des Punktes D, in Bezug auf dieſe Axen: OF =

a, FI $=$ b, ID $=$ c; eben ſo ſeyen OX $=$ x, XY $=$ y, YZ $=$ z die Koordinaten für einen Punkt Z, der in der Richtung der Kraft S liegt, und ſeine Entfernung DZ von D ſey $=$ S.

2) Ferner ziehe man durch D die Linien Da, Db und Dc mit OA, OB und OC parallel; laſſe ZY von der Ebene bDa in u ſchneiden, und fälle ur auf Da, rw auf XY ſenkrecht; ſo iſt Dr $=$ Iw $=$ FX $=$ x $-$ a, ru $=$ wY $=$ y $-$ b, Zu $=$ ZY $-$ Dl $=$ z $-$ c, und

$$DZ^2 = Du^2 + uZ^2 = Dr^2 + ru^2 + uZ^2, \text{ oder}$$
$$S^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$$

3) Dieſe Gleichung nach x, y und z beſonders differenziirt, giebt:

$$S\left(\frac{ds}{dx}\right) = x - a;\ \left(\frac{ds}{dx}\right) = \frac{x - a}{S}$$
$$S\left(\frac{ds}{dy}\right) = y - b;\ \left(\frac{ds}{dy}\right) = \frac{y - b}{S}$$
$$S\left(\frac{ds}{dz}\right) = z - c;\ \left(\frac{ds}{dz}\right) = \frac{z - c}{S}$$

4) Man nenne X, Y und Z die Kräfte, die aus der Zerlegung der Kraft S nach den dreyen Richtungen Da, Db, Dc entſpringen, ſo hat man X $=$ S Cos ZDa, Y $=$ S Cos ZDb, Z $=$ S Cos ZDc (§. 61.)

5) Aber in der rechtwinkligen Ecke, die von DZ, Du und Da eingeſchloſſen wird, iſt Cos ZDa $=$ Cos

$$ZDu \,.\, \text{Cos } uDa = \frac{Du}{DZ} \cdot \frac{Dr}{Du} = \frac{Dr}{DZ} = \frac{x - a}{S} =$$

$\left(\frac{ds}{dx}\right)$; alſo wird: $X = S\left(\frac{ds}{dx}\right)$, und eben ſo erhält man: $Y = S\left(\frac{ds}{dy}\right)$, $Z = S\left(\frac{ds}{dz}\right)$.

6) Bedeutet jetzt Z einen Punkt in der Richtung der Kraft S′, und heißt s′ die Entfernung deſſelben von D; ſo ſind auf gleiche Art $S'\left(\frac{ds'}{dx}\right)$, $S'\left(\frac{ds'}{dy}\right)$, $S'\left(\frac{ds'}{dz}\right)$ die Kräfte, die aus der Zerlegung derſelben nach den Richtungen Da, Db und Dc entſpringen, und eben dies gilt auch für die folgenden Kräfte S″, S‴ u. ſ. w.

7) Es ſey V die Kraft, die durch die Zuſammenſetzung aller der Kräfte S, S′, S″ u. ſ. w. hervorgebracht wird, ſo iſt offenbar der Antheil von ihr nach der Richtung Da = der Summe aller einzelnen Kräfte, die man aus der Zerlegung von S, S′ u. ſ. f. nach dieſer Richtung erhält, und ein Gleiches gilt in Anſehung der beyden andern Richtungen Db und Dc; nennt man alſo u eben das für V, was bey den gegebenen Kräften s, s′, s″ u. ſ. f. hieß, ſo wird:

$$V\left(\frac{du}{dx}\right) = S\left(\frac{ds}{dx}\right) + S'\left(\frac{ds'}{dx}\right) + \text{u. ſ. w.}$$

oder $$Vdx.\left(\frac{du}{dx}\right) = Sdx\left(\frac{ds}{dx}\right) + S'dx\left(\frac{ds'}{dx}\right) + \text{u. ſ. w.}$$

und eben ſo:

$$Vdy\left(\frac{du}{dy}\right) = Sdy\left(\frac{ds}{dy}\right) + S'dy\left(\frac{ds'}{dy}\right) + \text{u. ſ. w.}$$

$$Vdz\left(\frac{du}{dz}\right) = Sdz\left(\frac{ds}{dz}\right) + S'dz\left(\frac{ds'}{dz}\right) + \text{u. ſ. w.}$$

Folglich, wenn alles dreyes zuſammen addirt wird:

$Vdu = Sds + S'ds' +$ u. ſ. w.

8) Sind nun die Kräfte S, S', S'' u. ſ. f. unter ſich im Gleichgewichte, ſo iſt die aus ihnen reſultirende Kraft $V = 0$, alſo

$Sds + S'ds + S''ds''$ u. ſ. f. $= 0$.

9) Gegenſeitig: wenn zwiſchen dieſen Kräften die gefundene Gleichung ſtatt findet, ſo iſt die Kraft V, die aus ihrer Zuſammenſetzung entſpringt, $= 0$; alſo ſtehen die Kräfte mit einander im Gleichgewichte.

§. 354.

Wenn der Punkt D ſich nicht frey bewegen kann, ſondern auf irgend einer Fläche fortzugehen genöthigt iſt, ſo ſind es nicht bloß die äußern Kräfte S, S' u. ſ. f., die ihn im Gleichgewichte erhalten, ſondern es kommt auch dabey der Druck in Betracht, den die gedachte Fläche auf den Punkt ausübt.

Dieſer Druck, den wir Π nennen wollen, wirkt nach der Normale der Fläche, oder welches einerley iſt, vom Mittelpunkte ihrer Krümmung aus, die ſie an der Stelle hat, wo der Punkt auf ihr ſich befindet. Setzt man demnach ihren Krümmungshalbmeſſer daſelbſt $= r$, ſo erhält man die Gleichung:

$$0 = \Pi dr + Sds + S'ds' + \ldots$$

Da aber bekanntlich jedes Element einer Fläche als ein Stück einer Kugelfläche zu betrachten iſt, ſo beſchreibt der Punkt jedesmal, er mag ſich auf der Fläche bewegen, wohin man will, ein Element eines Kreisbo-

gens; mithin bleibt dabey r ungeändert, und dr wird folglich = o. Daher bekommt man wieder: o = Sds + S′ds′ + u. ſ. w., ſo daß alſo die Einwirkung der Fläche keine Aenderung in dem einfachen Geſetze hervorbringt.

Fig. 95. **Exempel.** Der Schwerpunkt M eines Körpers, deſſen Gewicht = P iſt, ruhet auf der ſchiefen Fläche AC, die gegen die Horizontale CB unter dem Winkel ACB = I inclinirt iſt; man fragt, wieviel Kraft V nach einer gegebenen Richtung DM, die mit CB den Winkel I′ macht, auf den Punkt M angebracht werden muß, um ihn im Gleichgewichte zu erhalten?

Man ſetze, der Punkt bewege ſich längs der Fläche durch den unendlich kleinen Raum Mm = dw; ſo iſt, wenn man MF auf CB, und mr auf MF ſenkrecht zieht, Mr der Weg, den der Punkt M nach der Richtung der Schwere durchläuft, und, wenn man mo auf DM ſenkrecht zieht, Mo der Weg, den er gegen die Richtung der Kraft V zurücklegt. Daher hat man hier:

ds = Mr = dw Sin I, und ds′ = — Mo = — dw . Cos mMo: aber mMo = mMF — oMF = (90° — I) — (90° — I′) = I′ — I; alſo ds′ = — dw Cos (I′ — I), folglich

$$P dw \sin I - V dw \cos (I' - I) = 0$$

oder $V = \dfrac{P \sin I}{\cos (I' - I)}$ wie im §. 117 gefunden iſt.

§. 355.

Lehrſatz. Wenn die Kräfte S, S′, S″ u. ſ. w.

auf ein Syſtem von mehrern Punkten m, m′, m″ u. ſ. f., die durch feſte gerade Linien gegenſeitig mit einander verbunden ſind, nach beliebigen Richtungen wirken, und ſich daran im Gleichgewichte erhalten; ſo iſt wieder für eine unendlich kleine Aenderung in der Lage des ganzen Syſtems, wobey die Kräfte nach ihren Richtungen die Wege ds, ds′, ds″ u. ſ. f. durchlaufen:

$$S ds + S' ds' + S'' ds'' + \ldots = 0.$$

Beweis. 1) Wir wollen bloß ſetzen, das Syſtem beſtehe aus den drey Punkten m, m′, m″. Auf den Punkt m ſey die Kraft S, auf m′, S′ und auf m″, S″ angebracht; dabey ſey die Entfernung zwiſchen m und m′ = f, zwiſchen m und m″ = f′, und zwiſchen m′ und m″ = f″.

2) Was nun zuvörderſt den Punkt m betrifft, ſo iſt klar, daß die Kräfte S′, S″ nicht anders als von m′ und m″ aus auf ihn wirken können; ſetzt man daher den gegenſeitigen Druck, den die Punkte m und m′ auf einander ausüben, = R, und den zwiſchen m und m″ = R′, ſo ſind am Punkte m die Kräfte S, R und R′ für ſich im Gleichgewichte; man hat alſo:

$$S ds + R df + R' df' = 0.$$

3) Setzt man ferner die gegenſeitige Wirkung der Punkte m′ und m″ aufeinander = R″, ſo ſind S′, R und R″ die Kräfte, die am Punkte m′ unter ſich im Gleichgewichte ſtehen, und da dieſer Punkt, wegen ſeiner unveränderlichen Diſtanz von m, dem Punkte m nach m′m folgen muß, ſo iſt der Weg, den hier die

Kraft R nach ihrer Richtung mm′ durchläuft, $= - df$, folglich:

$$S'ds' - Rdf + R''df'' = 0.$$

4) Endlich ſind S'', R' und R'' die Kräfte, die ſich am Punkte m'' das Gleichgewicht halten, und weil derſelbe ſowohl nach $m''m$, als nach $m''m'$ um eben ſo viel zurückweichen muß, als die Punkte m und m' nach dieſen Richtungen fortrücken, ſo hat man:

$$S''ds'' - R'df' - R''df'' = 0.$$

5) Alle drey Gleichungen zuſammen addirt, geben demnach:

$$Sds + S'ds' + S''ds'' = 0.$$

6) Man ſieht übrigens leicht, daß ſich der Beweis ganz auf dieſelbe Art führen laſſe, wenn das Syſtem aus mehr als dreyen Punkten beſteht.

§. 356.

Exempel für zwey Kräfte.

An der Schraube (§. 243.) halte die Kraft S, vermittelſt eines Hebelarmes, deſſen Länge $= f$ iſt, der Laſt S′ das Gleichgewicht.

Man ſetze, die Kraft beſchreibe um die Axe der Spindel den Bogen ds, ſo dreht ſich die Schraube um den Winkel $\frac{ds}{f}$, und wird zugleich, wenn man h die Höhe ihrer Gänge nennt, um $\frac{h}{2\pi} \cdot \frac{ds}{f}$ gehoben. Um ſo viel ſteigt alſo die Laſt aufwärts; da nun dieſe Bewegung gegen ihre Richtung geſchieht, ſo hat man:

$$Sds - \frac{hS'ds}{2\pi f} = 0$$

oder $2\pi fS = hS'$.

§. 357.

Exempel für drey Kräfte.

Fig. 96. I. Am Winkelhebel ACB ſey auf den Punkt A nach der Richtung Ap die Kraft S, und auf den Punkt B nach Bq die Kraft S′ angebracht; beyden halte eine Kraft S″, die am Ruhepunkte C nach der Richtung Cr zieht, das Gleichgewicht. Man laſſe

1) den ganzen Hebel am Punkte C ſich um den Winkel $d\varphi$ drehen, ſo beſchreiben die Punkte A und B, wenn man ihre Entfernungen von C = a und b ſetzt, die Bogen $Aa = ad\varphi$, und $Bb = bd\varphi$. Fällt man nun aus a und b auf Ap und Bq die Perpendikel ai, bl, und nennt die Winkel, die die Richtungen Ap, Bq mit den Hebelarmen CA und CB machen, = α und β, ſo ſind die Räume, die die Kräfte S und S′ nach ihren Richtungen durchlaufen: $Ai = ad\varphi \,.\, \text{Sin}\, \alpha$, und $Bl = -bd\varphi\, \text{Sin}\, \beta$, folglich hat man:

$$Sad\varphi\, \text{Sin}\, \alpha - S'bd\varphi\, \text{Sin}\, \beta = 0, \text{ oder}$$

$$Sa\, \text{Sin}\, a = S'b\, \text{Sin}\, \beta$$

Um die Größe und Richtung der dritten Kraft S″ zu beſtimmen, laſſe man:

2) den Hebel nach der Richtung dieſer Kraft um $Cc = dw$ ſinken; fälle aus a und b auf Ap und Bq die Perpendikel ai und bl, und ſetze die Winkel, die die Richtungen Ap und Bq mit Cr machen, = η und ϑ;

ſo iſt der Raum, den die Kraft S durchlaufen iſt: $Ai = Aa \cos \eta = dw \cos \eta$, und den S′ durchlaufen iſt: $Bl = dw \cos \vartheta$, folglich:

$$Sdw \cos \eta + S'dw \cos \vartheta - S''dw = 0;$$ alſo

$$S'' = S \cos \eta + S' \cos \vartheta.$$

Fig. 97. 3) Man laſſe ferner den Hebel längs der Richtung Ap um das Stück $A\alpha = dw'$ fortrücken, und fälle aus β und γ, worin die Punkte B und C durch dieſe Bewegung gelangt ſind, auf Bq und Cr die Perpendikel βl und γo, ſo hat die Kraft S′ nach ihrer Richtung den Weg $Bl = B\beta \cos(\eta + \vartheta) = dw' \cos(\eta + \vartheta)$, und S″ gegen ihre Richtung den Weg $Co = C\gamma \cos \eta = dw' \cos \eta$ zurück gelegt, mithin wird:

$$Sdw' + S'dw' \cos(\eta + \vartheta) - S''dw' \cos \eta = 0,$$

folglich:

$$S'' \cos \eta = S + S' \cos(\eta + \vartheta)$$

4) Auf gleiche Art erhält man, wenn man den Hebel längs Bq ſich bewegen läßt:

$$S'' \cos \vartheta = S' + S \cos(\eta + \vartheta)$$

5) Multiplicirt man die Gleichung (2) mit $\cos \eta$, und zieht ſie dann vor der Gleichung (3) ab, ſo bleibt:

$$0 = S \sin \eta^2 - S' \sin \eta \sin \vartheta$$

oder $S \sin \eta = S' \sin \vartheta$

6) Und, wenn die Gleichung (3) und (4) mit S und S′ multiplicirt, und dann addirt werden, ſo erhält man:

$$S''(S \cos \eta + S' \cos \vartheta) = S''^2 = S^2 + 2SS' \cos(\eta + \vartheta) + S'^2;$$

woraus erhellet, daß die Kraft S'' ſammt ihrer Richtung aus der Zuſammenſetzung der Kräfte S und S' entſpringt.

II. Derſelbe Hebel ruhe bey C auf einem Zapfen, deſſen Halbmeſſer $= e$; man ſucht das Verhältniß der Kräfte S und S' zu einander, wenn erſtere zugleich die Friktion überwinden ſoll.

Man laſſe, wie I. (1), den Hebel nach A zu ſich um den Winkel $d\varphi$ drehen, ſo beſchreibt der Widerſtand $\lambda S''$, den das Reiben verurſacht, um C den Bogen $ed\varphi$, und zwar gegen ſeine Richtung; es entſteht alſo die Gleichung:

$$Sad\varphi \operatorname{Sin} \alpha - S'bd\varphi \operatorname{Sin} \beta - \lambda S''ed\varphi = 0$$

woraus $Sa \operatorname{Sin} \alpha = S''b \operatorname{Sin} \beta + \lambda S''e$ wird.

Iſt der Hebel geradlinigt, und ſind die Richtungen der beyden Kräfte auf ihn ſenkrecht, ſo iſt der Winkel $\eta + \vartheta$, den ſie zuſammen einſchließen, $= 0$; alſo $S''^2 = S^2 + 2SS' + S'^2$, oder $S'' = S + S'$; ferner iſt $\alpha = \beta = 90°$, folglich erhält man:

$$Sa = S'b + \lambda e (S + S')$$

und $$S = \frac{(b + \lambda e) S'}{a - \lambda e}.$$

§. 358.

Exempel für mehrere Kräfte.

Den Schwerpunkt eines Syſtems von Punkten oder unendlich kleinen Maſſen m, m', m'' u. ſ. w. zu finden, die unter ſich zu einem feſten Körper verbunden ſind.

Fig. 15. Man ſetze, der ganze Körper werde nach der Vertikale um ds gehoben, ſo durchlaufen die einzelnen Punkte Z, Z′ u. ſ. w. dieſen Raum gegen die Richtung ihrer Schwere, und die Kraft S, die auf den Schwerpunkt G vertikal aufwärts angebracht iſt (§. 32.), durchläuft eben den Raum nach ihrer Richtung; es wird alſo:

$$Sds - mds - m'ds - \ldots = 0$$

folglich: $S = m + m' + m'' +$ u. ſ. f.

Man fälle ferner aus den einzelnen Punkten des Syſtems Z, Z′ u. ſ. f. auf die horizontale Ebene AOB die Perpendikel ZY, Z′Y′ u. ſ. w., ſo wird das Gleichgewicht zwiſchen der Kraft S und den Gewichten m, m′ ... nicht anfgehoben, wenn man letztere auf die Punkte Y, Y′ ... ſo wie die Kraft S auf den Punkt F verlegt.

Jetzt laſſe man die Ebene AOB um die Axe OB nach C zu den Winkel $d\varphi$ beſchreiben, ſo durchläuft das Gewicht m am Punkte Y gegen ſeine Richtung den Bogen $OX \,.\, d\varphi = xd\varphi$; das Gewicht m′ den Bogen $x'd\varphi$ u. ſ. w.; und die Kraft S am Punkte F nach ihrer Richtung den Bogen $OD \,.\, d\varphi = ad\varphi$; man erhält alſo:

$$Sad\varphi - mxd\varphi - m'x'd\varphi \ldots = 0,$$

$$Sa = mx + m'x' + m''x'' + \ldots$$

$$\text{folglich } a = \frac{mx + m'x' + m''x'' + \ldots}{m + m' + m'' + \ldots}$$

Auf gleiche Art werden die andern beyden Koordinaten des Punktes G beſtimmt, wenn man den Kör-

per in Lagen bringt, wo die Axen OA und OC in OB zu liegen kommen.

§. 359.

Bisher haben wir nur den Fall betrachtet, wo alle Punkte des Syſtems ſo mit einander verbunden ſind, daß ſie bey ihrer Bewegung ſtets dieſelbe Entfernung von einander behalten; wir wollen nun annehmen, einige Punkte des Syſtems ſtehen unter ſich in gar keinem Zuſammenhange, ſo daß ſich der eine von dieſen ohne den andern frey bewegen, und willkührlich ſeine Entfernung von ihm verändern kann.

Man ſieht offenbar, daß zwiſchen ſolchen Punkten keine unmittelbare Reaktion ſtatt findet, ſondern daß ihre Wirkung auf einander bloß von denjenigen Punkten aus geſchieht, mit denen ſie auf unveränderliche Diſtanz verbunden ſind. Wenn alſo in einer der Gleichungen (§. 355.) ein Glied Rdf vorkommt, und es enthält keine der folgenden Gleichungen das entgegengeſetzte Glied $-Rdf$, ſo iſt allemal $R = 0$; weil alsdann die Punkte, wovon R die gegenſeitige Wirkung andeuten ſoll, von einander unabhängig ſind; daher bleibt die Gleichung

$$Sds + S'ds' + S''ds'' + \ldots = 0$$

auch noch für den Fall richtig, wenn nicht alle Punkte des Syſtems zu einerley feſtem Ganzen gehören.

§. 360.

Exempel für zwey Kräfte.

Fig. 52. I. An dem Umfange der Welle des gezähnten

Rades OGB ziehe eine Kraft S′ nach der Tangente gs, und werde von der Kraft S, die am Umfange des Rades AEF nach der Tangente ES angebracht iſt, im Gleichgewichte erhalten. Hier ſind E, C und O; O, D und g die Punkte, die ihre Entfernung von einander unverändert beybehalten, alſo unmittelbar einen Druck aufeinander ausüben können.

Man ſetze die Reaktion zwiſchen E und C $= R$, zwiſchen E und O $= R'$, zwiſchen C und O $= R''$; die Diſtanz $EC = f$, $EO = f'$, $CO = f''$; eben ſo ſey die Reaktion zwiſchen O und D $= r$, zwiſchen O und g $= r'$, zwiſchen D und g $= r''$; die Diſtanz $OD = g$, $Og = g'$, $Dg = g''$: ſo hat man für den Punkt E:

$$Sds + Rdf + R'df' = 0$$

und weil C unbeweglich, alſo $df = 0$ iſt:

$$1)\ Sds + R'df' = 0.$$

Ferner iſt für den Punkt C, auf den keine äußere Kraft wirkt:

$-R'df' + R''df'' + rdg + r'dg' = 0$, und da wegen der unbeweglichen Punkte C und D, df'' und dg $= 0$ ſind:

$$2)\ -R'df' + r'dg' = 0.$$

Endlich iſt für den Punkt g, da $dg'' = 0$ iſt:

$$3)\ S'ds' - r'dg' = 0.$$

Addirt man dieſe drey Gleichungen zuſammen, ſo wird:

$$Sds + S'ds' = 0.$$

Um aus dieſer Gleichung die im §. 209. gefundene Formel herzuleiten, muß man für ein angenom-

menes ds den Werth von dt' beſtimmen, welches auf folgende Art geſchieht:

Indem die Kraft S nach ihrer Richtung ES um ds fortrückt, dreht ſich das Rad AEF um den Winkel $\frac{ds}{EC} = \frac{ds}{f}$; alſo beſchreibt der Punkt O den Bogen $DO \cdot \frac{ds}{f} = \frac{f''ds}{f}$, folglich das Rad OGB um D den Winkel $\frac{f''ds}{fg}$, und der Punkt g den Bogen $Dg \cdot \frac{f''ds}{fg} = \frac{f''g''ds}{fg}$. Da nun die Kraft S' dieſen Weg gegen ihre Richtung gs zurücklegt, ſo iſt hier $ds' = -\frac{f''g''}{fg} \cdot ds$, alſo: $Sds - \frac{S'f''g''}{fg} \cdot ds = o$, oder:

$$fg \cdot S = f''g'' \cdot S'.$$

Fig. 98. II. Die Kraft m zu beſtimmen, die an den Umfang des Getriebes, oder ſenkrecht auf den Halbmeſſer CO angebracht werden muß, um die Friktion zwiſchen den Zähnen zu überwinden.

Man ſetze, die Berührung der Zähne geſchehe im Punkte M des Halbmeſſers MC, der von der Mittelpunktslinie COD um den Winkel $MCO = \varphi$ abſteht; der Druck, den ſie ſenkrecht auf einander, oder nach der Normale MO ausüben, ſey $= N$, ſo wirkt die Friktion nach einer auf MO ſenkrechten Richtung, und iſt $= \lambda N$. Rückt nun der Punkt M im Umfange des Getriebes (§. 235.) um den Bogen $Mm = ds$ fort,

ſo durchläuft die Friktion den Raum des auf MO gefällten Perpendikels $mr = Mm \, Sin \, mMr = Mm \, Sin \, rmq = Mm \, Cos \, CqO = ds \, Sin \, \frac{1}{2}\varphi$; alſo wird

$$mds = \lambda N ds \, Sin \, \tfrac{1}{2}\varphi$$

$$m = \lambda N \, Sin \, \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Aber $N = \frac{M}{Sin \, MOC}$ (§. 217.) $= \frac{M}{Cos \, \frac{1}{2}\varphi}$, folglich

$m = \lambda M \, tang \, \frac{1}{2}\varphi$, wie §. 339.

§. 361.

Es bleibt endlich noch der Fall zu betrachten übrig, wo zwey Punkte des Syſtems weder zu einem feſten Ganzen gehören, noch gänzlich unabhängig von einander ſind, ſondern mit einander durch einen Faden in Verbindung ſtehen. Dieſer Faden kann entweder

1. zwiſchen ihnen in eine gerade Linie ausgeſpannt ſeyn; in dem Falle iſt die Diſtanz der Punkte unveränderlich, und die gegenſeitige Wirkung des einen auf den andern = der Spannung des Faden; alſo verhält ſich hier alles ſo, wie im §. 255.; oder

Fig. 38. 2. der Faden geht nicht unmittelbar von dem einen Punkte a zum andern b in gerader Linie fort; ſondern biegt ſich zwiſchen beyden über eine Fläche ADB; alsdann findet wieder keine unmittelbare Reaktion zwiſchen a und b, wohl aber zwiſchen a und A, b und B ſtatt. Setzt man alſo die Spannung des Faden aADBb = T, die Entfernung Aa = f, Bb = f′, ſo kommt in die Gleichung für den Punkt a das Glied Tdf, und in die für b das Glied Tdf′.

Nun iſt klar, daß wenn der Punkt a nach irgend einer Seite fortgeht, der Faden allemal um df fortgezogen, alſo das Stück Bb um eben ſo viel verkürzt werde, mithin jedesmal $df' = - df$ ſey; daher heben ſich bey der Addition der Gleichungen für die einzelnen Punkte (§. 355.) die beyden Glieder Tdf und Tdf' ebenfalls einander auf, und man erhält auch für dieſen Fall wieder die Endgleichung:

$$Sds + S'ds' + S''ds'' + \ldots = o.$$

§. 362.

Exempel.

An der Winde (§. 206.) ſey die Kraft V mit der Laſt P im Gleichgewichte.

Fig. 50. Indem die Welle ſich um den Winkel $d\varphi$ dreht, beſchreibt die Kraft V am Hebelarme AF den Bogen $fd\varphi$; zugleich wickelt ſich am Theile A der Welle das Seilſtück $Rd\varphi$ auf, und vom Theile a das Stück $rd\varphi$ ab, alſo wird das von A bis a gehende Seilſtück AGga um $(R - r)\, d\varphi$, und jeder Theil desſelben AG, ag, wenn wir beyde als parallel annehmen, um $\frac{1}{2}(R - r)\, d\varphi$ verkürzt. Da nun der Punkt p um ſo viel ſinkt, und die Laſt P um eben ſo viel ſteigt, ſo hat man:

$$Vfd\Phi - \tfrac{1}{2}P(R - r)\, d\Phi = o,$$

$$\text{oder } Vf = \tfrac{1}{2}P\,(R - r).$$

§. 363.

Fig. 99. **Aufgabe.** Auf zweyen Kurven AMB und

AND liegen in M und N zwey Gewichte M und m, die vermittelſt eines Seiles, MON, das bey O über eine Rolle geht, mit einander verbunden ſind; man ſucht die Bedingungen, unter denen ſie ſich im Gleichgewichte erhalten.

Aufl. 1) Man fälle aus M und N auf die vertikale Abſciſſenlinie AC die Perpendikel MP, NQ, und nenne $AP = X$, $PM = Y$, $AQ = x$, $QN = y$.

2) Geſetzt nun, das Gewicht P gleite an der Kurve AMB um das Element derſelben Mm hinunter, ſo ſinkt es nach vertikaler Richtung durch den Raum Pp; zugleich aber wird das Gewicht m auf der Kurve AND längs dem Elemente Nn heraufgezogen, und ſteigt dabey vertikal aufwärts um Qq; es wird alſo:

$$M \,.\, Pp - m \,.\, Qq = o$$

oder, da $Pp = dX$, und $Qq = -dx$ iſt:

$$MdX + mdx = o.$$

3) Wenn man dieſe Gleichung integrirt, ſo erhält man:

$$MX + mx = C.$$

4) Soll alſo das Gewicht m an jeder Stelle der Kurve AND dem Gewichte M das Gleichgewicht halten, ſo muß die Entfernung des gemeinſchaftlichen Schwerpunkts beyder von der durch A gehenden Horizontale eine beſtändige Größe $\frac{C}{M+m}$ ſeyn, d. h. dieſer Punkt muß ſelbſt in einerley Horizontale bleiben, man mag die Gewichte an Stellen bringen, wohin man will.

5) Man ſetze die Länge des ganzen Seiles MON $= l$, die Entfernung $AO = f$, ſo wird $MO = \surd [(f + X)^2 + Y^2]$, $ON = \surd [(f + x)^2 + y^2]$, folglich:

$$l = \surd [(f + X^2) + Y^2] + \surd [(f + x)^2 + y^2].$$

6) Iſt nun eine von den Kurven z. B. AMB beſtimmt, alſo Y durch X gegeben, ſo kann man aus voriger Gleichung Y, und vermittelſt der Gleichung (3) auch X wegſchaffen, wodurch man eine Gleichung zwiſchen x und y erhält.

§. 364.

Exempel.

Es ſey MC die Fallthür einer Zugbrücke, die durch ein Gewicht m vermittelſt eines Seiles, das über den Punkt A geht, aufgezogen wird; man ſucht die Natur der Kurve AND, worauf das Gewicht m gelegt werden muß, um die Fallthür bey jeder Lage im Gleichgewichte zu erhalten.

1) Hier liegt der Punkt M in einem Kreiſe, deſſen Halbmeſſer MC iſt; nennt man alſo dieſen $= a$, ſo wird $Y^2 = 2aX - X^2$,

folglich: $X^2 + Y^2 = 2aX$.

2) Das Gewicht von MC ſey $= 2M$, ſo iſt der Theil, der davon auf den Endpunkt M kommt, $= M$, alſo

$$MX + mx = C$$

$$\text{und } X = \frac{C - mx}{M}.$$

3) Da ferner $f = o$ iſt, ſo wird

$$l = \sqrt{(X^2 + Y^2)} + \sqrt{(x^2 + y^2)}$$
$$= \sqrt{2aX} + \sqrt{(x^2 + y^2)}\ (1)$$
$$= \sqrt{\left(\frac{2aC - 2amx}{M}\right)} + \sqrt{(x^2 + y^2)}.\ (2).$$

4) Weil für $x = o$, auch $y = o$ iſt, ſo erhält man aus dieſer Gleichung $l = \sqrt{\frac{2aC}{M}}$, folglich

$$l = \sqrt{\left(l^2 - \frac{2amx}{M}\right)} + \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

und wenn man $\frac{m}{M} = \varkappa$ ſetzt, und beyde Seiten quadirt:

$$l^2 = l^2 - 2\varkappa ax + x^2 + y^2 + 2\sqrt{(x^2 + y^2)}.$$
$$\sqrt{(l^2 - 2\varkappa ax)}$$

oder $2\varkappa ax = x^2 + y^2 + 2\sqrt{(x^2 + y^2)}.[l - \sqrt{(x^2 + y^2)}]$

$$= 2l\sqrt{(x^2 + y^2)} - (x^2 + y^2).$$

Anmerk. Die eben gefundene Gleichung gehört zu einer Epicycloide, die durch Fortwälzung eines Kreiſes über einen andern von gleichem Halbmeſſer hervorgebracht wird; wie Joh. Bernoulli in den Actis Lipſ. 1695 pag. 60. zuerſt gezeigt hat. Eine ſehr elegante analytiſche Auflöſung des gegenwärtigen Problems von Herrn Prof. Fuß findet man in den Actis acad. Petropol. 1790. pag. 197 u. f.

§. 365.

Wenn überhaupt mehrere Gewichte m, m', m'' u. ſ. f. auf irgend eine Art mit einander im Gleichgewichte ſind, und man läßt x, x', x'' u. ſ. f. ihre Diſtanzen von einer horizontalen Ebene bedeuten, ſo hat man die Gleichung

$$mdx + m'dx' + m''dx'' + \ldots = 0$$

die ſich auch ſo ausdrücken läßt:

$$d(mx + m'x' + m''x'' + \ldots) = 0.$$

Setzt man nun die Entfernung des gemeinſchaftlichen Schwerpunktes aller dieſer Gewichte von derſelben Ebene $= u$, ſo iſt

$$u = \frac{mx + m'x' + m''x'' + \ldots}{m + m' + m'' + \ldots} \text{ (§. 74.)}$$

$$\text{folglich } du = \frac{d(mx + m'x' + m''x'' + \ldots)}{m + m' + m'' + \ldots} = 0.$$

Daher iſt u für den Fall des Gleichgewichts entweder ein Maximum oder ein Minimum, woraus der allgemeine Satz folgt: **daß der gemeinſchaftliche Schwerpunkt mehrerer Gewichte für den Fall, wo ſie mit einander im Gleichgewichte ſind, entweder am höchſten oder am tiefſten liege.**

§. 366.

Fig. 40. Wenn alſo z. B. ein Gewicht P an einen Faden AGB, der bey A und B befeſtigt iſt, vermittelſt eines Ringes aufgehängt wird, ſo wird es ſich mit der Spannung des Faden nicht eher ins Gleichgewicht ſetzen, als bis es die möglichſt tiefſte Schnelle erreicht hat. Setzt man nemlich ſeine Entfernung EG von der Horizontale AD $= u$, ſo erhält man, da die Kräfte, die ihm Widerſtand leiſten, von unbeweglichen Punkten herrühren, $Pdu = 0$; mithin iſt u für den Fall des Gleichgewichtes ein Maximum.

Es ſey nun AE = x, AD = a, BD = b, die Länge des Seiles = l, ſo wird ED = a − x = GB Sin BOD, und b + u = GB Cos BOD,

alſo $(a - x)^2 + (b + u)^2 = GB^2 = [l - \sqrt{(x^2 + u^2)}]^2$.

Man differenziire dieſe Gleichung nach x, indem man u als beſtändig annimmt, ſo erhält man:

$$a - x = [l - \sqrt{(x^2 + u^2)}] \cdot \frac{x}{\sqrt{(x^2 + u^2)}}$$

$$a = \frac{xl}{\sqrt{(x^2 + u^2)}}, \text{ woraus}$$

$u = x\sqrt{(l^2 - a^2)}$ wird, welches eben die Gleichung iſt, die wir §. 176. gefunden haben.

Druckfehler im erſten Theile.

S. 63. Z. 15. ſtatt $\int Yxd$, l. $\int Ydx$

— 85. — 10. ſt. Bülfinger, l. Leutmann.

— 104. — 1. von unten ſt. $- i$, l $= i$

— 111. — 11. ſt. Aepinus, l. Kraft

— 121. — 7. von unten ſt. daneben l. den eben

— 146. — 8. v. u. ſt. $\frac{1}{2}ds$, l. $\frac{1}{2}qds$

— 155. — 6. v. u. ſt. allemal, l. alle

— 164. — 5. v. u. ſt. ds^2, l. d^2s

— 177. — 9. v. u. ſt. $r + 70$, l. $r \,.\, 70$.

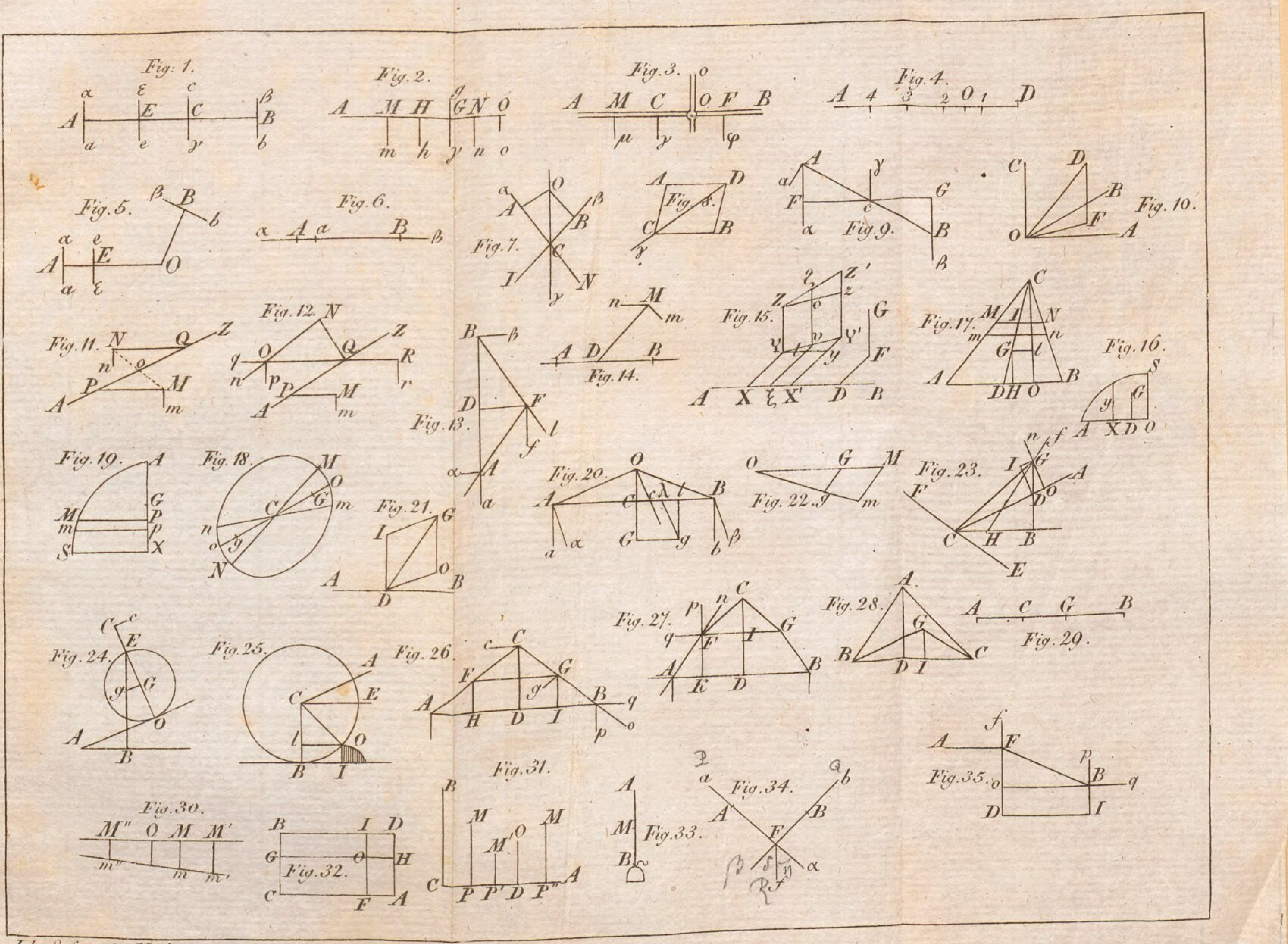
— 230. — 2. ſt. vielförmige, l. keilförmige

— 248. — 14. ſt. $- \frac{1}{6}\xi\lambda a$, l. $- \frac{1}{6}\xi\lambda a^2$

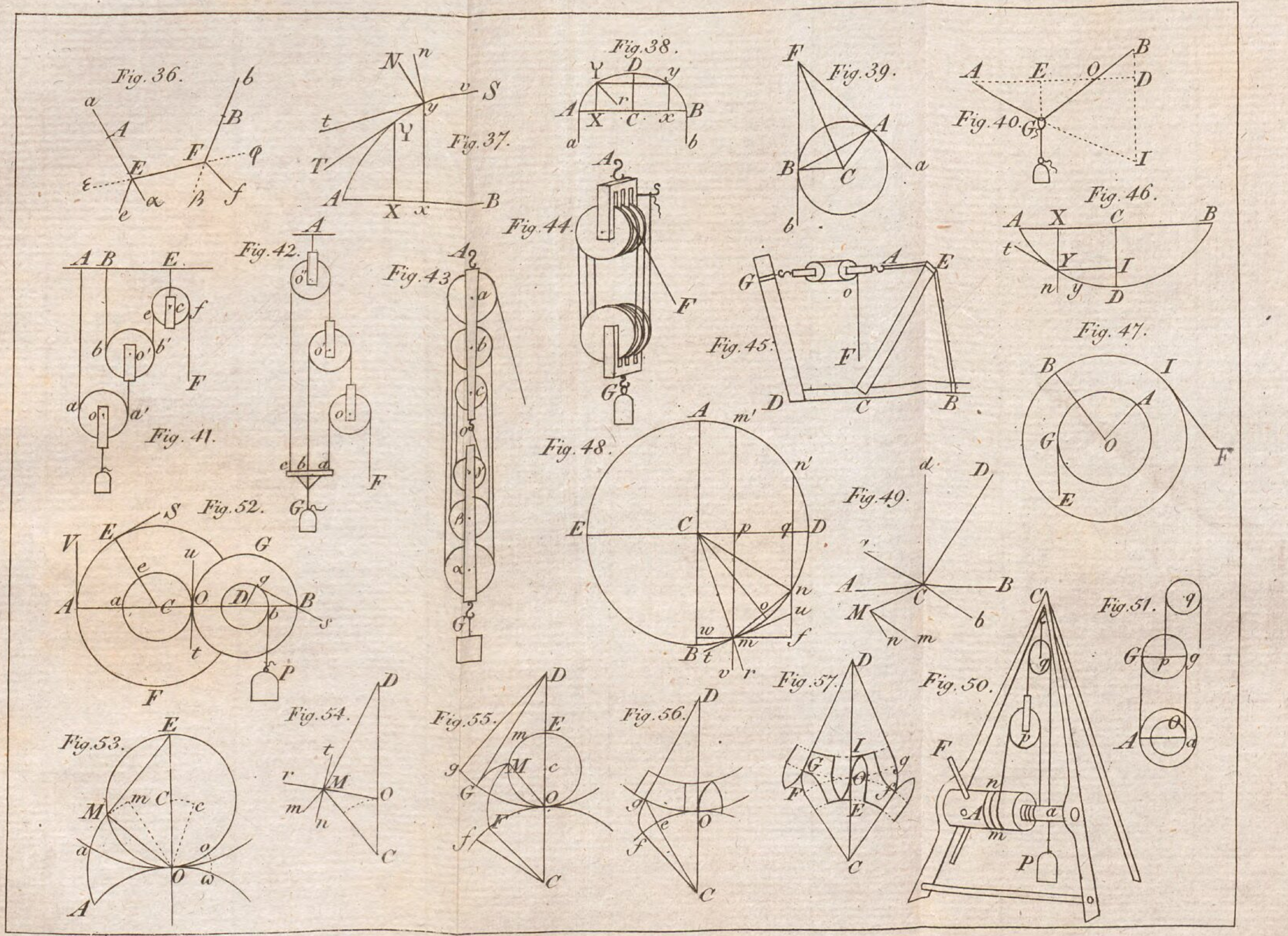
— 281. — 11. ſt. $\frac{P'a'}{c'}$, l. $\frac{P'a'}{c'^2}$

— 309. — 4. v. u. ſt. P, l. p

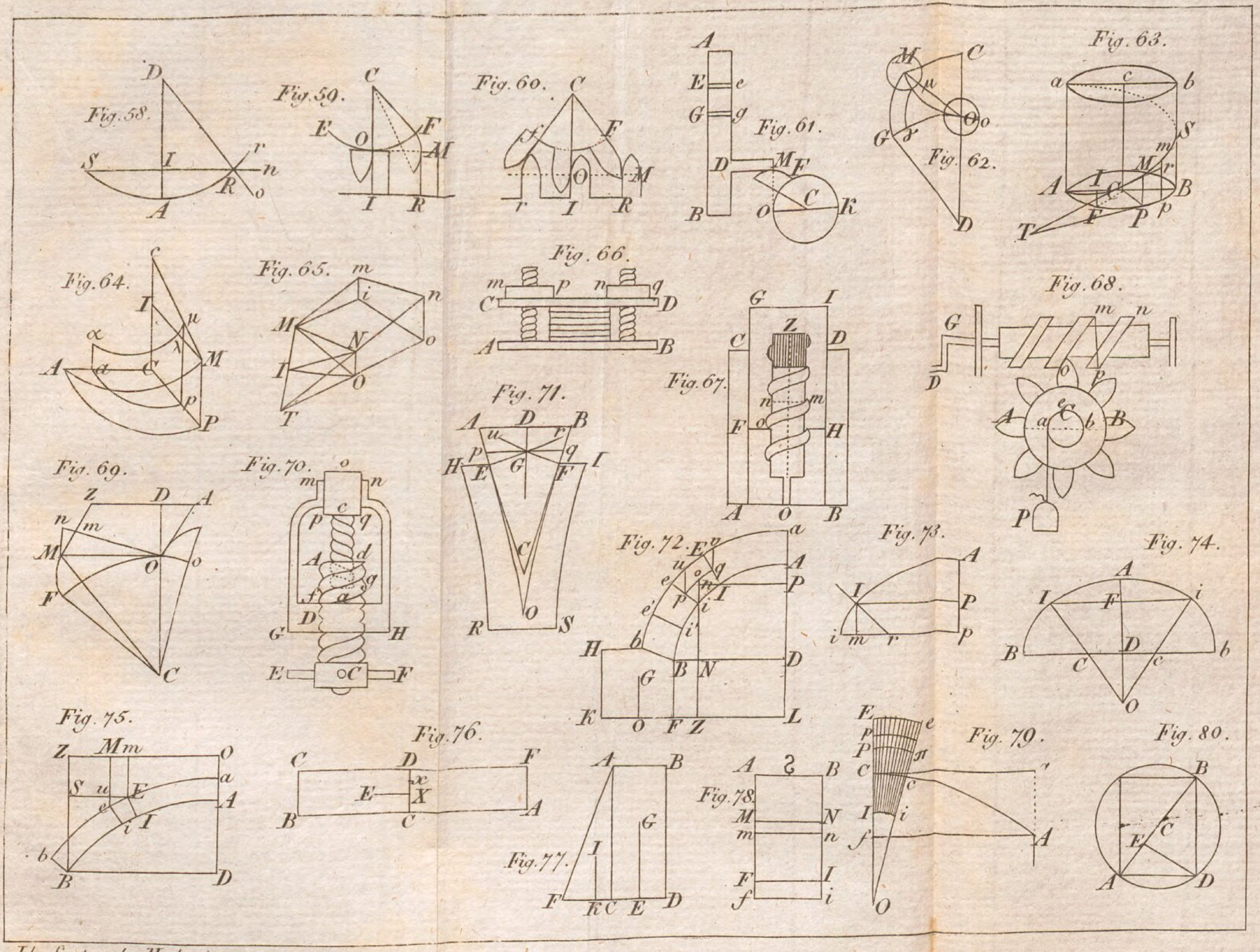
— 341. — 15. 16. 17. und 1. v. u. ſt. S, l. s



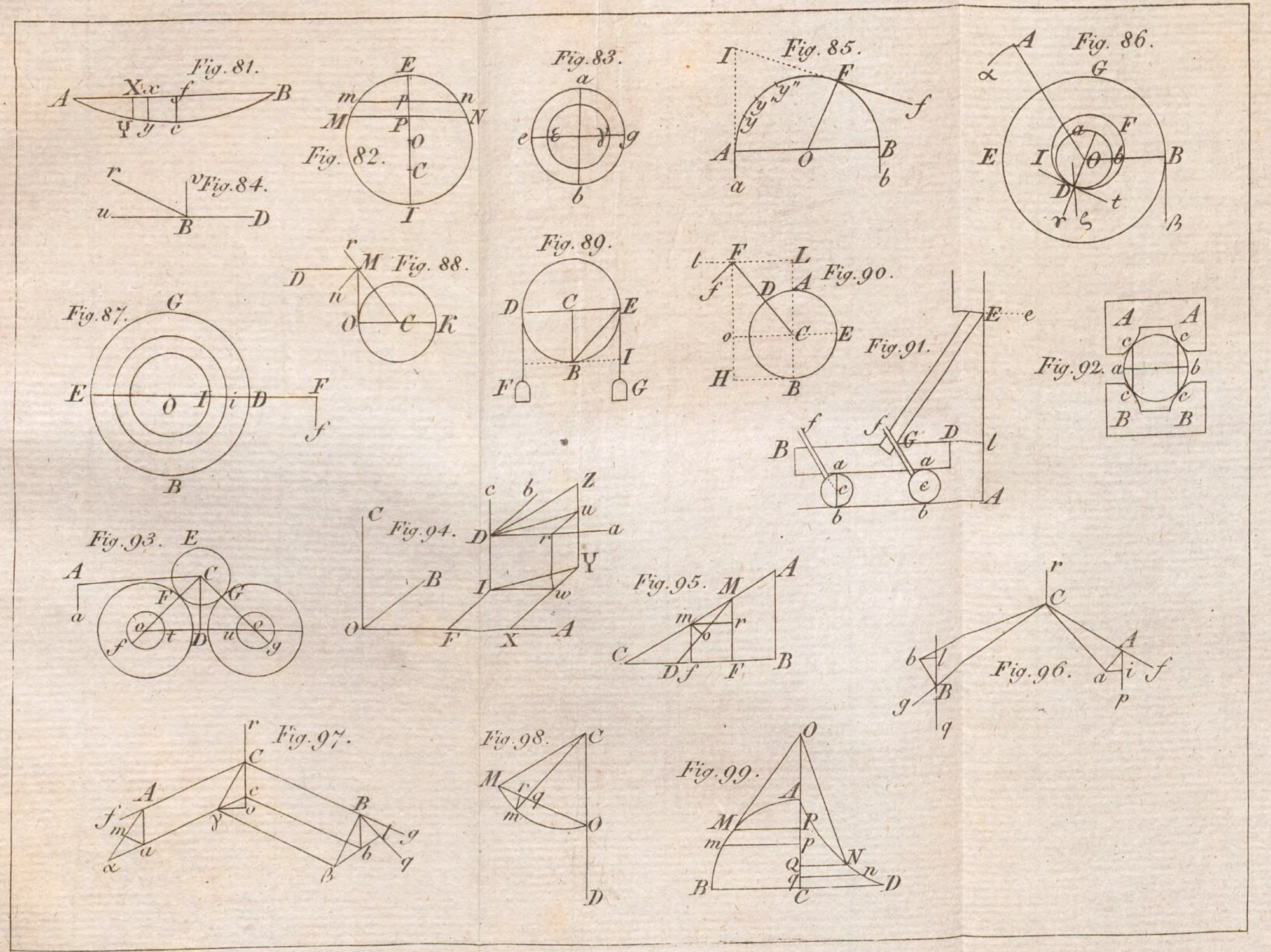
Ide Syſtem der Mechanic
Th. 1. Tab. I.



Ide Syſtem der Mechanic
Th. 1. Tab. II.



Ide Syſtem der Mechanic
Th. 1. Tab. III.



Ide System der Mechanic
Th. 1. Tab. IV.

Syſtem

der

reinen und angewandten

Mechanik

feſter Körper

Von

J. J. A. Ide,

Doktor der Philoſophie und Mitglied der phyſikaliſchen Geſellſchaft
zu Göttingen.

Zweiter Theil.

Berlin,
bei Heinrich Frölich. 1802.

Inhalt
des zweiten Theils.

Erſtes Kapitel. Von der Bewegung der Punkte.

Die Mechanik zerfällt in Phoronomie und Dynamik . . . . §. 1.
Arten der Bewegung . . . . . . — 3.
Gleichförmige Bewegung . . . . . — 6.
Geſchwindigkeit . . . . — 8.
Ungleichförmige Bewegung . . . . — 9.
Gleichförmig beſchleunigte Bewegung . . — 14.
— verminderte . . . . . — 16.
Wirkung der Kräfte . . . . . . — 18.

Zweites Kapitel. Von der fortrückenden Bewegung eines Körpers in gerader Linie.

Vorläufige Beſtimmung der Kraft, die einem Körper fortrückende Bewegung ertheilt . §. 30.
Von der Schwere, und dem freyen Falle der Körper . . . . — 36.
Relation zwiſchen Geſchwindigkeit und der ihr zugehörigen Fallhöhe . . . . — 39.
Vergleichung anderer Kräfte mit der Schwere — 42.
Herabgleiten des Körpers von einer ſchiefen Fläche . . . . — 44.
Bewegung des Körpers, der von einem ſinkenden Gewichte fortgezogen wird . — 46.
Beſtimmung der Friktion, die dabey ſtat findet . . . . — 48.
Von den veränderlichen Kräften . . — 50.

Drittes Kapitel. Von der fortrückenden Bewegung der Körper in krummen Linien.

Zuſammenſetzung und Zerlegung der Geſchwindigkeit . . . . — 55.
Bewegung eines Körpers, der von dreyen auf einander ſenkrechten Kräften getrieben wird — 58.
Bewegung deſſelben auf vorgezeichnetem Wege — 60.
Schwungkraft . . . . — 61.
Wurfbewegung . . . . — 65.
Einfluß der Umdrehung der Erde auf das Steigen und Fallen der Körper . . . . — 73.

Viertes Kapitel. Von dem Widerſtande der Luft bey fortrückender Bewegung.

Geſetze dieſes Widerſtandes . . . . §. 83.
Vertikales Fallen der Körper in der Luft . — 88.
Beſtimmung des Widerſtandes durch Verſuche mit fallenden Körpern . . . . — 93.
Vertikales Steigen in der Luft . . . . — 96.
Vergleichung zwiſchen dem Steigen und nachmaligen Fallen der Körper . . . — 99.
Ueber die Bahn geworfener Körper in der Luft — 102.

Fünftes Kapitel. Zurückführung der mechaniſchen Geſetze auf das Gleichgewicht.

Bey einer einzelnen Maſſe . . . — 110.
Bey zweyen verbundenen Maſſen . . — 115.
Gebrauch der virtuellen Kräfte überhaupt — 123.
Beharrungszuſtand der fortrückenden Bewegung — 124.

Sechſtes Kapitel. Von den Kräften der Menſchen und Thiere bey Bewegungen.

Vom Heben einer Laſt . . . . . — 129.
Vom Gange belaſteter Menſchen . . — 131.
Allmählige Konſumtion der Kraft . . — 134.
Emporſteigen mit der Laſt auf geneigtem Boden . . . . — 139.
Fortſchieben einer Maſſe . . . . — 142.
Kraft der Arme zum Ziehen . . . — 145.
Mechaniſches Moment . . . . . — 149.
Vom Zuge der Thiere . . . . . — 154.

Siebentes Kapitel. Vom centralen Stoße der Körper.

Einleitung . . . . — 158.
Vom geraden Stoße unelaſtiſcher Körper . — 164.
— — — vollkommen elaſtiſcher — 168
Schiefer Stoß . . . . — 171.
Ueber das Einſinken priſmatiſcher Körper in weichen Boden . . . . — 172.
Anwendung auf das Einrammen der Pfähle — 181.
Vom Einſinken pyramidaliſcher und anderer Körper . . . . — 186.
Vom Widerſtande, den Räder in weichem Boden leiden . . . . — 194.

Achtes Kapitel. Von der Umdrehung der Körper um feſte Axen.

Eigenſchaften dieſer Bewegung . . . — 195.
Winkelgeſchwindigkeit . . . . — 197.
Wirkung der Hebelkräfte . . . . — 199.
Moment der Trägheit . . . . . — 200.
Schwingung der Körper um feſte Axen . — 215.
Einfaches und zuſammengeſetztes Pendel . — 222.
Mittelpunkt der Schwingung . . . — 226.
Verſuche zur Beſtimmung der Länge des Sekundenpendels . . . . . . — 233.
Schwingung des Körpers bey geneigter Axe — 238.
Zuſammengeſetzte Maſchinen mit mehreren Axen — 240.
Gleichförmige Bewegung bey denſelben . — 251.

Wirkſamkeit derſelben . . . . . §. 256.
Berechnung einer Roßmühle . . — 259.
Vom Widerſtande der Luft bey drehender Bewegung . . . . — 266.
Beſtimmung deſſelben durch Verſuche . — 273.

Neuntes Kapitel. Von den freyen Axen feſter Körper.
Gewalt, die die Axe beym Drehen leidet . — 276.
Erforderniſſe und Eigenſchaften der freyen Axe — 279.
Beſtimmung derſelben . . . . . — 481.
Folgerungen daraus . . . . . . — 282.
Moment der Trägheit für jede Axe auf die der drey freyen Axen gebracht . . . . — 287.
Hauptaxen . . . . — 289.

Zehntes Kapitel. Von der gemiſchten Bewegung feſter Körper.
Zuſammenſetzung und Zerlegung der Winkelgeſchwindigkeiten . . . . . . — 290.
Jede augenblickliche Bewegung des Körpers beſteht in einem Fortrücken, und einem Drehen um eine durch ſeinen Schwerpunkt gehende Axe . . . . — 296.
Wirkung der Kraft, deren Richtung in der Ebene eines Paars freyer Axen des Körpers fällt . . . . — 300.
Abwicklung einer Rolle von einem Faden — 302.
Herabrollen einer Kugel von einer geneigten Fläche mit Betrachtung der Friktion . — 304.

Schwingnng eines Pendels mit beweglicher Axe §. 306.
Allgemeinere Betrachtung der freyen Bewegung des Körpers . . . . . . — 309.

Eilftes Kapitel. Von der Bewegung biegſamer und elaſtiſcher Körper.

Fundamental-Gleichung . . . . . — 323.
Schwingung der Saiten . . . . . — 324.
Schwingung elaſtiſcher Ruthen und Klingen — 329.
Ueber Uhrfedern . . . . . . — 337.

Die

Mechanik,

oder die

Lehre von der Bewegung feſter Körper.

Zweyter Theil.

Erſtes Kapitel.

Von der Bewegung der Punkte.

§. 1.

Die Mechanik umfaßt zwey Lehren, die im Weſentlichen ganz von einander verſchieden ſind. Die eine von dieſen, die **Phoronomie**, betrachtet bloß die Bewegungen an ſich, ohne darauf zu ſehen, wie ſie entſtanden ſeyn kömen; die andere handelt dagegen von den Urſachen derſelben, oder den **Kräften**, und hat davon den Namen **Dynamik**. Beyde Lehren ſind aber doch zu innig mit einander verwandt, als daß irgend ein Vortheil daraus erwachſen könnte, wenn man ſie abſondern, und aus jeder von ihnen eine eigene Wiſſenſchaft machen wollte.

§. 2.

Wenn ſich ein feſter Körper bewegt, ſo hat dabey jedes Theilchen, jeder Punkt in ihm, ſeine eigene Bewegung. In den meiſten Fällen iſt dieſe nicht für alle Punkte des Körpers einerley; man ſieht z. B. an einer Kugel, die auf einer Ebene hinrollt, daß ihr Mittelpunkt in gerader Linie fortgeht, aber niemand wird wohl

behaupten, daß eben die Bewegung auch einem Punkte in ihrer Oberfläche zukomme. Es wird alſo nothwendig ſeyn, zuerſt die Bewegung eines einzelnen Punktes beſonders zu betrachten, um nachher von der Bewegung eines Körpers, oder ganzen Syſtems von Punkten richtig urtheilen zu können.

§. 3.

Schon in der Geometrie wird gelehrt, daß ein Punkt, indem er ſich bewegt, eine Linie beſchreibe. Dieſe Linie nennt man in der Mechanik den **Weg**, oder den durchlaufenen **Raum** des Punktes, und ſeine Bewegung heißt **geradlinigt** oder **krummlinigt**, je nachdem ſein Weg gerade oder gekrümmt iſt.

§. 4.

Bey der geradlinigten Bewegung eines Punktes kommen drey Dinge in Betracht: die **Richtung**, nach der der Punkt fortgeht, der Raum, den er in einer beſtimmten Zeit zurücklegt, und die Zeit ſelbſt, die während dieſer Bewegung verfließt.

Die Richtung bezieht ſich bloß auf die Lage der geraden Linien, und iſt alſo, ſo lange ſich der Punkt darin fortbewegt, unveränderlich. Bey krummlinigter Bewegung hingegen ändert ſie ſich jeden Augenblick, und kommt in jeder Stelle der Kurve, die der Punkt beſchreibt, mit der Tangente überein, die ſich daſelbſt an der Kurve ziehen läßt. Die Betrachtung krummlinigter Bewegung ſetzt alſo, wie man hieraus ſieht, ſchon Kenntniſſe der geradlinigten Bewegung voraus;

daher wollen wir uns hier zu Anfange bloß auf letztere einſchränken.

§. 5.

Man kann ferner noch die Bewegung in **konti=nuirliche** oder **ſtetige**, und **dikontinuirliche** oder **unterbrochene** eintheilen. Bey jener bewegt ſich der Punkt fortdauernd nach einem gewiſſen Geſetze, ſo daß dabey Zeit und Raum auf irgend eine Art von einander abhängen. Letztere hingegen wäre eine ſolche, wo von Zeit zu Zeit plötzliche Aenderungen einträten, die das Geſetz zwiſchen Zeit und Raum immer von neuem zerſtörten, und ein anderes hervorbrächten. Da dergleichen Bewegungen in der Natur höchſt ſelten, und genau genommen, vielleicht nie ſtatt finden, ſo verdienen ſie gerade nicht, beſonders betrachtet zu werden. Wenn alſo in der Folge von irgend einer Bewegung die Rede iſt, ſo ſoll darunter jedesmal eine ſolche verſtanden werden, wobey der Raum s, der in einer beliebigen Zeit t zurückgelegt iſt, durch dieſes t auf die eine oder die andere Art ſich beſtimmen läßt.

Gleichförmige Bewegung.

§. 6.

Unter allen regelmäßigen Bewegungen iſt die **gleichförmige** Bewegung, oder die, wobey Zeit und Raum in einerley Verhältniſſe zunehmen, die einfachſte und natürlichſte.

Man ſetze, der Punkt lege in einem gewiſſen Zeit-

maaße, z. B. in der erſten Sekunde, den Raum c zurück, nach Verlauf von t Sekunden ſey er aber durch den Raum s fortgegangen, und dabey finde immer das Geſetz ſtatt, daß die Räume ſich wie die dazu gehörigen Zeiten verhalten, ſo hat man

$$1 : t = c : s, \text{ folglich}$$
$$s = ct.$$

eine Gleichung, worin alles enthalten iſt, was ſich über die Natur der gleichförmigen Bewegung ſagen läßt.

§. 7.

Läßt man in ihr die Zeit t um einen Theil Δt wachſen, und nennt Δs die daraus entſtehende Aenderung von s, ſo iſt $s + \Delta s$ der in $t + \Delta t$ zurückgelegte Raum, alſo:

$$s + \Delta s = c(t + \Delta t) = ct + c\Delta t$$
davon $s = \ldots\ldots ct$ abgezogen,
bleibt $\Delta s = c\Delta t$.

Der Punkt durchläuft alſo während ſeiner ganzen Bewegung in gleichen Zeiten immer gleiche Räume, und in einer Sekunde ſtets daſſelbe Stück c, das er in der erſten Sekunde zurückgelegt hat.

§. 8.

Dieſes c dient folglich zum Maaße der gleichförmigen Bewegung, indem davon abhängt, wie viel Raum in einer gegebenen Zeit zurückgelegt wird; man nennt es auch die Geſchwindigkeit des Punktes.

Es ſey die Geſchwindigkeit eines Punktes $A = c$, die eines andern Punktes $B = C$, ſo durchläuft erſte-

rer in der Zeit t den Raum $s = ct$, letzterer in der Zeit T den Raum $S = CT$. Iſt nun $t = T$, ſo hat man:

$$s : S = ct : Ct = c : C.$$ d. h.

die Räume, die zwey Punkte bey gleichförmiger Bewegung in einerley Zeit durchlaufen, verhalten ſich, wie ihre Geſchwindigkeiten.

Soll dagegen $s = S$ ſeyn, ſo wird $ct = CT$, alſo

$$t : T = C : c,$$ oder

die Zeiten, worin zwey Punkte, die ſich gleichförmig bewegen, einerley Raum zurücklegen, verhalten ſich verkehrt, wie ihre Geſchwindigkeiten.

Ungleichförmige Bewegung.

§. 9.

Wenn bey gleichen Aenderungen der Zeit die Aenderungen des Raumes ungleich ſind, ſo nennt man die Bewegung ungleichförmig; ſie iſt beſchleunigt, wenn der Punkt in jedem folgenden gleich großen Zeittheile einen größern Raum durchläuft, als im vorhergehenden; verzögert, wenn dieſer Raum nach und nach kleiner wird.

§. 10.

Bey der Vorausſetzung, daß ſich der Punkt nach einem ſtetigen Geſetze fortbewege (§. 5.), muß ſich die Ungleichheit der Räume auf das kleinſte Zeitmaaß erſtrecken, worin man die ganze Dauer ſeiner Bewegung abtheilt. Daher hat der Punkt nur an jeder einzelnen

Stelle ſeines Weges eine beſtimmte Geſchwindigkeit; ſie iſt von Zeit zu Zeit fortwährenden Aenderungen unterworfen, ſo wie das Verhältniß der einzelnen Räume zu den Zeiten, worin ſie zurückgelegt ſind, anders wird. Bey beſchleunigter Bewegung wird alſo die Geſchwindigkeit immer größer, und bey verzögerter Bewegung immer kleiner; überhaupt iſt bey ungleichförmigen Bewegungen die Geſchwindigkeit eine veränderliche Größe, die, eben ſo wie der Raum, von der Zeit abhängt.

Anmerk. Um dies durch ein ſinnlicheres Beyſpiel zu erläutern, ſetze man: ein Baumſtamm ſey, wie gewöhnlich, nach der Spitze zu, dünner, nach der Wurzel zu dicker. Niemand wird ſagen, der Stamm habe gar keine Dicke, weil ſie nicht an allen Stellen gleich groß iſt: aber eine beſtimmte Dicke kann er nur an einer einzigen Stelle haben, und ſo wie man von dem einen Ende zum andern weiter geht, ändert ſie ſich unabläßig. Dennoch läßt ſie ſich an jeder gegebenen Stelle unmittelbar meſſen, welches bey veränderlicher Geſchwindigkeit nicht angeht; offenbar deshalb, weil jene bleibend, dieſe hingegen vorübergehend iſt.

§. 11.

Aufgabe. Es ſey das Geſetz bekannt, nach welchem der jedesmalige Raum s von der dazu gehörigen Zeit t abhängt; man ſucht die Geſchwindigkeit, die der Punkt zu Ende dieſer Zeit t erhalten hat.

Fig. 1. **Aufl. 1** Wir wollen annehmen, der Punkt habe während der Zeit t mit beſchleunigter Bewegung den Raum $AP = s$ zurückgelegt, und ſey nun gegenwärtig in P; ſeine Geſchwindigkeit ſey daſelbſt $= u$.

2 In dem nächſten Zeittheilchen Δt geht er alſo um ein Stück $Pp = \Delta s$ weiter, und wenn er in p an-

langt, hat ſeine Geſchwindigkeit einen Zuwachs = Δu bekommen, ſo daß ſie an dieſer Stelle = $u + \Delta u$ iſt.

3) Bewegte ſich der Punkt während des Zeittheils Δt gleichförmig, ſo durchliefe er darin mit der Geſchwindigkeit u den Raum = $u\Delta t$, und mit der Geſchwindigkeit $u + \Delta u$ den Raum = $(u + \Delta u)\,\Delta t$.

4) Von dieſen Räumen iſt alſo unſtreitig erſterer kleiner als Δs, letzterer grőßer als Δs: denn des Punktes Geſchwindigkeit iſt ja innerhalb der Zeit Δt ſtets grőßer als u, und ſtets kleiner als $u + \Delta u$. Man hat alſo:

$$\Delta s > u\Delta t, \text{ und}$$

$$\Delta s < (u + \Delta u)\,\Delta t, \text{ oder}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} > u, \text{ und}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} < u + \Delta u, \text{ folglich:}$$

$$\Delta u > \frac{\Delta s}{\Delta t} - u$$

5) Hierbey iſt die Zeit Δt willkührlich; man kann ſie alſo ſo klein ſetzen, als man will. Läßt man ſie unendlich abnehmen, ſo nimmt auch Δu unendlich ab, folglich auch der Unterſchied $\frac{\Delta s}{\Delta t} - u$, da es ſtets geringer als Δu iſt.

6) Daher nähert ſich $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ unendlich der Grenze u; zugleich aber nähert ſich bey eben der Vorausſetzung der

Werth von $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ unendlich der Grenze $\frac{ds}{dt}$; folglich erhält man: $u = \frac{ds}{dt}$.

7) Iſt die Bewegung des Punktes verzögernd, ſo leidet ſeine Geſchwindigkeit u, indem er durch den Raum Pp fortgeht, eine Abnahme $= \Delta u$, und wird alſo in $p = u - \Delta u$.

8) Bewegte er ſich die Zeit Δt hindurch gleichförmig, ſo legte er in derſelben mit der Geſchwindigkeit u den Weg $= u\Delta t$, und mit der Geſchwindigkeit $u - \Delta u$ den Weg $= (u - \Delta u)\,\Delta t$ zurück. Es iſt daher:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} < u, \text{ und}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} > u - \Delta u, \text{ folglich}$$

$$\Delta u > u - \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

9) Läßt man nun wieder Δt unendlich abnehmen, ſo nimmt auch Δu, und mit dieſem zugleich $u - \frac{\Delta s}{\Delta t}$ unendlich ab; alſo nähert ſich wieder $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ unendlich der Grenze u, wie im erſtern Falle.

§. 12.

Gegenſeitig wird $ds = udt$, alſo $s = \int udt$, wozu weiter nichts addirt wird, weil für $t = 0$, d. h. zu Anfange der Bewegung, auch $s = 0$ iſt.

§. 13.

Unter den ungleichförmigen Bewegungen kommen zwey beſondere Arten: die gleichförmig beſchleunigte, und gleichförmig verzögerte Bewegung am häufigſten vor, und verdienen deshalb vorzüglich bemerkt zu werden. Bey erſterer verhält ſich der Zuwachs, bey letzterer die Abnahme der Geſchwindigkeit, vom Anfange der Bewegung angerechnet, wie die Zeit, die während derſelben verfloſſen iſt.

Gleichförmig beſchleunigte Bewegung.

§. 14.

Es ſey zu Anfange derſelben, oder für $t = o$, die Geſchwindigkeit des Punktes $= c$; der Zuwachs, den ſie in der erſten Sekunde dieſer Bewegung erhält, $= \varkappa$; ſo hat ſie nach Verlauf von t Sekunden den Zuwachs $= \varkappa t$ bekommen, und iſt alſo in dieſem Augenblicke $= c + \varkappa t$.

Man ſetze dieſe Geſchwindigkeit $= u$; den Raum, den der Punkt während der Zeit t zurückgelegt hat, $= s$, ſo wird $s = \int u dt = \int dt\,(c + \varkappa t) = ct + \frac{1}{2}\varkappa t^2$.

§. 15.

Iſt die anfängliche Geſchwindigkeit $c = o$, ſo hat man:

1. $u = \varkappa t$, und $s = \frac{1}{2}\varkappa t^2$; alſo verhält ſich dann der Raum, wie das Quadrat der Zeit, worin er durchlaufen iſt.

2. Der Weg, den der Punkt in der erſten Sekunde dieſer Bewegung zurücklegt, iſt $= \frac{1}{2} \varkappa$; ſetzt man ihn $= g$, ſo wird $s = gt^2$, und $u = 2gt$.

3. Da $u^2 = 4g^2t^2 = 4gs$, ſo erhält man $u = \sqrt{4gs} = 2\sqrt{gs}$; daher verhält ſich die Geſchwindigkeit auch, wie die Quadratwurzel aus dem Raume.

4. Gegenſeitig iſt $s = \frac{u^2}{4g}$

5. Es iſt $ut = 2gt^2 = 2s$, d. h. der Raum, den der Punkt in der Zeit t durchläuft, wenn er ſich mit der Geſchwindigkeit u gleichförmig bewegt, iſt doppelt ſo groß als der, den er in eben der Zeit durchläuft, wenn ſeine Geſchwindigkeit während derſelben von o bis zu u gleichförmig zunimmt.

Gleichförmig verminderte Bewegung.

§. 16.

Bey dieſer ſey die anfängliche Geſchwindigkeit des Punktes $= c$; die Abnahme derſelben in der erſten Sekunde $= \varkappa$, ſo beträgt dieſe in der Zeit $t = \varkappa t$; alſo iſt die Geſchwindigkeit u, die dem Punkte am Ende dieſer Zeit noch übrig bleibt, $= c - \varkappa t$. Nennt man daher s den Raum, den der Punkt während der Zeit t zurückgelegt hat, ſo wird $s = \int u dt = \int dt (c - \varkappa t) = ct - \frac{1}{2} \varkappa t^2$.

§. 17.

Für $u = o$, wird $\varkappa t = c$, folglich $t = \frac{c}{\varkappa}$. Dies iſt alſo die Zeit, in welcher der Punkt alle ſeine Ge-

ſchwindigkeit verliert, oder die Dauer ſeiner ganzen Bewegung. Für längere Zeit würde nemlich die Geſchwindigkeit u negativ, d. h. der Punkt bekäme alsdann eine gleichförmig beſchleunigte Bewegung nach entgegengeſetzter Richtung.

Setzt man dieſen Werth von t in den für s (§. 16.) gefundenen Ausdruck, ſo erhält man für den Raum, den der Punkt während der ganzen Zeit ſeiner Bewegung durchlaufen iſt:

$$s = \frac{c^2}{\varkappa} - \frac{c^2}{2\varkappa} = \frac{c^2}{2\varkappa}.$$

Eben dieſen Werth für s erhält man auch, wenn man in §. 15. n I $t = \frac{c}{\varkappa}$ ſetzt. Daraus folgt alſo: daß der Punkt eben den Raum während jener Zeit zurücklegt, wenn ſeine Geſchwindigkeit von o an in eben dem Maaße gleichförmig wächſt, als ſie im vorigen Falle abnahm.

Wirkung der Kräfte auf die Bewegung eines Punktes.

§. 18.

Ein Körper, der frey von aller Einwirkung fremder Dinge iſt, kann den Zuſtand, worin er ſich befindet, nicht durch ſich ſelbſt ändern. Er kann alſo nicht ſich ſelbſt aus der Ruhe in Bewegung ſetzen, und wenn er ſich nach irgend einer Richtung mit einer einmal erhaltenen Geſchwindigkeit fortbewegt, ſo hat er weder

eigenes Vermögen, von dieſer Richtung abzulenken, noch ſich ſelbſt eine ſchnellere oder langſamere Bewegung zu ertheilen, wofern nicht eine äußere Urſache, eine Kraft (Statik §. 1.) die eine oder die andere dieſer Aenderungen in ſeiner Bewegung hervorbringt. Dies iſt eine natürliche Eigenſchaft aller Materie, die man mit dem Namen ihrer Trägheit belegt.

§. 19.

Wenn alſo ein Körper in Ruhe iſt, ſo bleibt er darin ſo lange, bis ihn eine Kraft in Bewegung ſetzt; und bewegt er ſich nach irgend einer Richtung mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit, ſo ſetzt er dieſe Bewegung ſo lange fort, bis eine Kraft entweder in Anſehung der Richtung oder der Geſchwindigkeit eine Aenderung bewirkt. Gegenſeitig folgt:

Daß ein Körper, der ſich mit veränderlicher Geſchwindigkeit oder in einer Kurve bewegt, beſtändigen Einwirkungen von Kräften ausgeſetzt ſeyn müſſe, die jeden Augenblick ſeine Bewegung entweder beſchleunigen, oder verzögern, oder ihn von ſeiner vorigen Richtung abzuweichen nöthigen.

§. 20.

Zwey gleiche Kräfte, die auf einen Punkt nach entgegengeſetzten Richtungen wirken, erhalten ihn in Ruhe; jede von ihnen, einzeln genommen, bringt ihn aber aus der Ruhe in Bewegung, und es liegt ſchon in dem Begriffe der Gleichheit, daß ihm beyde im erſten Augenblicke der Wirkung einerley Geſchwindigkeit ertheilen müſſen.

§. 21.

Dagegen verhalten ſich die anfänglichen Geſchwindigkeiten, die der Punkt durch zwey ungleiche Kräfte p und q erhält, wenn ſie ihn, einzeln genommen, aus der Ruhe in Bewegung ſetzen, eben ſo wie dieſe Kräfte.

Beweis. 1) Man ſetze zuerſt, die Kraft q ſey irgend ein Vielfaches von p, oder $= np$, ſo kann man ihr, nach der Richtung, die ſie hat, n einzelne Kräfte ſubſtituiren, deren jede $= p$ iſt.

2) Nun ertheile die Kraft p dem Punkte unmittelbar eine Geſchwindigkeit $= c$, oder treibe ihn in dem erſten Zeitmomente dt durch den Raum cdt, ſo hat eben dieſe augenblickliche Wirkung jede andere Kraft auf ihn, die $= p$ iſt; alſo bewirken n ſolcher Kräfte, die auf ihn zu gleicher Zeit nach einerley Richtung angebracht werden, daß er im erſten dt durch den n fachen Raum ncdt geht, und folglich die Geſchwindigkeit nc erhält: denn jede von ihnen wirkt für ſich auf den Punkt, unabhängig von den übrigen Kräften.

3) Eben dies bewirkt alſo auch die Kraft $q = np$; daher iſt der Satz für dieſen Fall erwieſen.

4) Es ſey nun ferner die Kraft $q = \frac{p}{n}$, ſo iſt $p = nq$, alſo die Geſchwindigkeit c, die die Kraft p dem Punkte ertheilt, n mal ſo groß, als die ihm q ertheilt, folglich umgekehrt die Geſchwindigkeit, die er durch q erhält, $= \frac{c}{n}$, oder ein ntel von der, die er durch p erhält.

5) Endlich ſey $q = \frac{m}{n} \cdot p$, ſo bekommt der Punkt durch die Kraft $\frac{p}{n}$ die Geſchwindigkeit $\frac{c}{n}$, folglich durch $q = m\,(\frac{p}{n})$ die Geſchwindigkeit $m\,(\frac{c}{n}) = \frac{m}{n} \cdot c$; alſo ſind wieder die Wirkungen in dem Verhältniſſe der Kräfte.

6) Da nun unter $\frac{m}{n}$ jede Verhältnißzahl begriffen iſt, ſo erhellet, daß bey jedem Verhältniſſe, das zwiſchen p und q ſtatt finden kann, auch die Geſchwindigkeiten, die dieſe Kräfte einzeln dem Punkte im erſten Augenblicke der Wirkung ertheilen, daſſelbe Verhältniß p : q zu einander haben müſſen.

§. 22.

Wir kennen in der Natur ſolche Kräfte nicht, die durch eine augenblickliche Wirkung irgend eine angebliche Bewegung hervorzubringen fähig wären; ſelbſt während des Stoßes, wodurch ein Körper dem andern Geſchwindigkeit mittheilt, verfließt allemal eine gewiſſe Zeit, und ſey dieſe auch noch ſo gering, ſo kann man doch nie ſagen, daß dabey die ganze Bewegung plötzlich entſtehe. Indeß war die Vergleichung zwiſchen Kräften und den Geſchwindigkeiten, die ſie unmittelbar erzeugen, doch nothwendig, um daraus ferner herleiten zu können, was für Wirkung eine Kraft in einer beſtimmten Zeit ausübt, wenn ſie die Bewegung des Punk-

Punktes während dieſer Zeit nach einerley Richtung fortdauernd beſchleunigt.

§. 23.

Aufgabe. Eine unveränderliche Kraft p wirkt auf einen Punkt, der Anfangs in Ruhe iſt, eine beſtimmte Zeit hindurch nach einerley Richtung ununterbrochen fort; man fragt, wie ſeine Bewegung während dieſer Zeit beſchaffen ſey, und welche Geſchwindigkeit er zu Ende derſelben erlangt habe.

Aufl. 1) Sie ertheile ihm im erſten Zeittheilchen dt die Geſchwindigkeit fdt. Wäre ihre Wirkung hiermit zu Ende, ſo würde der Punkt mit dieſer Geſchwindigkeit vermöge ſeiner Trägheit (§. 18.) gleichförmig fortgehen. Aber der Vorausſetzung nach ſoll auf ihn die Kraft p in jedem folgenden Zeittheilchen von neuem wirken; ſeine vorige Geſchwindigkeit fdt erhält alſo im zweyten dt denſelben Zuwachs fdt, und wird folglich = 2fdt.

2) Um eben ſo viel vermehrt ſie ſich alſo auch in jedem nächſten Zeitmomente dt, ſo daß ſie nach Verlauf der Zeit ndt zu nfdt angewachſen iſt.

3) Man nehme nun n ſo groß an, daß ndt = der gegebenen Zeit t wird, und nenne die geſuchte Geſchwindigkeit, die der Punkt zu Ende derſelben bekommen hat, = u; ſo hat man u = nfdt, oder wenn man für ndt ſeinen Werth t ſubſtituirt: u = ft.

4 Dieſe Geſchwindigkeit verhält ſich alſo jedesmal wie die Dauer der Bewegung, und hängt außer-

dem davon ab, wie groß die erſte augenblickliche Wirkung der Kraft auf den Punkt geweſen iſt: denn auf dieſer beruhet der Koefficient f.

5) Die Bewegung des Punktes iſt demnach, während ihn die Kraft p beſchleunigt, eine gleichförmig beſchleunigte Bewegung (§. 15.).

§. 24.

Man ſetze, eine andere Kraft q ertheile dem Punkte im erſten Zeitmomente dt die Geſchwindigkeit gdt, ſo erhält er durch ihre fortgeſetzte Wirkung während der Zeit t die Geſchwindigkeit gt. Nennen wir dieſe *v*, ſo iſt:

$u : v = f : g$; ferner iſt aber auch:

$p : q = fdt : gdt$ (§. 21.) $= f : g$,

folglich wird $p : q = u : v$, oder:

die Geſchwindigkeiten, die zwey ungleiche Kräfte einzeln genommen einem Punkte in einerley Zeit ertheilen, indem ſie während dieſer Zeit unabläßig auf ihn wirken, verhalten ſich gerade ſo, wie die Kräfte.

§. 25.

Demnach verhalten ſich auch die Räume, die der Punkt in einer gegebenen Zeit t zurücklegt, indem während derſelben die eine oder die andere von beyden Kräften p und q beſtändig auf ihn wirkt, direkt wie dieſe Kräfte.

Man nenne nemlich dieſe Räume y und z, ſo hat man:

$ut = 2y$, und $vt = 2z$ (§. 15. 5.), alſo
$y : z = u : v$, folglich auch
$y : z = p : q$

§. 26.

Bewegt ſich der Punkt in dem Augenblicke, wo die Kraft p auf ihn zu wirken anfängt, oder für $t = 0$, ſchon mit irgend einer Geſchwindigkeit $= c$, und zwar nach eben der Richtung, die die Kraft hat, ſo leidet dieſe von Zeit zu Zeit fortwährende Aenderungen; wir wollen ſetzen, ſie ſey nach Verlauf der Zeit t zu u angewachſen.

Da ſie durch die Kraft in jedem Zeittheilchen dt den Zuwachs fdt bekommt, ſo iſt jedesmal $du = fdt$, alſo $u = \text{Conſt} + ft$, und weil für $t = 0$, $u = c$ war, ſo hat man $\text{Conſt} = c$, folglich $u = c + ft$.

Der Punkt hat alſo auch in dieſem Falle eine gleichförmig beſchleunigte Bewegung (§. 14.).

§. 27.

Wirkt die Kraft der anfänglichen Bewegung des Punktes entgegen, ſo verzögert ſie dieſelbe in jedem Augenblicke, und zwar auf folgende Art:

Die Geſchwindigkeit des Punktes ſey Anfangs $= c$, nach Verlauf der Zeit t aber $= u$, ſo macht der Punkt im nächſten dt vermöge ſeiner Trägheit den Weg $= udt$; die Kraft giebt ihm aber in eben dem Augenblicke die entgegengeſetzte Geſchwindigkeit fdt, oder treibt ihn um fdt zurück, alſo durchläuft er in dieſem dt nur den Raum $udt - fdt^2$.

Wird dieſer durch dt dividirt, ſo erhält man für ſeine eigentliche Geſchwindigkeit während dieſes Zeittheilchens u — fdt. Es wird alſo du = — fdt, folglich u = Conſt — ft, und da für t = o, u = c iſt: Conſt = c, oder u = c — ft.

Die Kraft bewirkt demnach hier eine gleichförmig verminderte Bewegung (§. 16.).

Zweites Kapitel.

Von der fortgehenden Bewegung eines Körpers in gerader Linie.

---

§. 28.

Man ſagt von einem feſten Körper, er habe eine fortgehende Bewegung, wenn ſich alle Punkte in ihm zugleich mit einerley Geſchwindigkeit und nach parallelen Richtungen fortbewegen.

§. 29.

Die Möglichkeit einer ſolchen Bewegung erhellet leicht. Es iſt nemlich klar, daß die Bewegung eines feſten Körpers überhaupt nichts weiter vorausſetze, als daß dabey jeder ſeiner Punkte von andern ſtets dieſelbe Entfernung behalte; eine Bedingung, die im gegenwärtigen Falle offenbar erfüllt wird. Wichtiger iſt dagegen eine zweyte Frage: was für Kräfte ſind es, wo-

durch dem Körper eine fortgehende Bewegung ertheilt werden kann?

Um dieſe zu beantworten, denke man ſich den ganzen Körper, deſſen Maſſe = M ſeyn mag, in lauter gleiche Elemente, jedes = m getheilt, und ſetze, auf jedes dieſer Elemente wirke eine gleich große Kraft p nach einer Richtung; ſo werden ſie insgeſammt zu gleicher Zeit nach dieſer gemeinſchaftlichen Richtung mit gleicher Geſchwindigkeit fdt fortgehen, d. h. der ganze Körper wird dadurch eine fortgehende Bewegung erhalten, deren Geſchwindigkeit = fdt iſt.

§. 30.

In der Statik iſt §. 74. gezeigt worden, daß einem ſolchen Syſteme von Elementarkräften ihre Summe, nach eben der Richtung auf den Schwerpunkt des Körpers angebracht, äquipollent ſey, oder eben das thue, was durch alle dieſe Kräfte in Verbindung bewirkt wird.

Dieſe Kraft ſetzt alſo den Körper ebenfalls in eine fortgehende Bewegung, und ertheilt ihm eben die Geſchwindigkeit fdt, die ſeine Elemente, jedes durch die einzelne Kraft p getrieben, gemeinſchaftlich erhalten würden.

§. 31.

Da im vorhergehenden Falle (§. 29.) der Kräfte p ſo viele auf den Körper wirken müſſen, als gleiche Elemente m in ihm enthalten ſind, ſo iſt ihre Anzahl $= \frac{M}{m}$, folglich ihre Summe $= \frac{Mp}{m}$.

Demnach erhält der ganze Körper durch die Kraft $\frac{Mp}{m}$, die man auf ſeinen Schwerpunkt wirken läßt, die Geſchwindigkeit fdt, wofern man der Kraft p eben dieſe Wirkung auf das einfache Element m zueignet. Hieraus fließen folgende zwey Sätze:

§. 32.

I. Die Geſchwindigkeiten fdt und gdt, die zwey Kräfte P und Q einerley Maſſe im erſten Augenblicke der Wirkung ertheilen, wenn ſie auf den Schwerpunkt derſelben angebracht werden, verhalten ſich wie dieſe Kräfte.

Beweis. 1) Um einem Elemente m dieſer Maſſe die Geſchwindigkeit fdt zu ertheilen, ſey die Kraft p erforderlich, ſo iſt $P = \frac{Mp}{m}$, alſo $p = \frac{mP}{M}$.

2) Um eben dem Elemente die Geſchwindigkeit gdt zu ertheilen, ſey die Kraft q nöthig, ſo hat man: $Q = \frac{Mq}{m}$, alſo $q = \frac{mQ}{M}$; und außerdem iſt

3) $p : q = fdt : gdt$ §. 21.), folglich auch:

$$\frac{mP}{M} : \frac{mQ}{M} = fdt : gdt, \text{ oder:}$$

$$P : Q = fdt : gdt.$$

§. 33.

II. Zwey Kräfte P und Q, die verſchiedene Maſſen M und N einerley Geſchwindigkeit fdt ertheilen ſollen, müſſen mit dieſen Maſſen in einerley Verhältniſſe ſtehen.

Denn wenn die Kraft p eben dieſe Geſchwindigkeit fdt dem Elemente m ertheilt, ſo iſt $P = \frac{Mp}{m}$ (§. 31.), und $Q = \frac{Np}{m}$, alſo $P : Q = M : N$.

§. 34.

Lehrſatz. Wenn die Kraft P der Maſſe M im erſten Zeittheilchen dt die Geſchwindigkeit fdt, und die Kraft Q der Maſſe N in eben dem Zeittheilchen die Geſchwindigkeit gdt ertheilt, ſo iſt

$$P : Q = Mf : Ng.$$

Beweis. 1) Es erhalte die Maſſe M von einer dritten Kraft R die Geſchwindigkeit gdt, ſo iſt

$P : R = f : g$ (§. 32.); ferner iſt:

2) $R : Q = M : N$ (§. 33.), folglich

2) $P : Q = Mf : Ng.$

§. 35.

Wenn die Kraft P ihre Wirkung auf die Maſſe M ununterbrochen eine beſtimmte Zeit t hindurch fortſetzt, ſo bekommt dieſe dadurch die Geſchwindigkeit ft (§. 23.). Eben ſo bekommt die Maſſe N in eben der Zeit durch die Kraft Q die Geſchwindigkeit gt; nennen wir alſo erſtere $= u$, letztere $= v$, ſo wird:

$u : v = f : g$, folglich

$Mu : Nu = Mf : Ng$, mithin:

$Mu : Mv = P : Q$, oder:

$$u : v = \frac{P}{M} : \frac{Q}{N}.$$

welches ſo viel ſagen will:

Zwey Kräfte, die auf zwey verſchiedene Maſſen einerley Zeit hindurch fortdauernd wirken, ertheilen ihnen Geſchwindigkeiten, die ſich direkt wie die Kräfte, und verkehrt wie die Maſſen verhalten.

Von der Schwere und dem freyen Falle der Körper.

§. 36.

Um demnach beſtimmen zu können, welche Geſchwindigkeit ein Körper durch eine gegebene Kraft von Zeit zu Zeit erhalte, die ihn beſtändig nach einerley Richtung forttreibt, muß man zuvörderſt wiſſen, wie viel Maſſe der Körper in ſich vereinige. Dazu dient nun unſtreitig am angemeſſenſten ſein Gewicht, als das Aggregat aller der Kräfte, wodurch die einzelnen Elemente des Körpers vermöge ihrer Schwere vertikal herabwärts getrieben werden, der Menge ſeiner materiellen Theilchen, oder ſeiner ganzen Maſſe proportional iſt, ſo daß 1) zu gleichen Gewichten gleiche Maſſen gehören, und 2) bey Körpern von verſchiedenen Gewichten durch das Verhältniß derſelben zugleich das Verhältniß ihrer Maſſen angegeben wird.

§. 37.

Da das Gewicht des Körpers als eine einfache, auf ſeinen Schwerpunkt wirkende, Kraft betrachtet werden kann (Statik §. 75), ſo ertheilt es ihm, wofern keine Hinderniſſe auf ſeinem Wege anzutreffen ſind,

eine fortrückende Bewegung nach herabwärtsgehender vertikaler Richtung, die man das freye Fallen des Körpers nennt. Es iſt einleuchtend, daß dieſe Bewegung zu den gleichförmig beſchleunigten gehören müſſe, weil der Körper während derſelben in jedem Augenblicke der Wirkung der Schwere eben ſo ausgeſetzt iſt, wie er ſie im ruhenden Zuſtande, oder indem er getragen wird, durch den Druck äußert, den er gegen ſeine Unterlage ausübt. Auch ſtimmen hiermit alle Erfahrungen ſo genau überein, als es die Umſtände, unter denen ſie angeſtellt werden können, zulaſſen.

§. 38.

Wir wollen nun ſetzen, ein Körper, deſſen Maſſe $= M$, und deſſen Gewicht $= P$ iſt, falle im luftleeren Raume während einer Zeit t zu einer Tiefe $= y$ herab, und habe zu Ende dieſer Zeit die Geſchwindigkeit $= u$ bekommen; ein anderer Körper, deſſen Maſſe $= N$, und Gewicht $= Q$ iſt, falle in eben der Zeit t zu einer Tiefe $= Z$, und ſeine Geſchwindigkeit ſey alsdann $= v$, ſo iſt

1) nach den Geſetzen der gleichförmig beſchleunigten Bewegung (§. 15. 5.) $2y = ut$, $2z = vt$. Ferner

2) $u : v = \frac{P}{M} : \frac{Q}{N}$ (§. 35.), und

3) $P : M = Q : N$ (§. 36.), oder $\frac{P}{M} = \frac{Q}{N}$; daher $u = v$, und folglich auch $y = z$.

Hieraus folgt alſo: daß das freye Fallen der Körper von ihrer Maſſe unabhängig ſey, oder daß der eine

Körper in eben der Zeit eben ſo tief falle, als der andere. Durch Verſuche, deren Gründe ſich hier noch nicht erörtern laſſen, hat man gefunden, daß der Fallraum der Körper in der erſten Sekunde 15,09568 pariſer Fuß betrage, welches nach rheinl. Maaße ungefähr 15,625 Fuß ausmacht. Dieſen Raum wollen wir ins Künftige mit dem Buchſtaben g bezeichnen.

§. 39.

1. Ein Körper, der aus der Ruhe frey herabfällt, legt demnach in einer Zeit von t Sekunden den Raum $s = gt^2$ zurück, und erlangt zu Ende dieſer Zeit die Geſchwindigkeit $v = 2gt$ (§. 15.).

2. Hieraus wird $s = \frac{v^2}{4g}$, und gegenſeitig $v = 2\sqrt{gs}$. Es ſind alſo auch s und v von einander abhängig, oder wenn man weiß, wie tief ein Körper gefallen iſt, der Anfangs in Ruhe war, ſo beſtimmt dies zugleich die Geſchwindigkeit, die er zuletzt bekommen hat, ohne daß man dabey die Zeit des Fallens in Betracht zu ziehen braucht.

3. Wegen dieſer Beziehung zwiſchen s und v nennt man v, die **der Fallhöhe** s **zugehörige Geſchwindigkeit**, und gegenſeitig s die **der Geſchwindigkeit** v **zugehörige Fallhöhe.**

Anmerk. Man ſetze den Raum, durch den die Schwere den Körper in jedem Zeittheilchen dt fortbewegt, $= \varkappa dt^2$, ſo iſt dies die Tiefe, zu der er ſogleich im erſten dt herabſinkt. Um eben ſo viel ſinkt er alſo vermöge ſeiner Trägheit auch im zweyten dt, und wird zugleich von der Schwere noch um $\varkappa dt^2$ weiter getrieben, ſo daß er in dieſem Zeittheilchen

den Weg $2\varkappa dt^2$ zurücklegt. Auf gleiche Art iſt ſein Fallraum im dritten dt $= 3\varkappa dt^2$, und überhaupt im nten $= n\varkappa dt^2$, weil ihm die Schwere in jedem folgenden dt um $\varkappa dt^2$ weiter fortreibt.

Wenn man alle dieſe kleinen Räume zuſammennimmt, ſo erhält man für die Tiefe, zu der der Körper in der Zeit ndt herabgeſunken iſt, $\frac{n(n+1)}{2} \cdot \varkappa dt^2$. Dieſe ſetze man $= s$, und die Zeit ndt $= t$, ſo wird $n^2dt^2 = t^2$, alſo $s = \frac{1}{2}n^2\varkappa dt^2 + \frac{1}{2}n\varkappa dt^2 = \frac{1}{2}\varkappa t^2 + \frac{1}{2}\varkappa t dt$; wovon letzterer Theil gegen den erſtern wegfällt.

Da nun auch $s = gt^2$, ſo bekommt man $\varkappa = 2g$, mithin für den Raum, durch den die Schwere den Körper in jedem dt fortreibt, $2gdt^2$.

Aus dieſer Betrachtung erhellet, daß die Formel $s = gt^2$ nur alsdann vollkommen richtig ſey, wenn man berechtigt iſt, den Theil $\frac{1}{2}\varkappa t dt = gtdt$, als eine Größe, die ſich nicht angeben läßt, aus ihr wegzulaſſen. Geſetzt aber, es würde in der Folge einmal entdeckt, daß die Schwere eigentlich nicht kontinuirlich, ſondern von Zeit zu Zeit durch Impulſe auf den Körper wirke, ſo bekäme das Zeittheilchen dt einen endlichen, wenn gleich ſehr geringen, Werth, und die gedachte Formel bliebe alsdann ſelbſt für ein endliches t nicht mehr ganz richtig. Um wie viel ſie aber in dieſem Falle von der Wahrheit abweiche, ließe ſich leicht aus dem weggelaſſenen Gliede $gtdt$ beurtheilen.

§. 40.

Wenn der Körper in dem Augenblicke, wo er anfängt zu fallen, ſchon eine Geſchwindigkeit c nach vertikal herabwärts gehender Richtung hat, ſo erlangt er in der Zeit t die Geſchwindigkeit $c + 2gt$, und legt während derſelben den Raum $ct + gt^2$ zurück (§. 14.).

§. 41.

Aufgabe. Ein Körper wird in A mit der Ge-

ſchwindigkeit c vertikal aufwärts geworfen; man ſucht die Beſchaffenheit ſeiner Bewegung.

Aufl. 1) So lange der Körper ſteigt, wirkt ihm die Schwere beſtändig entgegen, und vermindert ſeine anfängliche Geſchwindigkeit in der Zeit t um 2gt.

2) Seine Geſchwindigkeit v zu Ende dieſer Zeit iſt alſo noch $= c - 2gt$, und die Höhe AP, zu der er dann geſtiegen iſt, $= ct - gt^2$.

3) Nach Verlauf der Zeit $t = \frac{c}{2g}$ iſt $v = 0$; alſo hört der Körper nun auf, ferner zu ſteigen, und hat folglich ſeine größte Höhe erreicht.

4) Dieſe Höhe iſt $= \frac{c^2}{4g}$, oder eben ſo groß, als die Fallhöhe, die der Geſchwindigkeit c zugehört (§. 39. 3.).

5) Seine fernere Bewegung iſt nun wieder ein natürliches Fallen, wodurch er in der Zeit t′ die Geſchwindigkeit $v' = 2gt'$ bekommt, und ſich von B um die Tiefe gt'^2 entfernt.

6) Um zu ſehen, mit welcher Geſchwindigkeit er wieder in P gelangt, ſetze man

$$gt'^2 = BP = \frac{c^2}{4g} - ct + gt^2, \text{ ſo wird:}$$

$$4g^2t'^2 = c^2 - 4cgt + 4g^2t^2 = (c - 2gt)^2.$$

alſo $2gt' = c - 2gt$, oder

Der Körper erhält alſo beym Herabfallen an jeder Stelle P eben die Geſchwindigkeit wieder, die er vorhin beym Heraufſteigen daſelbſt hatte.

7) Ferner hat man $t' = \frac{c}{2g} - t$. (6). Nun war $\frac{c}{2g}$ die Zeit, worin er bis B ſtieg; t die Zeit, worin er bis P ſtieg; folglich brachte er die Zeit $\frac{c}{2g} - t$ darauf zu, von P bis B zu ſteigen.

8) Die Zeiten alſo, worin der Körper von irgend einer Stelle P bis zu ſeiner größten Höhe ſteigt, und von da wieder bis zu P herabfällt, ſind ebenfalls einander gleich.

9) Aus No. 6. und 7. erhellet endlich, daß der Körper in A mit ſeiner anfänglichen Geſchwindigkeit c wieder anlangt, und eben die Zeit gebraucht hat, von A bis B zu ſteigen, als von B bis A herabzufallen.

Vergleichung anderer Kräfte mit der Schwere.

§. 42.

Die Wirkung der Schwere kennen wir alſo jetzt genau; wir wiſſen nemlich, daß ſie einen Körper in jedem Zeittheilchen dt durch den Raum $2gdt^2$ treibt, und ihm dadurch nach und nach eine gleichförmig beſchleunigte Bewegung ertheilt, wobey er in der erſten Sekunde den Raum g = 15,625 rheinl. Fuß zurücklegt.

Um nun auch die Wirkung jeder andern Kraft auf eine gegebene Maſſe zu beſtimmen, dürfen wir nur zwiſchen ihr und der Schwere eine Vergleichung anſtellen, oder überhaupt die Schwere als Maaß bey andern Kräf-

ten zum Grunde legen. Zu dem Ende ſoll ins Künftige das Gewicht der Maſſe = 1 zur allgemeinen Einheit der Kräfte dienen, wodurch Maſſe und Gewicht einerley wird: denn es ſey das Gewicht der Maſſe M = P, ſo iſt nach jener Feſtſetzung 1 : M = 1 : P (§. 36.), folglich P = M.

§. 43.

Aufgabe. Eine unveränderliche Kraft P wirkt fortdauernd auf den Schwerpunkt eines Körpers, deſſen Maſſe = M iſt, nach einerley Richtung, und ertheilt ihm alſo eine fortgehende gleichförmig beſchleunigte Bewegung. Man fragt, um wie viel der Körper in einer beſtimmten Zeit t fortrücke, und welche Geſchwindigkeit er zu Ende dieſer Zeit erlangt habe.

Aufl. 1) Man ſetze den geſuchten Raum = s, die Geſchwindigkeit = u, ſo iſt nach den Geſetzen der gleichförmig beſchleunigten Bewegung $s = \frac{1}{2}ut$ (§. 15. 5.).

2) Der Körper bekommt beym Fallen, oder durch die fortgeſetzte Wirkung ſeines eigenen Gewichtes M, in der Zeit t die Geſchwindigkeit 2gt. Setzt man alſo in §. 35. ſowohl die Maſſe N, als die Kraft Q = M, und $v = 2gt$, ſo erhält man:

$$u : 2gt = \frac{P}{M} : 1, \text{ oder}$$

$$u = \frac{2gPt}{M}.$$

3) Und daraus wird $s = \frac{1}{2}ut = \frac{gPt^2}{M}$.

4) Hat der Körper zu Anfange der Zeit t nach

der Richtung der Kraft ſchon eine Geſchwindigkeit $= c$, ſo wird zu Ende derſelben $u = c + \frac{2gPt}{M}$ (§. 14.).

5) Iſt dagegen die Richtung der anfänglichen Geſchwindigkeit c der Richtung der Kraft entgegengeſetzt, ſo wird die Bewegung des Körpers durch die Kraft verzögert, und es iſt nach Verlauf der Zeit t ſeine Geſchwindigkeit $u = c - \frac{2gPt}{M}$.

§. 44.

Aufgabe. Die Bewegung eines Körpers zu beſtimmen, der von einer ſchiefen Ebene herabgleitet. Fig. 2.

Aufl. 1) Das Gewicht des Körpers, das wir $= M$ ſetzen wollen, wirkt unmittelbar aus ſeinem Schwerpunkte o nach der Vertikale ov. Weil aber der Körper gezwungen iſt, ſich längs der ſchiefen Ebene CA zu bewegen, ſo zerlege man ſein Gewicht in zwey Kräfte P und Q nach den Richtungen op und oq, wovon erſtere mit der Ebene parallel, letztere ſenkrecht darauf iſt.

2) Setzt man den Neigungswinkel der Ebene $CAB = I$, ſo wird $P = M \operatorname{Sin} I$, $Q = M \operatorname{Cos} I$.

3) Letztere drückt gegen die Ebene ſenkrecht, und wird alſo dadurch aufgehoben, ſo daß ſie zur Bewegung des Körpers nichts beytragen kann.

4) Durch erſtere hingegen bekommt der Körper, weil ihre Richtung durch ſeinen Schwerpunkt geht, eine

fortgehende Bewegung, die zugleich wegen der Unveränderlichkeit der Kraft gleichförmig beſchleunigt iſt.

5 Man hat nun hier $\frac{P}{M}$ = Sin I; alſo durchläuft der Körper mit der Zeit t längs der Ebene den Raum gt^2 Sin I, und erlangt zu Ende dieſer Zeit die Geſchwindigkeit 2gt Sin I.

§. 45.

1. Indem der Körper auf der ſchiefen Ebene den Raum CA = gt^2 Sin I zurücklegt, ſinkt er zugleich unter den Anfangspunkt C ſeiner Bewegung zur Tiefe CB = CA Sin I = gt^2 Sin I^2. Zu eben der Tiefe würde er alſo auch in der Zeit t Sin I frey herabgefallen ſeyn, und würde dadurch in B eben die Geſchwindigkeit 2gt Sin I erlangt haben.

Ein Körper bekommt alſo einerley Geſchwindigkeit, wenn er zu irgend einer vertikalen Tiefe herabſinkt; er mag ſie entweder unmittelbar durchs Fallen, oder durch das Herabgleiten auf einer ſchiefen Ebene erreichen.

2. Es ſey z der Fallraum für eine gegebene Zeit t; s der Raum, durch den ein Körper in eben der Zeit längs der ſchiefen Ebene CA herabgleitet, ſo hat man z = gt^2, und s = gt Si I, folglich s z Sin I.

Man fälle aus B auf AC das Perpendikel BD, ſo iſt der Winkel DBC = CAB = I, alſo DC = BC Sin I. Setzt man daher BC = z, ſo wird DC = z Sin I = s.

Ein

Ein Körper legt auf der ſchiefen Ebene CA in eben der Zeit den Weg CD zurück, worin er durch den Raum BC herabfällt.

§. 46.

Fig. 3. **Aufgabe.** Ein Körper A, deſſen Maſſe = M iſt, liegt auf horizontalem Boden. Ein Faden, der in ſeinem Schwerpunkte befeſtigt iſt, und nach horizontaler Richtung über eine Rolle K geht, verbindet ihn mit einem Gewichte P, das frey an dem Faden herabhängt. Das Gewicht kann alſo nicht ſinken, ohne den Körper zugleich mit fortzuziehen; man fragt nun, was für eine Bewegung beyde bekommen werden, wofern ſich annehmen läßt, daß weder Friktion noch Widerſtand der Luft hierbey in Betracht kommen?

Aufl. 1) Das Gewicht des Körpers A wird durch die horizontale Fläche auf der er ſich befindet, aufgehoben; alſo wirkt bloß auf ihn die Kraft, womit der Faden geſpannt iſt. Es ſey dieſe = T, ſo durchläuft der Körper mit gleichförmig wachſender Geſchwindigkeit in der Zeit t den Raum $\frac{gTt^2}{M}$ (§. 43.).

2) Auf die herabhängende Maſſe wirken hingegen zwey Kräfte zugleich: ihr Gewicht = P, und nach entgegengeſetzter Richtung die Spannung des Fadens = T, alſo bleibt ihr zum Herabſinken noch die Kraft P — T übrig.

3) Vermöge dieſer Kraft gelangt ſie mit gleich-

förmig zunehmender Geſchwindigkeit in der Zeit t zu einer Tiefe $= gt^2 \left(\frac{P - T}{P}\right) = gt^2 \left(1 - \frac{T}{P}\right)$.

4) Da nun Körper und Gewicht wegen ihrer Verbindung in einerley Zeit um gleich viel fortrücken müſſen, ſo hat man:

$$gt^2 . \left(1 - \frac{T}{P}\right) = \frac{gt^2 T}{M} \text{ oder}$$

$$1 - \frac{T}{P} = \frac{T}{M}.$$

5) Daher wird $1 = T\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{P}\right) = \frac{T(M+P)}{MP}$; folglich $T = \frac{MP}{M+P}$.

6) Alſo der Raum, den beyde in der Zeit t zurücklegen, $= \frac{gTt^2}{M} = \frac{gPt^2}{M+P}$, und die Geſchwindigkeit beyder zu Ende dieſer Zeit $= \frac{2gPt}{M+P}$.

§. 47.

Unter den Hinderniſſen, die die eben betrachtete Bewegung verzögern können, iſt das Reiben zwiſchen der Grundfläche des Körpers A, und dem Boden, worauf er fortgezogen wird, das beträchtlichſte. Setzt man dies $= \lambda M$, und betrachtet den Coefficienten λ als unveränderlich, ſo iſt $T - \lambda M$ die Kraft, die den Körper nach horizontaler Richtung forttreibt, folglich

der Raum, den er in der Zeit t zurücklegt, $= gt^2 . \left(\frac{T - \lambda M}{M}\right)$. Man erhält alſo jetzt:

$$1 - \frac{T}{P} = \frac{T}{M} - \lambda, \text{ oder}$$

$$1 + \lambda = \frac{T}{M} + \frac{T}{P} = \frac{T(M+P)}{MP}, \text{ folglich:}$$

$$T = \frac{(1+\lambda)MP}{M+P}.$$

Nennt man daher S den Raum, um den die Maſſe M in der Zeit t fortrückt, oder das Gewicht P herabſinkt, ſo wird: $S = \left(\frac{(1+\lambda)P}{M+P} - \lambda\right) . gt^2 = \left(\frac{P - \lambda M}{M+P}\right) gt^2$.

§. 48.

Aus dieſer Formel erhält man gegenſeitig:

$$\lambda = \frac{P}{M} - \frac{(M+P)S}{gMt^2}.$$

Wird alſo die Zeit genau beobachtet, in der das Gewicht P zu einer beſtimmten Tiefe S herabſinkt, ſo läßt ſich daraus beſtimmen, wie viel der Reibungskoefficient λ bey wirklichen Bewegungen betrage.

Exempel. $M = 25\frac{3}{4}$ ℔, $P = 7$ ℔, $s = 55$ engl. Zoll, oder nach rheinl. Maaße $= 4{,}4515$ Fuß, $t = 4''$, giebt

$$\lambda = \frac{28}{103} - \frac{4{,}4515 \times 131}{15{,}625 \times 103 \, . \, 16} = 0{,}2718 - 0{,}0226 = 0{,}2492,$$ alſo beynahe $\lambda = \frac{1}{4}$.

Dies Exempel iſt aus Herrn **Vince's** Abhandlung über die Friktion bewegter Körper genommen, die in den Phil. tranſactions. Vol. 75. pag. 176. ſteht. Es ſind daſelbſt eine Menge anderer Verſuche dieſer Art angegeben, doch ohne weitere Nachricht, aus welchen Materien die Körper, die zu dieſen Verſuchen gewählt wurden, beſtanden. Die Abſicht des Verfaſſers ſcheint auch eigentlich nur geweſen zu ſeyn, zu beſtimmen, ob die Friktion während der Bewegung unveränderlich ſey, oder zugleich von der Geſchwindigkeit abhänge. Nach ihm iſt die erſtere Vorausſetzung allgemein richtig: denn er verſichert, daß bey einerley M und P der Raum s ſich jedesmal genau wie das Quadrat der Zeit t verhalten habe, wiewohl er die Belege zu dieſen Reſultaten nicht beſonders mitgetheilt hat.

§. 49.

Stat. Fig. 38. **Aufgabe.** An einem Faden, der über eine Rolle C geht, hängen auf beyden Seiten zwey ungleiche Gewichte P und Q. Man ſucht, wie das größere Gewicht Q ſinken wird.

Aufl. 1) Es ſey die Spannung des Fadens = T, ſo ſtrebt das Gewicht Q mit der Kraft Q — T zu ſinken, und das Gewicht P wird mit der Kraft T — P in die Höhe gezogen.

2) Da dieſe Kräfte unveränderlich ſind, ſo erhalten beyde Gewichte eine gleichförmig beſchleunigte Bewegung, und zwar ſinkt erſteres in der Zeit t zur Tiefe

$gt^2 . (\frac{Q-T}{Q})$ herab, und letzteres ſteigt in eben der Zeit um $gt^2 . (\frac{T-P}{P})$ in die Höhe.

3) Dieſe Räume müſſen nun, weil die Gewichte mit einander verbunden ſind, gleich groß ſeyn; alſo hat man

$$\frac{Q-T}{Q} = \frac{T-P}{P}, \text{ oder}$$

$$PQ - PT = QT - PQ.$$

4) Daher wird $(P-Q)\ T = 2PQ$, folglich $T = \frac{2PQ}{P+Q}$.

5) Subſtituirt man dieſen Werth für T in den Ausdrücken (2), ſo wird der Raum s, durch den das Gewicht P in der Zeit t herauf, und das Gewicht Q herabſteigt, $= (\frac{P-Q}{P+Q}) gt^2$.

Exempel. Es ſey P = 18 ℔, Q = 22 ℔, ſo wird $s = \frac{4}{40} gt^2 = \frac{1}{10} gt^2$. Die Tiefe alſo, wozu das ſchwere Gewicht in der erſten Sekunde herabſinkt, iſt $= \frac{1}{10} g = 1,5625$ rheinl. Fuß.

Von den veränderlichen Kräften.

§. 50.

Aufgabe. Auf den Schwerpunkt einer gegebenen Maſſe M wirke fortdauernd nach einerley Richtung eine veränderliche Kraft P, die entweder von der dabey

verfloſſenen Zeit, oder von dem Raume abhängen mag, den die Maſſe während derſelben zurückgelegt hat; man ſucht ihre Bewegung.

Aufl 1) Es ſey der Raum, den die Maſſe in der Zeit t durchlaufen iſt, $= x$, die Geſchwindigkeit, die ſie zu Ende dieſer Zeit bekommen hat, $= v$, ſo iſt zuvörderſt $v = \frac{dx}{dt}$ (§. 11.). Es kommt alſo nur darauf an, für jede Zeit t den Werth von v zu beſtimmen.

2) Da ſowohl die Kraft P, als die Geſchwindigkeit v von der Zeit t abhängt, ſo leiden beyde mit ihr zugleich Aenderungen. Wir wollen ſetzen, die Kraft P bekomme für die Aenderung der Zeit $= \Delta t$ den Zuwachs $= \Delta P$, die Geſchwindigkeit den Zuwachs $= \Delta v$, ſo iſt erſterer nach Verlauf der Zeit $t + \Delta t = P + \Delta P$, letztere $= v + \Delta v$.

3) Bliebe die Kraft P während des Zeittheils Δt ungeändert, ſo würde der Körper von dem Augenblicke an, wo er die Geſchwindigkeit v hat, mit gleichförmig beſchleunigter Bewegung fortgehen, und würde nach Verlauf der Zeit Δt die Geſchwindigkeit $v + \frac{2gP\Delta t}{M}$ erhalten (§. 43. 4.).

4) Dieſe muß alſo nothwendig geringer als $v + \Delta v$ ſeyn, weil die Kraft während Δt noch gewachſen iſt. Man hat folglich:

$$\Delta v > \frac{2gP\Delta t}{M}, \text{ oder}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} > \frac{2gP}{M}.$$

5) Wäre dagegen der Körper von eben dem Augenblicke an die Zeit Δt über der beſtändigen Wirkung der Kraft $P + \Delta P$ ausgeſetzt, ſo bekäme er am Ende derſelben die Geſchwindigkeit $v + \frac{2g(P + \Delta P)\Delta t}{M}$.

6) Offenbar iſt dieſe größer als $v + \Delta v$: denn die Kraft, die den Körper während Δt beſchleunigt, iſt ja erſt zu Ende dieſer Zeit zu $P + \Delta P$ völlig angewachſen, folglich innerhalb Δt beſtändig geringer als $P + \Delta P$. Man hat alſo ferner:

$$\Delta v < \frac{2g(P + \Delta P)\Delta t}{M}, \text{ oder}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} < \frac{2g(P + \Delta P)}{M}.$$

7) Der Quotient $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ liegt daher ſtets innerhalb der Grenzen $\frac{2gP}{M}$ und $\frac{2g(P + \Delta P)}{M}$, und iſt folglich von $\frac{2gP}{M}$ weniger verſchieden, als um $\frac{2g\Delta P}{M}$.

8) Man laſſe nun Δt unendlich abnehmen, ſo nimmt zugleich ΔP, folglich auch $\frac{2g\Delta P}{M}$ unendlich ab; alſo nähert ſich $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ unendlich der Grenze $\frac{2gP}{M}$, weil beyder Unterſchied allemal geringer als $\frac{2g\Delta P}{M}$ iſt, mithin ebenfalls eine unendliche Abnahme leiden muß.

9) Zugleich aber nähert ſich auch bey eben der Vorausſetzung $\frac{\Delta v}{dt}$ unendlich der Grenze $\frac{dv}{dt}$; daher wird

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2gP}{M}.$$

10) Man erhält demnach durch Integrirung dieſer Gleichung:

$$v = C + \frac{2g}{M}\int P dt$$

11) Es bleibt noch der Fall zu betrachten übrig, wo die Kraft P nach und nach abnimmt, alſo für die Zeit $t + \Delta t = P - \Delta P$ wird. Dieſe Vorausſetzung giebt

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} < \frac{2gP}{M}, \text{ und}$$
$$\frac{\Delta v}{\Delta t} < \frac{2g(P - \Delta P)}{M};$$

woraus wieder eben die Gleichung $\frac{dv}{dt} = \frac{2gP}{M}$ auf die nemliche Weiſe, wie (7) und (8), ſich herleiten läßt.

§. 51.

1. Da $v = \frac{dx}{dt}$, ſo wird $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$. Dieſer Werth für $\frac{dv}{dt}$ in der eben gefundenen Gleichung ſubſtituirt, giebt alſo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2gP}{M}.$$

eine Gleichung zwiſchen x, P und t, worin man x und P als Funktionen von t betrachtet, oder nach dem

gewöhnlichen Sprachgebrauch: worin dt als beſtändig angenommen wird.

2. Es ſey h die der Geſchwindigkeit v zugehörige Fallhöhe (§. 39. 3.), ſo hat man $h = \frac{v^2}{4g}$, und wenn auf beyden Seiten differenzirt wird: $dh = \frac{vdv}{2g}$.

Nun iſt $v = \frac{dx}{dt}$, und $dv = \frac{2gPdt}{M}$, alſo $vdv = \frac{2gPdx}{M}$; folglich wird: $dh = \frac{Pdx}{M}$, oder

$$Mdh = Pdx.$$

Dieſe Gleichung iſt in manchen Fällen, vorzüglich da, wo die Kraft P unmittelbar von x abhängt, leichter anzuwenden, als die vorige.

§. 52.

Exempel. Wenn wir nach dem allgemeinen Geſetze der Gravitation annehmen, daß das Gewicht eines Körpers in einerley Vertikale ſich verkehrt, wie das Quadrat ſeiner Entfernung vom Mittelpunkte der Erde verhalte, ſo treibt ihn während ſeines Fallens eine veränderliche Kraft, die nach und nach zunimmt, ſo wie der Körper zu einer größern Tiefe gelangt. Es ſey nemlich nach dieſer Vorausſetzung der Halbmeſſer der Erde $= a$, das Gewicht der Maſſe M in der Entfernung z von ihrem Mittelpunkte $= P$, an ihrer Oberfläche, oder für $z = a$, $= M$, wie im §. 42. feſtgeſetzt iſt, ſo erhält man $P : M = a^2 : z^2$, alſo $\frac{P}{M} = \frac{a^2}{z^2}$.

Man ſetze nun, der Körper befinde ſich Anfangs über der Oberfläche der Erde in einer Höhe $= f$, ſo iſt daſelbſt ſeine Entfernung von ihrem Mittelpunkte $= a + f$. Nachdem er zur Tiefe $= x$ herabgefallen iſt, gehöre ſeine Geſchwindigkeit der Fallhöhe $= h$ zu, ſo wird $z = a + f - x$, alſo: $dz = - dx$, folglich

$$dh = - \frac{Pdz}{M} = - \frac{a^2 dz}{z^2}$$

$$h = C + \frac{a^2}{z}$$

Für $z = a + f$ war des Körpers Geſchwindigkeit, folglich auch h, $= 0$, alſo wird $C = \frac{- a^2}{a + f}$, oder

$$h = \frac{a^2}{z} - \frac{a^2}{a + f}.$$

Wenn der Körper den Boden erreicht, ſo iſt $z = a$. Es werde alsdann $h = H$, ſo bekommt man

$$H = a - \frac{a^2}{a + f} = \frac{af}{a + f}.$$

Die gewöhnliche Vorausſetzung, daß in jeder Höhe $\frac{P}{M} = 1$ ſey, giebt nun $H = f$; alſo um $f - \frac{af}{a + f} = \frac{f^2}{a + f}$ zu groß. Daß dieſe Abweichung auf jeden Fall außer Acht gelaſſen werden könne, wird folgendes Beyſpiel zeigen:

Ein Aeroſtat ſey über der Oberfläche der Erde zu einer Höhe von 1500 Toiſen hinaufgeſtiegen. Man läßt aus ihm ein Gewicht von dieſer Höhe herabfallen; es fragt ſich, mit welcher Geſchwindigkeit dies den Boden treffen werde?

Hier iſt $f = 1500$, und wenn man für a den mittlern Werth = 3275000 Toiſen annimmt; $\frac{f^2}{a+f}$ $= \frac{22500}{32765} = 0,687$; alſo H = 1499,313 Toiſen = 8995,878 Fuß, und die geſuchte Geſchwindigkeit = $\sqrt{4gH} = 749,828$ Fuß. Dagegen gehört zur Höhe f die Geſchwindigkeit $\sqrt{4gf} = 750,000$ Fuß

Differenz = 0,172 Fuß

die noch kein $\frac{1}{4000}$ von letzterer ausmacht.

§. 53.

Wenn im §. 50. der Körper Anfangs eine Geſchwindigkeit c gegen die Richtung der Kraft P hat, ſo wird ſeine Bewegung durch die Kraft verzögert: er behält aber dabey ſeine anfängliche Richtung ſo lange, als ihm noch eine Geſchwindigkeit nach derſelben übrig bleibt.

1) Sie ſey nach Verlauf der Zeit $t = v$; im nächſten Δt ändere ſie ſich um Δv, ſo wird ſie für $t + \Delta t$ $= v + \Delta v$.

2) Eben ſo wird die Kraft für $t + \Delta t = P + \Delta P$, wo ΔP entweder poſitiv oder negativ iſt, je nachdem P mit zunehmenden t wächſt oder abnimmt.

3) Bliebe die Kraft während des Zeittheils Δt unverändert, ſo litte unterdeß v eine gleichförmige Abnahme, und würde zu Ende dieſes Zeittheils $= v - \frac{2gP\Delta t}{M}$ (§. 43.)

4) Wirkte dagegen dieſe Zeit hindurch beſtändig die Kraft $P + \Delta P$ der Bewegung entgegen, ſo würde die Geſchwindigkeit zu Ende derſelben $= v - \frac{2g(P + \Delta P)\Delta t}{M}$.

5) Folglich fällt $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ innerhalb der Grenzen $-\frac{2gP}{M}$ und $-\frac{2g(P + \Delta P)}{M}$, und nähert ſich erſterer Grenze unendlich, wenn man Δt unendlich abnehmen läßt.

6) Daher hat man $\frac{dv}{dt} = -\frac{2gP}{M}$, oder

$Mdv = -2gPdt$; alſo

$Mv = \text{Conſt} - 2g\int Pdt$

wo das Integral $\int Pdt$ ſo genommen werden muß, daß es für $t = o$ verſchwindet.

7) Nun iſt für $t = o$, $v = c$; alſo $\text{Conſt} = Mc$, mithin:

$$Mv = Mc - 2g\int Pdt.$$

§. 54.

Es ſeyen H, h die den Geſchwindigkeiten c, v zugehörigen Fallhöhen, oder $H = \frac{c^2}{4g}$, $h = \frac{v^2}{4g}$, ſo wird $dh = \frac{vdv}{2g}, = -\frac{Pdt}{M}.\frac{dx}{dt} = -\frac{Pdx}{M}$, folglich

$$Mh = C - \int Pdx,$$

und da für $x = o$, $v = c$, oder $h = H$ iſt, ſo erhält man $C = MH$, wofern das Integral $\int Pdx$

ſo genommen wird, daß es für $x = 0$ verſchwindet; daher endlich:

$$Mh = MH - \int P dx.$$

Drittes Kapitel.

Von der fortgehenden Bewegung der Körper in krummen Linien.

§. 55.

Stat. Fig. 8. Der Schwerpunkt C eines Körpers bekomme durch die augenblickliche Wirkung einer Kraft p nach der Richtung CA die Geſchwindigkeit $u = CA$, oder werde durch ſie in eine gleichförmige Bewegung geſetzt, wobey er durch dieſen Raum in einer Sekunde fortgeht (§. 8.); eine andere Kraft q ertheile ihm für ſich allein nach der Richtung CB die Geſchwindigkeit $v = CB$; ich behaupte, beyde Kräfte in Verbindung werden den Punkt nach der Diagonale CD des Parallelograms ACBD forttreiben, und ihm eine Geſchwindigkeit geben, womit er in einer Sekunde den Weg CD zurücklegt.

Beweis. 1) Da zwey Kräfte ſich wie die Geſchwindigkeiten verhalten, die ihnen einerley Maſſe im erſten Augenblicke ihrer Wirkung ertheilen (§. 32.), ſo iſt hier $p : q = u : v$, oder, wenn man CA ſtatt u, und CB ſtatt v ſetzt, $p : q = CA : CB$.

2) Die Seiten des Parallelograms ACBD ſind alſo den Kräften p und q proportional, und die Richtung der mittlern Kraft, die ihnen äquipollent iſt, geht folglich nach der Diagonale CD dieſes Parallelograms.

3) Setzt man dieſe mittlere Kraft $= r$, ſo iſt außerdem

$$p : q : r = CA : CB : CD,$$

und wenn w die Geſchwindigkeit heißt, die der Punkt C durch ſie erhält,

$$p : q : r = u : v : w,$$

$$\text{folglich } w = CD.$$

4) Weil nun r den Kräften p und q äquipollent iſt, ſo iſt ihre einfache Wirkung mit der zuſammengeſetzten Wirkung beyder einerley. Die Kräfte p und q bewirken alſo in Verbindung, daß der Punkt nach der mittlern Richtung CD fortgeht, und eine Geſchwindigkeit $w = CD$ annimmt.

§. 56.

Folgerung. 1. Wenn alſo ein Punkt zu gleicher Zeit zwey Geſchwindigkeiten u und v nach zweyen verſchiedenen Richtungen CA und CB erhält, ſo bewegt er ſich nach einer mittlern Richtung CD mit einer mittlern Geſchwindigkeit w, die beyde folgendermaßen beſtimmt werden:

$$w = \sqrt{(u^2 + 2uv \text{ Cos } ACB + v^2)}, \text{ und}$$

$$\text{tang } ACD = \frac{v \text{ Sin } ACB}{u + v \text{ Cos } ACB}.$$

2. Gegenſeitig: wenn ein Punkt ſich nach der

Richtung CD mit einer Geſchwindigkeit w bewegt, ſo kann man dieſe als eine Zuſammenſetzung zweyer andern Geſchwindigkeiten u und v nach den Richtungen CA und CB anſehen, und man hat für dieſe Vorausſetzung (Stat. §. 55.): $u = \frac{w \text{ Sin } BCD}{\text{Sin } ACB}$, und $v = \frac{w \text{ Sin } ACD}{\text{Sin } ACB}$.

3. Es laſſen ſich demnach Geſchwindigkeiten, wie Kräfte, zuſammenſetzen und zerlegen.

§. 57.

Hieraus wird nun begreiflich, wie eine Kraft mit der bisher betrachteten Wirkungsart, die Geſchwindigkeit eines Körpers zu ändern, noch eine zweyte verbinden könne, ihn zugleich von ſeiner Richtung abzulenken. Fig. 4. Man ſetze: der Körper habe in dem eben verfloſſenen Zeittheile Δt mit einer vorhin erhaltenen Geſchwindigkeit u den Raum fm $= u\Delta t$ zurückgelegt, und ſey jetzt im Begriff das nächſte Δt hindurch vermöge ſeiner Trägheit einen eben ſo großen Raum mo nach eben der Richtung zu durchlaufen; es wirke aber auf ihn in m eine Kraft nach einer Richtung mp, die von der ſeinigen verſchieden iſt, nnd ertheile ihm nach dieſer eine Geſchwindigkeit v. Der Erfolg hiervon wird ſeyn, daß der Körper nach keiner von beyden Richtungen, weder nach mo, die er vorhin hatte, noch nach mp, wohin ihn die Kraft treibt, fortgeht, ſondern ſtatt deren eine mittlere Richtung, und eine Geſchwindigkeit be-

kommt, die aus u und v zuſammengeſetzt iſt. Macht man nemlich mp $= v\Delta t$, ſo ſind mo und mp die Räume, die er in einerley Zeit, erſtern vermöge ſeiner Trägheit, letztern vermöge der Wirkung der Kraft, durchlaufen würde; er nimmt alſo ſeinen Weg nach der Diagonale mn des Parallelograms monp, und beſchreibt in derſelben Zeit Δt das Stück mn, ſo daß alſo ſowohl ſeine Richtung, als ſeine Geſchwindigkeit durch die Kraft verändert wird.

§. 58.

Aufgabe. Auf den Schwerpunkt eines Körpers, deſſen Maſſe $= M$ iſt, wirken fortdauernd drey Kräfte P, Q und R nach Richtungen, die beſtändig mit den dreyen auf einander ſenkrechten Linien OA, OB und OC parallel ſind. Man ſucht für eine gegebene Zeit t ſeinen Ort, und die Geſchwindigkeit an demſelben.

Fig. 5. **Aufl.** 1) Es ſey zu Anfange der Bewegung der Schwerpunkt des Körpers in A, nach Verlauf der Zeit t in m, und ſeine Geſchwindigkeit daſelbſt $= v$. Um die Lage des Punktes m zu beſtimmen, fälle man aus ihm auf die Ebene AOB das Perpendikel mq, und aus q auf OA, in dieſer Ebene ſelbſt, das Perpendikel qp, und ſetze die drey rechtwinklichten Koordinaten $Op = x$, $pq = y$, $qm = z$. Außerdem ſey noch der durchlaufene Raum des Körpers $Om = s$; ſo ſind x, y, z, s und v Größen, die ſich mit der Zeit t zugleich ändern, alſo von dieſer gemeinſchaftlich abhängen;

gen; ſo wie dies auch bey den Kräften P, Q und R der Fall ſeyn mag.

2) Wenn daher in zweyen folgenden gleich großen Zeittheilchen Δt der Schwerpunkt des Körpers aus m nach m′ und m″ fortrückt, ſo wachſen die Größen x, y z und s im nächſten Δt um Δx, Δy, Δz und Δs, und im folgenden Δt um $\Delta(x + \Delta x) = \Delta x + \Delta^2 x$, $\Delta y + \Delta^2 y$, $\Delta z + \Delta^2 z$ und $\Delta s + \Delta^2 s$. Zugleich iſt im m′ die Geſchwindigkeit des Körpers $= v + \Delta v$; und die drey Kräfte P, Q und R werden daſelbſt $= P + \Delta P$, $Q + \Delta Q$ und $R + \Delta R$.

3) Man nehme zuerſt an: dieſe Kräfte wirken von Zeit zu Zeit durch Impulſe auf den Körper, und zwar jedesmal zu Anfange eines Zeittheils Δt, oder in den einzelnen Punkten ſeines Weges m, m′, m″ u. ſ. w.; ſo durchläuft der Körper jeden der kleinen Räume mm′, m′m″ u. ſ. w. gleichförmig, und nach einerley Richtung; es wird alſo $\Delta s = v\Delta t$, $\Delta s' = v'\Delta t$, oder $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, $v' = \frac{\Delta s'}{\Delta t}$.

4) Zerlegt man demnach die Geſchwindigkeit v in eine nach mv, der Verlängerung von qm, oder parallel mit OC, und in eine darauf ſenkrechte nach mr, ſo wird erſtere $= \frac{\Delta s}{\Delta t} \operatorname{Sin} m'mr = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{mv}{mm'} = \frac{\Delta z}{\Delta t}$, letztere $= \frac{\Delta s}{\Delta t} \operatorname{Cos} m'mr = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{mr}{mm'} = \frac{mr}{\Delta t} = \frac{qq'}{\Delta t}$, welche noch in eine nach qo, oder parallel mit OA $= \frac{qq'}{\Delta t}$.

$\text{Cos } q'qo = \frac{qq'}{\Delta t} \cdot \frac{qo}{qq'} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, und in eine, parallel mit OB, $= \frac{qq'}{\Delta t} \text{ Sin } q'qo = \frac{qq'}{\Delta t} \cdot \frac{oq'}{qq'} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$ zerfällt.

5) Eben ſo giebt die Geſchwindigkeit v' nach den mit OA, OB und OC parallelen Richtungen die drey Geſchwindigkeiten: $\frac{\Delta x'}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y'}{\Delta t}$, und $\frac{\Delta z'}{\Delta t}$.

6) Alſo ändern ſich die Geſchwindigkeiten $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ und $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ die der Körper nach den drey Richtungen OA, OB und OC hat, während er ſich durch mm' bewegt, im nächſten Δt in $\frac{\Delta x'}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y'}{\Delta t}$ und $\frac{\Delta z'}{\Delta t}$ um.

7) Hätte in m keine Kraft auf ihn gewirkt, ſo würde er in dieſem folgenden Zeittheile vermöge ſeiner Trägheit eben den Raum Δs nach eben der Richtung mm' zurückgelegt haben; es würden daher auch ſeine Geſchwindigkeiten nach OA, OB, OC noch dieſelben geblieben ſeyn. Die Aenderungen alſo, die ſie in m erleiden, ſind bloß Wirkungen der Kräfte $P + \Delta P$, $Q + \Delta Q$, $R + \Delta R$, die den Körper nach dieſen Richtungen daſelbſt aufs neue beſchleunigen.

8) Daher ſind die Unterſchiede $\frac{\Delta x'}{\Delta t} - \frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y'}{\Delta t} - \frac{\Delta y}{\Delta t}$ und $\frac{\Delta z'}{\Delta t} - \frac{\Delta z}{\Delta t}$, oder $\frac{\Delta^2 x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta t}$ und $\frac{\Delta^2 z}{\Delta t}$, die

Geſchwindigkeiten, die der Körper in m durch jene Kräfte unmittelbar bekommen hat.

9) Geſetzt nun, die Schwere wirkte beym Fallen der Körper auf eben die Art, wie vorhin (3) angenommen iſt, ſo ertheilte ſie bey jedem Impulſe dem Körper die Geſchwindigkeit $= 2g\Delta t$ (§. 39. Anmerk.); dem zu Folge ertheilen ihm alſo die Kräfte $P + \Delta P$, $Q + \Delta Q$ und $R + \Delta R$ nach ihren Richtungen die Geſchwindigkeiten $\frac{2g\Delta t\,(P + \Delta P)}{M}$, $\frac{2g\Delta t\,(Q + \Delta Q)}{M}$ und $\frac{2g\Delta t\,(R + \Delta R)}{M}$.

10) Da dieſe mit den vorigen (8) einerley ſeyn müſſen, ſo erhält man

$$\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2} = \frac{2g\,(P + \Delta P)}{M},$$
$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta t^2} = \frac{2g\,(Q + \Delta Q)}{M},$$
$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta t^2} = \frac{2g\,(R + \Delta R)}{M}.$$

11) Wegen der Bedingung, daß die Kräfte P, Q und R kontinuirlich auf den Körper wirken ſollen, ſind nun dieſe Gleichungen allemal fehlerhaft, ſo bald man dem Zeittheile Δt irgend einen beſtimmten Werth beylegt; man ſieht aber leicht, daß ſie der Wahrheit deſto näher kommen müſſen, je kleiner man darin Δt annimmt.

12) Daraus folgt demnach, daß man die völlig richtigen Gleichungen der Aufgabe erhalte, wenn man

für die Ausdrücke, die in jenen vorkommen, die Grenzen ſubſtituirt, denen ſie ſich bey unendlicher Abnahme von Δt unendlich nähern. Daher wird

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{2gP}{M},\ \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{2gQ}{M},\ \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{2gR}{M},$$ und außerdem bekommt man (3) $v=\frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{dt}$, woraus ſich alles herleiten läßt, was man von der Bewegung des Körpers zu wiſſen verlangt.

§. 59.

1. Da die Punkte m, m′, m″ unendlich nahe zuſammenrücken, ſo ändert der Schwerpunkt des Körpers jeden Augenblick ſeine Richtung, und bewegt ſich alſo in einer Linie, von der kein Theil, ſo klein man ihn auch annehmen mag, gerade iſt; d. h. er beſchreibt eine Kurve. Die Beſchaffenheit dieſer Kurve zu finden, dienen die drey erſten Gleichungen (12), die zu der Abſicht durch gegenſeitige Verbindung auf zwey andere zurückgeführt werden müſſen, worin bloß die drey Koordinaten x, y und z vorkommen.

2) Aus der Gleichung für die Geſchwindigkeit des Körpers:

$$v^2=\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}$$

erhält man durchs Differenziiren:

$$vdv=\frac{dxd^2x}{dt^2}+\frac{dyd^2y}{dt^2}+\frac{dzd^2z}{dt^2},$$

und darin für $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ die Werthe aus (12) ſubſtituirt, giebt

$$v dv = \frac{2g}{M}(Pdx + Qdy + Rdz);$$

woraus ſich v für jeden Ort des Körpers vermittelſt der Koordinaten x, y und z beſtimmen läßt.

3. Bezeichnete man durch x, y und z die Räume, die der Körper während der Zeit t nach OA, OB oder OC zurücklegen würde, wenn ihn die Kraft P, Q oder R allein fortriebe, ſo bekäme man für die Aenderungen dieſer Räume (§. 51. 1.) eben die Gleichungen, wie im §. 58. 12. Hieraus erhellet alſo, daß von den drey Kräften jede einzeln genommen nach ihrer Richtung eben die Wirkung auf den Körper hervorbringt, als wenn die andern beyden gar nicht vorhanden wären.

4. Für den einfachern Fall, wo auf den Körper nur zwey Kräfte P und Q während ſeiner Bewegung wirken, deren Richtungen in der Ebene AOB liegen, und mit OA und OB parallel ſind, wird $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$, alſo $\frac{dz}{dt} = c$. Wofern nun die Richtung der anfänglichen Bewegung des Körpers gleichfalls in die Ebene AOB fällt, ſo iſt $c = 0$, alſo $\frac{dz}{dt} = 0$, und folglich auch $z = 0$, weil ſich der Körper zu Anfange in O befindet. Daher liegt alsdann die ganze Bahn des Körpers in dieſer Ebene, oder iſt eine Kurve von einfacher Krüm-

mung, die bloß durch eine Gleichung zwiſchen den beyden Koordinaten x und y beſtimmt wird.

5. Für ſeine Geſchwindigkeit hat man in dieſem Falle

$$v dv = \frac{2g}{M}(Pdx + Qdy).$$

Bewegung des Körpers auf vorgeſchriebenem Wege.

§. 60.

Fig. 6. Es ſey AMD ein gekrümmter Kanal in einer horizontalen, oder andern beliebigen Ebene ABD; ein Körper, deſſen Maſſe = M iſt, bekomme in A die Geſchwindigkeit = c nach der anfänglichen Richtung des Kanales, und bewege ſich nun, ohne daß äußere Kräfte weiter auf ihn wirken, innerhalb demſelben fort.

Da der Körper gezwungen iſt, ſeinen Weg nach der Kurve AMD zu nehmen, ſo übt er fortdauernd einen Druck ſenkrecht gegen die Wand des Kanales aus, und leidet alſo von dieſer einen eben ſo großen Gegendruck, wovon wir annehmen wollen, daß ſeine mittlere Richtung durch den Schwerpunkt des Körpers gehe, ſo daß deſſen Bewegung längs dem Kanale beſtändig fortgehend bleibt.

Man ſetze dieſen Druck für irgend eine Stelle M, wohin der Körper nach Verlauf einer Zeit t gelangt ſeyn mag, = Π, und zerlege ihn, da er nach der Normale Mr gerichtet iſt, in einen nach Mo, parallel mit

$AB, = \Pi \text{ Cos } rMo = \Pi \text{ Sin } mMo = \Pi . \frac{dy}{ds}$, und in einen darauf ſenkrechten nach $MP = \Pi \text{ Cos } mMo = \Pi . \frac{dx}{ds}$, ſo hat man hier

$$P = \frac{\Pi dy}{ds},\ Q = -\frac{\Pi dx}{ds},\ R = o,\ \text{alſo}$$

$$\frac{d\,x}{dt^2} = \frac{2g\Pi dy}{Mds},\ \text{und}\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2g\Pi dx}{Mds}.$$

Ferner (§. 59. 5.) $vdv = \frac{2g\Pi}{M}(dxdy - dxdy)$ $= o$, mithin $\frac{1}{2}v^2 = A$, $v = \sqrt{2A} = c$.

Der Körper behält alſo während der ganzen Zeit, da er ſich an der Kurve AMD fortbewegt, ſeine anfängliche Geſchwindigkeit unverändert bey.

Um den Druck Π zu beſtimmen, ſubſtituire man in den beyden erſtern Gleichungen für dt ſeinen Werth $\frac{ds}{c}$, ſo bekommt man $\frac{c^2d^2x}{ds^2} = \frac{2g\Pi dy}{Mds}$, und $\frac{c^2d^2y}{ds^2} = -\frac{2g\Pi dx}{Mds}$. Ferner ſetze man den Winkel Mmo, den die Tangente an M mit der Ordinate mp macht, $= \phi$, und den Krümmungshalbmeſſer an eben der Stelle $= r$; ſo wird $r = \frac{ds}{d\phi}$, $\frac{dx}{ds} = \text{Sin } \phi$, $\frac{dy}{ds} = \text{Cos } \phi$, und, weil $ds = cdt$, alſo ds ebenfalls unveränderlich iſt, $\frac{d^2x}{ds^2} = \text{Cos } \phi d\phi$, folglich:

$$\frac{c^2 d^2 x}{ds^2} = \frac{c^2 \operatorname{Cos} \varphi d\varphi}{ds} = \frac{2g\Pi \operatorname{Cos} \varphi}{M}, \text{ oder}$$

$$\Pi = \frac{Mc^2 d\varphi}{2g ds} = \frac{Mc^2}{2gr}.$$

Eben dieſen Werth für Π erhält man auch, wenn man ſtatt der hier gebrauchten erſtern Gleichung die zweyte nimmt.

§. 61.

Wir wollen ſetzen, die Kurve AMD ſey ein Kreis; ſo iſt r der Halbmeſſer dieſes Kreiſes, folglich der Druck Π unveränderlich, und da ſeine Richtung auf dem Umfange des Kreiſes ſenkrecht iſt, ſo geht ſie, rückwärts verlängert, durch ſeinen Mittelpunkt.

Ein Körper alſo, der in einem Kreiſe fortzugehen genöthigt iſt, und dabey von keiner fremden Kraft getrieben wird, bewegt ſich nicht allein gleichförmig in demſelben, ſondern hat auch ſtets einerley Beſtreben, ſich nach der Richtung des Halbmeſſers vom Mittelpunkte des Kreiſes zu entfernen. Man nennt dies Beſtreben ſeine **Schwungkraft**.

Es ſey z. B. die Maſſe des Körpers = 1 ℔, ſeine Geſchwindigkeit = 4 Fuß, der Halbmeſſer des Kreiſes = 8 Fuß, ſo iſt ſeine Schwungkraft $\frac{Mc^2}{2gr} =$

$$\frac{25}{31\frac{1}{4} \cdot 8} = \frac{1}{10} \text{ ℔}.$$

§. 62.

Aufgabe. Indem der Körper ſich längs der

Kurve AMD hinbewegt, wirke auf ihn fortwährend eine Kraft V nach ſeiner jedesmaligen Richtung, oder nach der Tangente der Kurve, durch den Punkt gezogen, woſelbſt der Körper ſich befindet. Man ſucht für eine gegebene Zeit t ſeine Geſchwindigkeit υ, und den Druck Π, den er gegen die Schranken des Weges ausübt.

Aufl. 1) Man zerlege die Kraft V in eine nach der Richtung $Mo = V \operatorname{Cos} mMo = V \cdot \frac{dx}{ds}$, und in eine darauf ſenkrechte nach $PM = V \operatorname{Sin} mMo = V \cdot \frac{dy}{ds}$.

2) Zu dieſen addire man noch die Kräfte $\Pi \cdot \frac{dy}{ds}$ und $-\Pi \cdot \frac{dx}{ds}$, worin nach eben den Richtungen der normale Gegendruck Π zerfällt, den der Körper von der Seitenwand des Kanales leidet, ſo erhält man:

$$P = V \cdot \frac{dx}{ds} + \Pi \cdot \frac{dy}{ds},\ Q = V \cdot \frac{dy}{ds} - \Pi \frac{dx}{ds}, \text{ und}$$

$R = 0$, alſo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2g\,(Vdx + \Pi dy)}{Mds}, \text{ und}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2g\,(Vdy - \Pi dx)}{Mds}.$$

3) Außerdem wird (§. 59. 5.) $\upsilon d\upsilon = \frac{2gV(dx^2 + dy^2)}{Mds} = \frac{2gVds}{M}$, oder, wenn man für υ ſeinen Werth $\frac{ds}{dt}$ ſetzt:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{2gV}{M}.$$

Der Körper wird alſo auf ſeinem krummlinigten Wege durch die Tangentialkraft V eben ſo beſchleunigt, als wenn er nach unveränderter Richtung von ihr getrieben, in gerader Linie fortginge (§. 50. 9.).

4) Man multiplicire ferner die erſtere der beyden Gleichungen (2) durch dy, die letztere durch dx, und ſubtrahire ſie dann von einander, ſo bleibt:

$$\frac{dyd^2x - dxd^2y}{dt^2} = \frac{2g\Pi(dy^2 + dx^2)}{Mds} = \frac{2g\Pi ds}{M}.$$

Hiervon iſt das Glied linker Hand $= \frac{dy^2}{dt^2}$ $\left(\frac{dyd^2x - dxd^2y}{dy^2}\right) = \frac{dy^2}{dt^2} \cdot d\left(\frac{dx}{dy}\right)$, und wenn man, wie im §. 60. den Winkel Mmo $= \varphi$ ſetzt, $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \operatorname{Cos} \varphi$; $d\left(\frac{dx}{dy}\right) = d \operatorname{tang} \varphi = \frac{d\varphi}{\operatorname{Cos} \varphi^2}$; alſo

$$\frac{dy^2}{dt^2} \cdot d\left(\frac{dx}{dy}\right) = v^2 d\varphi = \frac{2g\Pi ds}{M}, \text{ mithin wird:}$$

$$\Pi = \frac{Mv^2 d\varphi}{2gds} = \frac{Mv^2}{2gr}.$$

Der normale Seitendruck des Körpers verhält ſich demnach wie das Quadrat ſeiner Geſchwindigkeit, und verkehrt, wie der Krümmungshalbmeſſer des Weges an der Stelle, wo der Körper ſich befindet. Eben dies folgt auch ſchon aus §. 60., da offenbar die Tangentialkraft auf den gedachten Druck weiter keinen Einfluß haben kann, als nur inſofern ſie die Geſchwindigkeit des Körpers ändert.

§. 63.

Aufgabe. Es liege jetzt die Kurve AMD in einer vertikalen Ebene. Ein Körper, deſſen Maſſe $= M$ iſt, wird in A darauf gelegt, und ſinkt nun vermöge ſeines Gewichtes längs derſelben hinab; man ſucht für eine gegebene Zeit t ſeinen Ort M, und die Geſchwindigkeit, die er daſelbſt erlangt hat.

Aufl. 1) Man ziehe durch A die vertikale Abſciſſenlinie AB, fälle darauf MP ſenkrecht, und ſetze AP $= x$, PM $= y$. Ferner nenne man den Druck, den der Körper nach der Normale der Kurve rM leidet, $= \Pi$, ſo zerfällt dieſer nach den Richtungen oM und PM in die beyden Kräfte $\Pi \frac{dy}{ds}$ und $\Pi \frac{dx}{ds}$.

2) Da der Körper außer dieſen Kräften noch von ſeinem eigenen Gewichte M nach der Vertikale Mo getrieben wird, ſo erhält man gegenwärtig $P = M - \Pi \cdot \frac{dy}{ds}$ und $Q = \Pi \frac{dx}{ds}$, folglich:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2gP}{M} = 2g - \frac{2g\Pi dy}{Mds}, \text{ und}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2gQ}{M} = \frac{2g\Pi dx}{ds}.$$

3) Was ſeine Geſchwindigkeit v betrift, ſo wird

$$v\,dv = 2g\,x, \text{ alſo}$$

$$v^2 = C + 4gx,$$

wo C das Quadrat der anfänglichen Geſchwindigkeit bedeutet, und alſo $= 0$ iſt, wenn der Körper ſeine Be-

wegung aus der Ruhe anfing. Für dieſen Fall wird daher $v = 2\sqrt{gx}$.

Wenn alſo der Körper längs der Kurve zu einer vertikalen Tiefe x aus der Ruhe herabgeſunken iſt, ſo hat er dieſelbe Geſchwindigkeit erlangt, die er bekommen haben würde, wenn er zu eben der Tiefe frey herabgefallen wäre.

4) Aus $\frac{ds^2}{dt^2} = 4gx$ wird $dt = \frac{ds}{\sqrt{4gx}}$, alſo $t = \int \frac{ds}{\sqrt{4gx}}$; woraus ſich gegenſeitig beſtimmen läßt, wie x oder s von der Zeit t abhängt.

§. 64.

1. Um zu finden, welchen Druck die Kurve an der Stelle M vom Körper leidet, multiplicire man die erſtere der beyden Gleichungen (2) durch dy, die letztern durch dx, und ſubtrahire ſie dann von einander, ſo bleibt:

$$\frac{dyd^2x}{dt^2} - \frac{dxd^2y}{dt} = 2gdy - \frac{2g\Pi ds}{M},$$

und wenn man für das, was auf der linken Seite ſteht, ſeinen Werth $v^2 d\varphi$ ſubſtituirt (§. 62. 4.), bekommt man:

$$v^2 d\varphi = 2g\left(dy - \frac{\Pi ds}{M}\right), \text{ woraus}$$

$$\Pi = M \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{Mv^2 d\varphi}{2gds} = M \operatorname{Cos}\varphi - \frac{Mv^2}{2gr} \text{ wird.}$$

2. Da φ den Neigungswinkel Mmo des Elementes Mm gegen die Horizontale mp bezeichnet, ſo iſt M

Cos φ der Druck, den der Körper durch ſein Gewicht M auf die Stelle M der Kurve ausübt (§. 44.). Der andere Theil $\frac{Mv^2}{2gr}$ des geſammten Druckes Π rührt von der Geſchwindigkeit v des Körpers her (§. 62. 4.), und iſt bey einer konvexen Kurve, wie AMD, deshalb ſubtraktiv, weil der Körper vermöge ſeiner Geſchwindigkeit nach der Tangente fortzugehen, alſo von der Kurve ſich zu entfernen ſtrebt. Man könnte ihn die Fliehkraft des Körpers nennen.

3. Iſt dieſe an irgend einer Stelle ſo groß, daß ſie den erſtern Theil M Cos φ aufhebt, ſo wird $\Pi = 0$; alſo verläßt dann der Körper die Kurve, und folgt darauf den Geſetzen der Wurfbewegung, die wir im Folgenden näher entwickeln werden. Dieſer Fall ereignet ſich demnach bey einer konvexen Kurve allemal, ſobald irgendwo $M \text{ Cos } \varphi = \frac{Mv^2}{2gr}$, oder $v^2 = 2gr \text{ Cos } \varphi$ wird.

4. War der Körper zu Anfange ſeiner Bewegung in Ruhe, ſo iſt $v^2 = 2gx$ (§. 63. 3.); alſo bekommt man alsdan für das Abgleiten deſſelben von der Kurve:

$$4gx = 2gr \text{ Cos } \varphi, \text{ oder}$$
$$x = \tfrac{1}{2} r \text{ Cos } \varphi,$$

woraus man für jede gegebene Kurve die Stelle, woſelbſt dies geſchieht, beſtimmen kann.

Exempel. Die Kurve ſey ein Kreis, der in der Vertikale AB ſeinen Mittelpunkt hat, ſo iſt bekanntlich der Tangentenwinkel Mmo = dem Winkel am Mittelpunkte, der dem Bogen AM zugehört; alſo Cos φ =

$\frac{r-x}{r}$, mithin wird $x = \frac{1}{2}(r-x) = \frac{1}{3}r$, oder auch $Cos\,\varphi = \frac{2}{3}$, $\varphi = 48^\circ 11' 23''$, für den Bogen, den der Körper auf dem Kreiſe durchläuft.

5. Bey einer Kurve, die dem Körper die hohle Seite zukehrt, iſt der Krümmungshalbmeſſer r wegen der Abnahme des Winkels φ, negativ; daher hat man in dieſem Falle:

$$\Pi = M\,Cos\,\varphi + \frac{Mv^2}{2gr},$$

ſo daß ſich alſo hier die Schwungkraft des Körpers mit dem Drucke, der von ſeinem Gewichte herrührt, vereinigt.

Von der freyen Bewegung geworfener Körper.

§. 65.

Fig. 7. **Aufgabe.** Ein Körper wird von A aus mit der Geſchwindigkeit c nach einer Richtung AK geworfen, die mit der Horizontale AB den Winkel KAB = I macht. Man ſucht die Kurve AMD, worin er fortgeht, und ſeine Geſchwindigkeit an jeder Stelle derſelben.

Aufl. 1) Es ſey M ſein Ort für die Zeit t, die vom Anfange ſeiner Bewegung an verfloſſen iſt, und ſeine Geſchwindigkeit daſelbſt = v. Man fälle aus M auf AB das Perpendikel MP, und ſetze AP = x, PM = y, und den Bogen AM = s.

2) Wird nun der Widerſtand der Luft hier nicht in Betracht gezogen, ſo wirkt in M weiter keine Kraft auf ihn, als ſein eigenes Gewicht, das wir M nennen

wollen; daher hat man (§. 59. 4.) $P = o$, und $Q = - M$, folglich:

$$\frac{dx}{dt^2} = o, \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2gQ}{M} = - 2g.$$

3) Das Integral von erſterer Gleichung iſt $\frac{dx}{dt} = A$, und dieſe nochmals integrirt, giebt $x = At$, wozu keine Konſtante addirt wird, weil für $t = o$, auch $x = o$ iſt.

4) Von der andern Gleichung $\frac{d^2y}{dt^2} = - 2g$ iſt das erſte Integral $\frac{dy}{dt} = B - 2gt$, und das zweyte $y = Bt - t^2$; wozu ebenfalls nichts addirt wird, weil auch y für $t = o$ verſchwindet.

5) Um die Größen A und B zu beſtimmen, ſetze man den Tangentenwinkel $mMo = \varphi$, ſo hat man $\frac{dx}{ds} = \text{Cos}\,\varphi$, $\frac{dy}{ds} = \text{Sin}\,\varphi$, alſo $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v$ $\text{Cos}\,\varphi$, und $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v\,\text{Sin}\,\varphi$.

6) Nun iſt für $t = o$, oder zu Anfange der Bewegung, $v = c$, und der Winkel $\varphi = I$, weil AK die anfängliche Richtung des Körpers, folglich die Tangente der Kurve an A iſt; daher wird $A = c\,\text{Cos}\,I$, und $B = c\,\text{Sin}\,I$.

7) Dieſe Werthe für A und B in den für x und y gefundenen Ausdrücken ſubſtituirt, geben $x = ct\,\text{Cos}\,I$, und $y = ct\,\text{Sin}\,I - qt^2$.

8) Aus erſterer Gleichung erhält man $t = \frac{x}{c \operatorname{Cos} I}$, und wenn man damit aus der zweyten t wegſchafft:

$$y = x \operatorname{tang} I - \frac{gx^2}{c \operatorname{Cos} I^2},$$

eine Gleichung, die die Natur der geſuchten Kurve ausdrückt.

9) Nennt man h die der Geſchwindigkeit c zugehörige Fallhöhe, ſo iſt $4gh = c^2$ (§. 39.), wodurch ſich die vorige Gleichung in folgende verwandelt:

$$y = x \operatorname{tang} I - \frac{x^2}{4h \operatorname{Cos} I^2}.$$

10) Für die Geſchwindigkeit v erhält man aus §. 59. 5.

$$v dv = - 2g dy, \text{ alſo}$$

$$v^2 = C - 4gy,$$

und, da für $t = o$, oder $y = o$, $v = c$ iſt, $C = c^2$, mithin $v^2 = c^2 - 4gy = 4g(h - y)$.

§. 66.

Während der Zeit t entfernt ſich der Körper von A in der Horizontale AB um $x = ct \operatorname{Cos} I$, und erreicht zugleich eine vertikale Höhe $y = ct \operatorname{Sin} I - gt^2$.

Erſtere Bewegung, das horizontale Fortrücken, geſchieht alſo gleichförmig, und zwar mit eben der Geſchwindigkeit $c \operatorname{Cos} I$, die dem Körper Anfangs nach dieſer Richtung ertheilt wurde; letztere Bewegung, ſein vertikales Steigen, iſt dagegen gleichförmig verzögert, und verhält ſich gerade ſo, als wenn der Körper mit dem

dem vertikalen Antheile c Sin I ſeiner anfänglichen Geſchwindigkeit bloß aufwärts geſtiegen wäre. Dieſe Bemerkung wird zur Erläuterung des allgemeinen Satzes §. 59. 3. dienen, da im gegenwärtigen Falle nach horizontaler Richtung gar keine Kraft, und nach vertikaler Richtung bloß die Schwere auf den Körper wirkt.

§. 67.

Wenn man $y = 0$ ſetzt, ſo bekommt man für die Punkte, worin die krumme Linie von der Horizontale AB geſchnitten wird, die Gleichung $0 = 4hx \text{ Sin I Cos I} - x^2$, deren Wurzeln $x = 0$, und $x = 4h \text{ Sin I Cos I}$ ſind.

Von dieſen beyden Wurzeln bezieht ſich die erſtere auf den Anfangspunkt A, die letztere auf den zweyten Durchſchnittspunkt B, und giebt alſo die Entfernung $BA = 4h \text{ Sin I Cos I} = 2h \text{ Sin } 2I$, in der der Körper niederfällt. Dieſe Entfernung nennt man die **Weite des Wurfs**.

Wird z. B. der Körper mit einer Geſchwindigkeit von 75 Fuß unter einem Winkel von 15° geworfen, ſo iſt $h = \frac{c^2}{4g} = \frac{5625}{62,5} = 90$ Fuß, $\text{Sin } 2I = \text{Sin } 30° = \frac{1}{2}$, folglich die geſuchte Wurfweite $AB = 90$ Fuß.

§. 68.

Da die Wurfweite ſowohl für $I = 0$, als für $I = 90°$ verſchwindet, ſo folgt, daß er irgend einen Winkel zwiſchen 0° und 90° geben müſſe, für den ſie

bey einerley Schnelligkeit des Wurfs am größten iſt. Nun kann der Sinus eines Winkels bekanntlich nie größer als 1 werden, alſo iſt der größte Werth der Wurfweite $= 2h$, und dieſen erhält ſie für $2I = 90°$, oder für $I = 45°$.

§. 69.

Um den Punkt der Kurve zu finden, der über AB am höchſten liegt, darf man nur $\frac{dy}{dx} = 0$ ſetzen. Dies giebt $0 = 2h \text{ Sin } I \text{ Cos } I - x$, oder $x = h \text{ Sin } 2I = \frac{1}{2} AB$, für die Abſciſſe, die der größten Ordinate CD zugehört; hieraus erhält man ferner $CD = h \text{ Sin } I^2$.

Die größte Höhe alſo, zu der der Körper hinaufſteigt, iſt $h \text{ Sin } I^2$, und er gelangt zu dieſer, wenn er in die Vertikale DC kommt, die die Weite AB ſeiner Bahn halbirt.

§. 70.

Nimmt man CD zur Abſciſſenlinie an, und ſetzt $DI = u$, $IM = z$, ſo wird $x + z = AC = 2h \text{ Sin } I \text{ Cos } I$, und $y + u = CD = h \text{ Sin } I^2$; folglich $x = 2h \text{ Sin } I \text{ Cos } I - z$, und $y = h \text{ Sin } I^2 - u$. Dadurch verwandelt ſich die Gleichung (65. 10.) in folgende zwiſchen u und z

$$h \text{ Sin } I^2 - u = h \text{ Sin } I^2 - \frac{z^2}{4h \text{ Cos } I^2}, \text{ oder}$$

$$z^2 = 4hu \text{ Cos } I^2.$$

Die Bahn des Körpers iſt alſo eine Parabel, die in D ihren Scheitel, und die Vertikale DC zum Durchmeſſer hat.

§. 71.

Fig. 8. Bey der im §. 67. gegebenen Formel für die Weite des Wurfes liegt die Vorausſetzung zum Grunde, daß der Körper nicht unter die Horizontale AB herabſinken könne. Wir wollen jetzt annehmen, der Punkt A liege in einer gewiſſen Höhe über den Boden, und es bekomme der Körper von dieſem Orte aus die Geſchwindigkeit c nach horizontaler Richtung AB, ſo wird die Gleichung §. 65. 10., wenn man darin I = o ſetzt, folgende:

$$4hy = -x^2.$$

Dieſe Gleichung giebt, wie man ſieht, für y lauter negative Werthe, und gehört alſo zu einer Kurve, die ganz unterhalb AB liegt. Man verwechſele ihre Koordinaten, und ſetze als Abſciſſe AQ = u, und als Ordinate QM = z, ſo erhält man

$$z^2 = 4hu$$

eine Gleichung, wie die im §. 70. Der Körper beſchreibt alſo den einen Arm einer Parabel, deren Scheitel in A liegt.

§. 72.

In Beziehung auf die Zeit hat man ferner aus §. 65. 8., wenn daſelbſt I = o geſetzt wird, $u = gt^2$, und $z = ct$. Hieraus folgt:

1) Daß der Körper in einer beſtimmten Zeit zu eben der Tiefe unter AB gelangt, als wenn er während derſelben von A frey herabgefallen wäre; und

2) daß er ſich von der Vertikale, die durch A

geht, gleichförmig, oder in gleichen Zeiten um gleich vieles, entfernt, und zwar mit eben der Geſchwindigkeit, die ihm zu Anfange in A nach horizontaler Richtung ertheilt wurde.

Anmerk. Iſt alſo z. B. AQ der Maſtbaum eines Schiffes, das mit der Geſchwindigkeit c nach AB fortrückt, und man läßt einen Körper aus ſeinem Gipfel A herabfallen, ſo bewegt ſich dieſer, abſolut genommen, in einer Parabel, weil er in A die horizontale Geſchwindigkeit c mit dem Schiffe gemein hat; betrachtet man aber ſeine Bewegung in Bezug auf den Maſtbaum, ſo erhellet aus den beyden vorhergehenden Sätzen, daß er an demſelben eben ſo herabgleiten müſſe, als es beym ſtill ſtehenden Schiffe der Fall geweſen ſeyn würde. Es ſey nemlich M ſein Ort nach Verlauf der Zeit t, ſo iſt $AQ = gt^2$, $QM = ct$; nun iſt aber während dieſer Zeit auch der Maſtbaum aus AQ in PM fortgerückt, folglich ſind beyde noch beyſammen, und der Körper iſt um $PM = gt^2$ an ihm herabgeſunken, d. h. um eben ſo viel, als in der Zeit t der natürliche Fallraum beträgt.

Vom Einfluſſe der Umdrehung der Erde auf das Steigen und Fallen der Körper.

§. 73.

Die Aſtronomie lehrt uns, daß ſich die Erde innerhalb 24 Stunden einmal um ihre Axe drehe. Dieſe Bewegung wird allen Körpern, die ſich auf ihr befinden, mitgetheilt, und wir glauben von einem Körper, der keine andere Bewegung als dieſe hat, er ſey in Ruhe, weil wir mit ihm zugleich fortrücken, ohne uns deſſen bewußt zu ſeyn. Da aber ſeine Ruhe nur in Bezug auf uns gilt, und er ſich doch wirklich bewegt, ſo iſt jede andere Bewegung, die man ihm ſonſt noch er-

theilt, nie rein, ſondern kommt mit jener erſtern in Verbindung, und bildet damit eine zuſammengeſetzte Bewegung.

§. 74.

Hieraus wird nun begreiflich, daß das Fallen eines Körpers aus der ſcheinbaren Ruhe, von der eben die Rede war, eigentlich nicht in gerader Linie, ſondern in einer Parabel, oder doch wenigſtens in einer der Parabel nahe kommenden Linie geſchehe. Allein da die Stelle des Bodens, über der er vom Anfange an ſchwebte, mit ihm dieſelbe Bewegung ſeitwärts hat, ſo kann man es ſich eben ſo leicht erklären, warum dennoch der Körper beſtändig in einer und derſelben vertikalen Linie herabzufallen ſcheint, und am Ende wirklich den Boden in eben der Stelle trift, wie in dem Falle, wenn die Erde ſtill ſtände.

§. 75.

Dieſes wäre ohne Zweifel genau wahr, wofern ſich annehmen ließe, daß Körper und Boden genau dieſelbe Bewegung um die Axe der Erde mit einander gemein hätten. Um einzuſehen, daß dies nicht der Fall
Fig. 9. ſey, ſetze man, es ſey CP die Axe der Erde, C ihr Mittelpunkt, A ein Punkt auf ihrer Oberfläche, a der Ort eines Körpers, der ſich über A in der vertikalen Höhe Aa befindet, ſo ſind AN an die Entfernungen der Punkte A und a von der Axe CP, die ſich alſo wie AC und aC verhalten. Während der Zeit nun, daß die Erde ſich einmal um ihre Axe dreht, beſchreiben die

Punkte A und a zwey Kreiſe die AN und an zu Halbmeſſern haben; daher durchläuft der Punkt a in eben der Zeit einen größern Raum, als der Punkt A, und bewegt ſich folglich ſchneller als dieſer.

Dieſe Verſchiedenheit in der Umlaufsgeſchwindigkeit des Körpers und der Stelle des Bodens, die unter ihm liegt, iſt nun zwar gering, aber in manchen Fällen, wie wir ſehen werden, doch groß genug, um beym Fallen des Körpers eine merkliche Abweichung deſſelben von der vertikalen Richtung hervorzubringen. Eben ſo bewirkt ſie auch bey andern Bewegungen des Körpers eine ähnliche Abweichung von der Bahn, die er ohne Rückſicht auf die Umdrehung der Erde beſchreiben würde.

§. 76.

Fig. 10. Wir wollen zuerſt annehmen, es ſey D ein Punkt in der Ebene des Aequators AEC, ſeine Höhe DA über der Oberfläche $= h$, der Halbmeſſer der Erde $= a$, die Umlaufszeit derſelben in Sekunden $= T$.

1) So durchläuft der Punkt A in dieſer Zeit den ganzen Umfang des größten Kreiſes, oder den Raum $= 2\pi a$; ſetzt man alſo ſeine Geſchwindigkeit, oder den Weg, den er in einer Sekunde macht, $= f$, ſo iſt $fT = 2\pi a$, folglich $f = \frac{2\pi a}{T}$.

2) Der Punkt D hingegen beſchreibt in eben der Zeit um den Mittelpunkt C einen Kreis, der $CD = a + h$ zum Halbmeſſer hat, oder durchläuft darin den Raum $= 2\pi\,(a + h)$. Daher iſt ſeine Geſchwin-

digkeit, die wir f' nennen wollen, $= \frac{2\pi(a+h)}{T}$, folglich $f' = f(1 + \frac{a}{h})$.

3) Geſetzt nun, ein Körper fällt aus der Ruhe von D zur Oberfläche herab, ſo geſchieht ſeine Bewegung in einer Kurve, DME, die in der Ebene des Aequators liegt, und alſo den Boden irgendwo in E treffen muß.

4) Es ſey M ſein Ort nach Verlauf der Zeit t. Man fälle aus dieſem Punkte auf DC das Perpendikel MP, und ſetze $CP = x$, $MP = y$, $MC = r$, und den Winkel $MCP = \phi$, ſo iſt $x = r \operatorname{Cos} \phi$, und $y = r \operatorname{Sin} \phi$.

5) Da der Körper in M von keiner andern Kraft getrieben wird, als von ſeinem Gewichte $= M$, und dies nach den Richtungen PC und MP in die Kräfte $M \operatorname{Cos} \phi$ und $M \operatorname{Sin} \phi$ zerfällt, ſo hat man hier $P = - M \operatorname{Cos} \phi$, und $Q = - M \operatorname{Sin} \phi$, alſo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2gP}{M} = -2g \operatorname{Cos} \phi, \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2gQ}{M} = -2g \operatorname{Sin} \phi.$$

6) Wegen der Kleinheit des Winkels ϕ *) kann

*) Sicher wird nicht leicht die Zeit des Fallens über eine Minute dauren, und doch beträgt für dieſe Dauer der Winkel ϕ nur etwas geringes über 15' Von dieſem Bogen iſt für den Halbmeſſer = 1, die Länge = 0,00436332, und der Sinus = 0,00436331; alſo macht da der Unterſchied zwiſchen beyden noch kein $\frac{1}{400000}$ von ϕ aus.

man füglich Sin $\varphi = \varphi$ ſetzen, wodurch $y = r\varphi$, alſo $\frac{d^2(r\varphi)}{dt^2} = -2g\varphi$ wird.

7) Nun iſt $\frac{d(r\varphi)}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt} + \varphi\frac{dr}{dt}$, und $\frac{d^2(r\varphi)}{dt}$ $= r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} + \varphi\frac{d^2r}{dt^2}$; ferner iſt d^2r der Raum, durch den die Schwere den Körper während dt forttreibt, alſo $d^2r = -2gdt^2$, und folglich $\varphi \cdot \frac{d^2r}{dt^2}$ $= -2g\varphi$. Daher erhält man (6)

$$r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{gr}{dt} - 2g\varphi = -2g\varphi;\ \text{alſo}$$

$$r \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -2\frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dr}{dt},\ \text{oder}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\varphi} = -\frac{2dr}{r}.$$

8) Hiervon iſt das Integral: $\log\frac{d\varphi}{dt} = \log C$ $- 2\log r$

$$\text{oder}\ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2}.$$

9) Für $t = o$, iſt $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{f'}{a}$, und $r = a + h$, alſo $\frac{f'}{a} = \frac{C}{(a+h)^2}$, $C = \frac{f'(a+h)^2}{a}$; daher wird

$$d\varphi = \frac{f'(a+h)^2dt}{ar^2}.$$

10) Da nun der Körper in der Zeit t durch den

Raum gt^2 gefallen iſt, ſo hat man $r = a + h - gt^2$ $= (a+h)\left(1 - \frac{gt^2}{a+h}\right)$, folglich, weil $\frac{gt^2}{a+h}$ ein ſehr kleiner Bruch iſt:

$$d\phi = \frac{f'dt}{a}\left(1 + \frac{2gt^2}{a+h}\right), \text{ und}$$

$$\phi = \frac{f't}{a} + \frac{2gf't^3}{3a^2}.$$

11) Wenn der Körper in E gelangt, ſo iſt $r = a$, alſo $gt^2 = h$, $t = \sqrt{\frac{h}{g}}$. Dieſen Werth für t in ϕ ſubſtituirt, giebt den Winkel ACE, oder, wenn man noch mit a multiplicirt, den Bogen $AE = f'\sqrt{\frac{h}{g}} + \frac{2fh^{\frac{3}{2}}}{3a\sqrt{g}}$.

12) Hiervon den Bogen $f\sqrt{\frac{h}{g}}$ ſubtrahirt, den in eben der Zeit $\sqrt{\frac{h}{g}}$ der Punkt A beſchrieben hat (1), giebt eine Differenz $= (f' - f)\sqrt{\frac{h}{g}} + \frac{2fh^{\frac{3}{2}}}{3a\sqrt{g}} = \frac{5fh^{\frac{3}{2}}}{3a\sqrt{g}} = \frac{10\pi h^{\frac{3}{2}}}{3T\sqrt{g}}$. Um ſo viel hat ſich alſo der Körper während ſeines Fallens von der Vertikale DA entfernt.

13) Da ſich die Erde von Weſten nach Oſten dreht, ſo iſt dieſe Abweichung öſtlich.

14) Die Umdrehungszeit der Erde T beträgt 86164 Sekunden mittl. Zeit, daher iſt der Logarithme des Koefficienten $\frac{10\pi}{3T\sqrt{g}} = 0{,}4877929 - 5$.

Exempel. Es ſey h = 1000 Fuß, ſo hat man

$\frac{3}{2}\log h = 4{,}5000000$, dazu

$0{,}4877927 - 5$ addirt

giebt $0{,}9877927 - 1$.

alſo die Abweichung = 0,97228 Fuß.

§. 77.

Fig. 11. Wird der Körper von A aus mit der Geſchwindigkeit c vertikal aufwärts geworfen, ſo iſt ſeine anfängliche Geſchwindigkeit nach der auf CA ſenkrechten Richtung = f, alſo wird in der Formel $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2}$ (§. 76. 8.) für t = o, $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{f}{a}$, und r = a, folglich C = af, und $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{af}{r^2}$.

Da ferner ſeine Bewegung nach der Vertikale CM durch die Schwere gleichförmig verzögert wird, ſo iſt $r = a + ct - gt^2 = a\left(1 + \frac{ct - gt^2}{a}\right)$; mithin wird

$$a d\varphi = f dt\left(1 - \frac{2ct}{a} + \frac{2gt^2}{a}\right)$$

$$\text{und } a\varphi = f\left(t - \frac{ct^2}{a} + \frac{2gt^3}{3a}\right).$$

Nachdem er die Kurve AME durchlaufen iſt, und in E niederfällt, iſt wieder r = a, folglich $ct = gt^2$, oder $t = \frac{c}{g}$. Dies für t ſubſtituirt, giebt den Bogen

$AE = f(\frac{c}{g} - \frac{c^3}{3ag^2})$, und davon den Bogen $\frac{fc}{g}$ ſub-trahirt, den in eben der Zeit $\frac{c}{g}$ der Punkt A beſchrieben hat, bleibt $-\frac{fc^3}{3ag^2} = -\frac{2\pi c^3}{3g^2T}$.

Dieſe negative Differenz zeigt an, daß der Punkt A dem Körper während ſeiner Bewegung vorgerückt iſt. Alſo fällt der Körper hinter der Vertikale AD, d. h. weſtwärts von ihr, in einer Entfernung $= \frac{2\pi c^3}{3g^2T}$ nieder.

Exempel. Es ſey $c = 900$ Fuß, ſo hat man:

$$3 \log c = 8{,}8627275$$
$$\log 2\pi = 0{,}7981799$$
$$\log 2\pi c^3 = 9{,}6609074$$

Ferner
$$\log T = 4{,}9353259$$
$$2 \log g = 2{,}3876400$$
$$\log 3 = 0{,}4771212$$
$$\log 3g^2T = 7{,}8000871$$

von 9,6609074 ſubt.

bleibt 1,8608203.

Daher beträgt die Abweichung = 72,58 Fuß.

Anmerk. Die Formel §. 76. 8. gilt auch noch für den allgemeinern Fall, wenn dem Körper in der Ebene des Aequators eine Geſchwindigkeit nach irgend einer ſchrägen Richtung ertheilt wird. Hiervon handelt Herr d'Alembert in ſ. Opuſc. math. T. VII. pag. 314 u. f. ausführlich, legt aber dabey den Satz zum Grunde: daß der Körper nach den Geſetzen der Attraktion eine Ellipſe beſchreiben müſſe, und findet daher

auf einem ganz andern Wege, was hier aus den erſten Sätzen der Mechanik hergeleitet iſt. Deſſen ungeachtet iſt ſein Verfahren nicht kürzer als das meinige, und hat dabey das Unvollkommene, daß es unbrauchbar wird, ſobald man den Widerſtand der Luft in Betracht ziehen will, weil alsdann jene Vorausſetzung wegfällt.

§. 78.

Fig. 9. Liegt der Ort A nicht im Aequator, ſondern unter irgend einer Breite $= \beta$, ſo bewegt er ſich innerhalb der Zeit T um die Erdaxe CP durch den Umfang eines Parallelkreiſes, der zum Halbmeſſer die ſenkrechte Linie AN $= a \operatorname{Cos} \beta$ hat; folglich iſt ſeine Geſchwindigkeit $q = \frac{2\pi a \operatorname{Cos} \beta}{T}$, und die Geſchwindigkeit q' eines Ortes a, der in der vertikalen Höhe Aa $= h$ über ihm liegt, iſt $= q\left(1 + \frac{h}{a}\right)$.

§. 79.

Fällt demnach ein Körper von a aus der ſcheinbaren Ruhe auf die Erdfläche herab, ſo hat er zu Anfange die Geſchwindigkeit q' nach einer auf die Ebene aCP ſenkrechten Richtung; daher kommt ſeine Bahn in die Fig. 12. Ebene eines größten Kreiſes DAG zu liegen, der auf den Meridian PA ſenkrecht iſt, und wenn alſo E der Ort iſt, wo er niederfällt, ſo weicht dieſer von A nicht allein in der Länge, ſondern auch außerdem noch in der Breite ab.

Man ſetze das Maaß des Bogens AE $= \lambda$, ſo hat man (§. 76. 11.) $a\lambda = q'\sqrt{\frac{h}{g}} + \frac{2qh^{\frac{3}{2}}}{3a\sqrt{g}} = q\sqrt{\frac{h}{g}} + \frac{5qh^{\frac{3}{2}}}{3a\sqrt{g}}$.

Ferner iſt im rechtwinklichten ſphäriſchen Dreyecke APE

$$1 : \text{Sin } AP = \text{tang } APE : \text{tang } AE$$

alſo tang APE $= \frac{\text{tang } \lambda}{\text{Cos } \beta}$, oder, da der Winkel APE ſehr gering iſt, APE $= \frac{\lambda}{\text{Cos } \beta}$. Dieſer Winkel mißt den Bogen Ae, der vom Parallelkreiſe WAO zwiſchen den Meridianen PA und PE enthalten iſt; multiplicirt man ihn alſo mit a Ccs β, dem Halbmeſſer des Parallelkreiſes, ſo erhält man die abſolute Länge des Bogens

$$Ae = a\lambda = q\sqrt{\frac{h}{g}} + \frac{5gh^{\frac{3}{2}}}{3a\sqrt{g}}.$$

Hiervon nun das Stück $p\sqrt{\frac{h}{g}}$ abgezogen, das der Punkt A während der Zeit $\sqrt{\frac{h}{g}}$ im Parallelkreiſe zurückgelegt hat, bleibt $\frac{5qh^{\frac{3}{2}}}{3a\sqrt{g}} = \frac{10\pi h^{\frac{3}{2}} \text{Cos } \beta}{3T\sqrt{g}}$ (§. 78.), für die Abweichung des Körpers von der Vertikale Aa nach der Richtung des Parallels.

§. 80.

Die andere Abweichung Ee in die Breite läßt ſich folgendermaaßen beſtimmen:

Im ſphäriſchen Dreyecke APE iſt Cos PE $=$ Cos PA . Cos AE $=$ Sin β Cos λ $=$ Sin $\beta - \frac{1}{2}\lambda^2$ Cos β. Setzt man daher Ee $= \omega$, ſo wird Cos PE $=$ Sin $(\beta - \omega) =$ Sin $\beta - \omega$ Cos β, alſo

$$\omega \operatorname{Cos} \beta = \tfrac{1}{2}\lambda^2 \operatorname{Sin} \beta$$

oder $\omega = \tfrac{1}{2}\lambda^2 \operatorname{tang} \beta$

folglich die Diſtanz der Punkte E und e auf der Erdfläche $= a\omega = \tfrac{1}{2}\lambda^2 a \operatorname{tang} \beta$.

Nun iſt $a\lambda = q\sqrt{\frac{h}{g}} + \frac{5qh^{\frac{3}{2}}}{3a\sqrt{g}}$, wovon hier nur das erſte Glied in Betracht kommt, alſo $\lambda = \frac{q}{a}\sqrt{\frac{h}{g}}$ $= \frac{2\pi \operatorname{Cos} \beta}{T}\sqrt{\frac{h}{g}}$. Dies für λ ſubſtituirt, giebt $a\omega$ $= \frac{2\pi^2 ah \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Cos} \beta}{T^2 g} = \frac{\pi^2 ah \operatorname{Sin} 2\beta}{T^2 g}$.

§. 81.

1) Um ſo viel entfernt ſich alſo der Körper während des Fallens von dem Parallelkreiſe WAO, worin die Vertikale Aa liegt; und zwar allemal in unſerer nördlichen Halbkugel ſüdwärts, weil EP, als Hypothenuſe des Dreyecks APE, jederzeit größer als AP iſt.

2) Unter dem Aequator und am Pole iſt dieſe Abweichung $= 0$; am größten aber iſt ſie für $\operatorname{Sin} 2\beta = 1$, oder unter der Breite von 45°.

3) Ihr beſtändiger Koefficient $\frac{\pi^2 a}{T^2 g}$ iſt $=$ 0,001671824; daher beträgt ſie z. B. 10 Fuß, wenn ein Körper unter der Breite von 45° aus einer Höhe von 6000 Fuß herabfällt.

§. 82.

Es bleibt noch der andere Fall zu betrachten übrig,

wo der Körper aus A mit einer Geſchwindigkeit $= c$ nach der Vertikale Aa in die Höhe geworfen wird.

Hier iſt $a\lambda = q\left(\frac{c}{g} - \frac{c^3}{3ag^2}\right)$, und der Bogen, den der Punkt A während der Zeit $\frac{c}{g}$ gegen O zu beſchreiben hat, $= \frac{qc}{g}$; alſo iſt die Abweichung des Körpers von der Vertikale Aa im Parallelkreiſe WAO $=$ $\frac{qc^3}{3ag^2} = \frac{2\pi c^3 \operatorname{Cos}\beta}{3Tg^2}$ weſtlich.

Ferner wird $a\omega = \frac{1}{2}\lambda^2 a \operatorname{tang}\beta = \frac{q^2c^2 \operatorname{tang}\beta}{2ag^2}$ $= \frac{\pi^2 ac^2 \operatorname{Sin} 2\beta}{T^2g^2}$; nennt man nun h die der Geſchwindigkeit c zugehörige Fallhöhe, ſo iſt $c^2 = 4gh$, alſo die Abweichung des Körpers vom Parallelkreiſe $=$ $0{,}0066873 \cdot h \operatorname{Sin} 2\beta$ ſüdlich.

Exempel. Für $\beta = 45°$, $c = 900$ Fuß, wird $h = 12960$ Fuß, folglich die ſüdliche Abweichung $=$ $86\frac{2}{3}$ Fuß.

Anmerk. Man kann von dem hier Vorgetragenen nun leicht zur Auflöſung des allgemeinern Problems übergehen: wie ein Körper ſich bewegen müſſe, der an irgend einem Orte der Erde nach einer beliebigen Richtung geworfen wird. Dies genauer zu unterſuchen, halte ich um ſo mehr der Mühe werth, da ich feſt überzeugt bin, daß darin die einzige und richtige Beantwortung der Frage liegt, warum eine Kugel oft ſo merklich von der vertikalen Ebene abweicht, in der das Geſchütz gerichtet iſt; es würde aber gegen meine Abſicht ſeyn, dieſe Materie hier ausführlich abzuhandeln.

Viertes Kapitel.

Von dem Widerſtande der Luft.

§. 83.

Ein Körper, der von einer flüßigen Materie, als Waſſer, Luft oder dergl. umgeben iſt, kann darin ſeinen Ort nicht verändern, ohne jedesmal die Theile derſelben, in deren Stelle er dringen will, vor ſich wegzutreiben. Soll nun dies geſchehen, ſo muß er beſtändig auf die vor ihm liegende Maſſe einen Druck ausüben, und der erzeugt allemal, wie wir in der Statik geſehen haben, von Seiten des Hinderniſſes einen eben ſo großen Gegendruck. Daher wirkt die flüßige Materie auf den Körper als eine verzögernde Kraſt, und macht alſo, daß er ſich langſamer in ihr bewegt, als es unter gleichen Umſtänden im leeren Raume der Fall ſeyn würde.

§. 84.

Wir wollen nun ſetzen, ein gerades Prisma, das ſich durch die Luft nach der Richtung ſeiner Axe bewegt, leide von der vor ihm befindlichen Luftmaſſe den Druck $= \Pi$, ſo iſt klar:

1) daß dieſer Druck auf ſeine vordere Grundfläche ſenkrecht gerichtet ſey, und

2) ſich über dieſelbe gleichförmig vertheile.

Erſteres folgt nemlich: weil die Richtungen des Druckes und der Bewegung entgegen geſetzt ſeyn müſſen;

ſen; letzteres: weil alle Elemente der Grundfläche gleiche Geſchwindigkeit, und dabey gegen die Richtung des Druckes einerley Lage haben; ſo daß alſo beym einen eben die Urſachen des Widerſtandes vorhanden ſind, als beym andern. Daher muß ferner:

3) der Druck Π bey einerley Geſchwindigkeit des Prisma's ſich wie ſeine Grundfläche verhalten, und

4) ſeine mittlere Richtung durch den Schwerpunkt der Grundfläche, folglich auch zugleich durch die Axe des Prisma's gehen.

§. 85.

Wird demnach die Grundfläche des Prisma's = S, und Π = NS geſetzt, ſo hat N für einerley Geſchwindigkeit jedesmal einen beſtimmten Werth, und iſt alſo von dieſer nur allein abhängig.

Woſern man nun annimmt: daß einerley Druck entſtehe, wenn entweder die Luft mit einer beſtimmten Geſchwindigkeit ſich ſenkrecht gegen eine ruhende Fläche bewegt, oder umgekehrt die Fläche mit eben der Geſchwindigkeit nach einer auf ſie ſenkrechten Richtung durch ſtillſtehende Luft geführt wird; ſo läßt ſich das Geſetz, nach welchem der Koefficient N von der Geſchwindigkeit abhängt, wenigſtens vorläufig, aus Beobachtungen über die Stärke des Luftſtoßes herleiten.

Folgende Tafel enthält einige Verſuche dieſer Art, die von Herrn **Woltmann** vermittelſt ſeines hydrometriſchen Flügels angeſtellt ſind *), und zwar in der er-

*) S. deſſen Beſchreibung des hydrometriſchen Flügels. S. 50.

ſten Kolumne die Geſchwindigkeit der Luft = v in Hamb. Fußen, in der zweyten der Druck auf 1 Quad. Fuß Fläche = N in Lothen, und in der dritten die daraus entſpringende Verhältnißzahl $N : v^2$ angegeben:

v	N	$N : v^2$
10	4,00	0,0400
12	5,33	0,0370
20	16,11	0,0403
21	16,73	0,0379
24	20,72	0,0360
25	21,39	0,0342
26	23,15	0,0342
28	27,23	0,0347
29	29,25	0,0348
30	31,41	0,0349

Da die Differenzen zwiſchen den Werthen der dritten Kolumne nicht allein ſehr gering, ſondern auch wechſelsweiſe bald poſitiv, bald negativ ſind, ſo läßt ſich daraus ſicher auf ein unveränderliches Verhältniß zwiſchen N und v^2 ſchließen; alſo lehren uns dieſe Verſuche, was man auch ſonſt aus theoretiſchen Gründen anzunehmen pflegt, daß ſich der Widerſtand der Luft in Rückſicht der Geſchwindigkeit wie das Quadrat derſelben verhalte.

Nimmt man nun zwiſchen den zehn verſchiedenen Werthen von $\frac{N}{v^2}$ das arithmetiſche Mittel, ſo wird

$$N = 0{,}0364 \,.\, v^2, \text{ folglich } \Pi = 0{,}034 \,.\, v^2 S \,.\, \text{Loth.}$$

Die Einheit, die hier zum Grunde liegt, iſt 1 Hamb. Fuß = 0,913 Rheinl. Fuß; will man alſo die Formel ſo einrichten, daß ſich darin ſowohl v als S auf Rheinl. Maaß beziehen, ſo muß man ihren Koefficienten noch durch das Biquadrat der Verhältnißzahl 0,913 dividiren, wodurch endlich:

$\Pi = 0{,}0524\, v^2 S$. Loth wird.

Exempel. Ein Cylinder, deſſen Grundfläche 6 Rheinl. Fuß im Durchmeſſer hat, bewegt ſich nach der Richtung ſeiner Axe durch die Luft mit der Geſchwindigkeit von 19 Fuß in 1 Sekunde; wie groß iſt der Widerſtand, der ihm die Luft entgegenſetzt?

Hier iſt $S = 9\pi$, alſo

$$\begin{aligned} \log S &= 1{,}4513924 \\ \log v^2 &= 2{,}5575072 \\ \log \tfrac{524}{10000} &= 0{,}7193313 - 2 \\ \hline \log \Pi &= 2{,}7282309 \end{aligned}$$

folglich $\Pi = 534{,}8386$ Loth $= 16{,}7137$ ℔.

§. 86.

Aufgabe. Den Widerſtand zu beſtimmen, den eine Kugel vom Halbmeſſer = a in der Luft leidet, wenn ſie ſich durch dieſelbe mit einer gegebenen Geſchwindigkeit v bewegt.

Fig. 13. 1) Man nehme die Richtung der Bewegung CA zur Axe der Kugel an, lege durch ſie einen größten Kreis ADBE, und ſetze darin CP = u, PM = z, und den Winkel MCA = φ, ſo hat man $u = a \operatorname{Cos} \varphi$, und $z = a \operatorname{Sin} \varphi$.

2) Auf das Element Mm dieſes Kreiſes wirkt offenbar nur eine Luftſchicht von der Breite $mr = dz = a \,\mathrm{Cos}\, \varphi d\varphi$; es leidet alſo den Druck $p = 0{,}0524\, v^2 a \,\mathrm{Cos}\, \varphi d\varphi$, den wir der Kürze wegen $= \lambda v^2 a \,\mathrm{Cos}\, \varphi d\varphi$ ſetzen wollen.

3) Da aber dieſer Druck auf das Element unter der ſchiefen Richtung Mr geſchieht, ſo iſt nur der Theil von ihm $= p \,\mathrm{Cos}\, \varphi$ wirkſam, der nach der Normale MC gerichtet iſt.

4) Dieſer zerfällt noch im Mittelpunkte der Kugel nach den Richtungen CB und CE in die beyden Kräfte $p \,\mathrm{Cos}\, \varphi^2$ und $p \,\mathrm{Cos}\, \varphi \,\mathrm{Sin}\, \varphi$, wovon die letztere durch einen eben ſo großen Gegendruck, der von der andern Seite her entſteht, aufgehoben wird.

5) Nun iſt ferner die Fläche der Kugelzone, die zwiſchen den beyden durch MP und mp gehenden Parallelkreiſen liegt, $= 2\pi \,.\, MP \,.\, Mm$, alſo der unmittelbare Druck darauf $= 2\pi z p$, und folglich der daraus entſpringende Widerſtand nach $CB = 2\pi z \,.\, p \,\mathrm{Cos}\, \varphi^2 = 2\pi\lambda v^2 a^2 \,\mathrm{Cos}\, \varphi^3 \,\mathrm{Sin}\, \varphi d\varphi$ (1. 2.) $= -\dfrac{2\pi\lambda v^2 u^3 du}{a^2}$.

6) Hiervon das Integral genommen, giebt den Widerſtand für die Fläche des Kugelſegmentes, das von dem Schnitte durch MP begrenzt wird, $= 2\pi\lambda v^2 \left(C - \dfrac{u^4}{4a^2}\right)$, und da derſelbe für $\varphi = 0$, oder $u = a$ verſchwindet, ſo iſt $C = \frac{1}{4}a^2$.

7) Setzt man nun $u = 0$, ſo erhält man endlich

den geſammten Widerſtand, den die Kugel leidet, $= 2\pi\lambda v^2 C = \frac{1}{2}\pi\lambda v^2 a^2$.

§. 87.

Die Fläche eines größten Kreiſes der Kugel iſt $= \pi a^2$; alſo der Widerſtand, den ſie leidet, wenn ſie ſich mit der Geſchwindigkeit v nach einer auf ſie ſenkrechten Richtung durch die Luft bewegt, $= \pi\lambda v^2 a^2$. Daraus folgt demnach:

Daß eine Kugel halb ſo viel Widerſtand finde, als ihr größter Kreis, der ſich mit eben der Geſchwindigkeit ſenkrecht auf ſeine Richtung fortbewegt.

Exempel. Eine Kugel alſo, die 6 Fuß im Durchmeſſer, und 19 Fuß Geſchwindigkeit hat, leidet 8,3565 ℔ Widerſtand (§. 85.).

§. 88.

Aufgabe. Ein Körper von gegebener Form und Maſſe fällt aus der Ruhe durch die Luft vertikal herab; man fragt, wie groß nach Verlauf der Zeit t ſeine Geſchwindigkeit v, und der zurückgelegte Fallraum x ſey.

Aufl. 1) Der Widerſtand, den ihm die Luft entgegenſetzt, iſt, wie wir geſehen haben, ſowohl von ſeiner äußern Form, als auch von ſeiner Geſchwindigkeit abhängig; ſo z. B. war er für ein Prisma, das ſich ſenkrecht auf ſeine Vorderfläche S mit der Geſchwindigkeit v bewegt, $= \lambda S v^2$, und für eine Kugel, deren Halbmeſſer $= a$ iſt, $= \frac{1}{2}\lambda\pi a^2 v^2$; wir wollen ihn daher allgemein $= L v^2$ ſetzen.

2) Außerdem verliert der Körper in der Luft noch

ſo viel von ſeinem abſoluten Gewichte, als die Luftmaſſe wiegt, die mit ihm gleiches Volumen hat. Nennt man alſo ſeine Maſſe, oder ſein abſolutes Gewicht $= M$, ſein Volumen $= V$, ſeine Dichte $= n$, die Dichte der Luft $= i$, ſo iſt $M = nV$, und der Verluſt, den er leidet $= iV$, folglich behält er noch das Gewicht $(n-i) V = (1 - \frac{i}{n}) M$.

3) Es wirken alſo in jedem Augenblicke zwey Kräfte auf den Körper: ſein relatives Gewicht $(1 - \frac{i}{n}) M$, womit er vertikal herabzuſinken ſtrebt, und nach entgegengeſetzter Richtung der Widerſtand Lv^2; daher hat man hier (§. 50.) $P = (1 - \frac{i}{n}) M - Lv^2$, und

$$dv = \frac{2gPdt}{M} = 2gdt\,(1 - \frac{i}{n} - \frac{Lv^2}{M}).$$

4) Man ſetze zur Abkürzung $2g\,(1 - \frac{i}{n}) = f$, und $\frac{2gL}{M} = \frac{f}{\varkappa^2}$, ſo wird

$$dv = fdt\,(1 - \frac{v^2}{\varkappa^2})$$

$$\text{alſo } \frac{2fdt}{\varkappa} = \frac{2\varkappa dv}{\varkappa^2 - v^2} = \frac{dv}{\varkappa + v} + \frac{dv}{\varkappa - v}$$

$$\text{und } \frac{2ft}{\varkappa} = \log(\varkappa + v) - \log(\lambda - v) = \log\left(\frac{\varkappa + v}{\varkappa - v}\right)$$

5) Wird nun noch $\frac{f}{\varkappa} = \omega$ geſetzt, ſo erhält man gegenſeitig:

$$\frac{\varkappa + v}{\varkappa - v} = e^{2\omega t}, \text{ woraus}$$

$$v = \varkappa \,.\, \frac{e^{2\omega t} - 1}{c^{2\omega t} + 1} \text{ wird.}$$

6) Multiplicirt man ferner die Gleichung $dv = \mathfrak{f}dt \left(1 - \frac{v^2}{\varkappa^2}\right)$ durch $\varkappa^2 v$, und ſetzt dann für vdt ſeinen Werth dx, ſo giebt dies

$$\varkappa^2 v dv = \mathfrak{f}dx\,(\varkappa^2 - v^2)$$

$$\text{alſo wird } 2\mathfrak{f}dx = \frac{2\varkappa^2 v dv}{\varkappa^2 - v^2}$$

folglich wenn man integrirt:

$$2\mathfrak{f}x = C - \varkappa^2 \log(\varkappa^2 - v^2)$$

und da für $v = 0$, auch $x = 0$ iſt, ſo hat man $C = \varkappa^2 \log \varkappa^2$, mithin $2\mathfrak{f}x = \varkappa^2 \log\left(\frac{\varkappa^2}{\varkappa^2 - v^2}\right)$.

7) Darin nun für v ſeinen Werth aus (5) ſubſtituirt, giebt endlich:

$$2\mathfrak{f}x = \varkappa^2 \log\left(\frac{(1 + e^{2\omega t})^2}{4e^{2\omega t}}\right)$$

$$\text{oder } x = \frac{M}{2gL} \,.\, \log\left(\frac{1 + e^{2\omega t}}{2e^{\omega t}}\right).$$

§. 89.

Wenn man in dem für die Geſchwindigkeit v gefundenen Ausdrucke Zähler und Nenner noch durch $e^{2\omega t}$ dividirt, ſo erhält man:

$$v = \varkappa \,.\, \frac{1 - e^{-2\omega t}}{2 + e^{-2\omega t}}$$

Läßt man nun hierin t unendlich wachſen, ſo nimmt $e^{-2\omega t}$ unendlich ab, folglich nähert ſich v unendlich der Grenze $\varkappa$. Das Fallen der Körper in der Luft iſt alſo zwar eine beſchleunigte Bewegung, aber doch von der Art, daß ſie ſich immer mehr und mehr einem gleichförmigen Beharrungszuſtande nähert, bey dem die Geſchwindigkeit $= \varkappa = \sqrt{\frac{(n-i)M}{nL}}$ iſt. Leidet der Körper von der Luft einen beträchtlichen Widerſtand, ſo ſieht man leicht, daß ſeine Geſchwindigkeit jener Grenze ſehr bald nahe kommen, und dann während der übrigen Zeit ſeines Fallens nur noch geringen Aenderungen unterworfen ſeyn müſſe.

§. 90.

Um doch wenigſtens für eine kurze Dauer der Bewegung bey Körpern, die nach Verhältniß ihres Gewichtes nur geringen Widerſtand finden, eine Vergleichung zwiſchen ihrer Fallhöhe in der Luft, und der im leeren Raume anzuſtellen, bringe man den für x gefundenen Ausdruck unter folgende Form:

$$x = \frac{M}{2gL} \log\left(\frac{e^{-\omega t} + e^{\omega t}}{2}\right)$$

Nun iſt $e^{-\omega t} = 1 - \omega t + \frac{1}{2}\omega^2 t^2 - \frac{1}{2.3}\omega^3 t^3 + \text{u.ſ.w.}$

$$e^{\omega t} = 1 + \omega t + \tfrac{1}{2}\omega^2 t^2 + \frac{1}{2.3}\omega^3 t^3 + \ldots$$

alſo wird: $\frac{e^{-\omega t} + e^{\omega t}}{2} = 1 + \frac{1}{2}\omega^2 t^2 + \frac{1}{2.3.4}\omega^4 t^4 + \ldots$

Dieſe Reihe $= 1 + z$ geſetzt, und davon den hyperboliſchen Logarithmen genommen, giebt:

$$x = \frac{M}{2gL}(z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - ..)$$

und wenn man den Werth für z wieder herſtellt:

$$x = \frac{M}{2gL}(\tfrac{1}{2}\omega^2 t^2 - \tfrac{1}{12}\omega^4 t^4 + \tfrac{1}{45}\omega^6 t^6 ..)$$

Die Dichte der Luft kommt ſelten gegen die Dichte des Körpers in Betracht; man kann alſo hier um ſo eher i gegen n weglaſſen, wodurch $\omega = \frac{f}{\varkappa} = 2g\sqrt{\frac{L}{M}}$ wird.

Daher bekommt man endlich:

$$x = gt^2 - \frac{2g^3t^4 . L}{3M} + \frac{32g^5t^6L^2}{45M^2} - ..$$

§. 91.

Für eine Kugel iſt nun z. B. $L = \frac{1}{2}\lambda\pi a^2 = 0{,}0262\pi a^2$ Loth, und wenn man ihre Dichte n auf die des Waſſers bezieht, wovon der Kubikfuß nach gewöhnlicher Annahme 70 ℔ wiegt, ſo iſt das Gewicht eines Kubikfußes ihrer Materie $= 70 . n$ ℔ $= 2240 . n$ Loth; dies mit ihrem Volumen $\frac{4}{3}\pi a^3$ multiplicirt, giebt ihre Maſſe $M = 8960 . \frac{1}{3}\pi a^3$, folglich $\frac{2Lg^3}{3M} = 0{,}000005848 . \frac{g^3}{na} = 0{,}0223 . \frac{1}{na}$; wodurch

$$x = 15{,}625\, t^2 - 0{,}0223 . \frac{t^4}{na} . \text{ wird.}$$

Exempel. Die Kugel beſtehe aus Eiſen, und

habe $\frac{1}{2}$ Fuß im Durchmeſſer, ſo iſt $a = \frac{1}{4}$, $n = 7,8$; man erhält alſo

$$x = 15,625\,t^2 - 0,0114\,t^4.$$

Hiernach betrüge z. B. ihr Fallraum in der erſten Sekunde 15,613 Fuß.

§. 92.

Iſt dagegen die Zeit des Fallens, und der Widerſtand in Vergleichung gegen die Maſſe des Körpers groß genug, daß man 1 gegen $e^{2\omega t}$ weglaſſen kann, ſo verwandelt ſich die Formel für x (§. 88.) in folgende:

$$x = \frac{M}{2gL}(\omega t - \log 2)$$

Man nehme noch zur Abkürzung das Gewicht, das dem Körper in der Luft übrig bleibt, als eine Größe, die unmittelbar gegeben iſt, $= G$, ſo wird $\frac{G}{M} = 1 - \frac{1}{n}$ (§. 88. 2.), alſo $f = \frac{2gG}{M}$, $\varkappa = \sqrt{\frac{Mf}{2gL}} = \sqrt{\frac{G}{L}}$, und folglich $\omega = \frac{f}{\varkappa} = \frac{2g}{M}\sqrt{GL}$.

Dies für ω in voriger Formel ſubſtituirt, giebt:

$$x = t\sqrt{\frac{G}{L}} - \frac{M.\log 2}{2gL}.$$

§. 93.

Es ſey nun der Halbmeſſer einer Kugel $= a$, das abſolute Gewicht eines Kubikfußes ihrer Materie $= D$,

ſo hat man $L = \frac{1}{2}\lambda\pi a^2$, $M = \frac{4}{3}\pi a^3 D$, folglich $\frac{G}{L}$ $= \frac{2G}{\lambda\pi a^2}$, $\frac{M}{2gL} = \frac{4aD}{3g\lambda}$, und daher:

$$x = t\sqrt{\frac{2G}{\lambda\pi a^2}} - \frac{4aD \log 2}{3g\lambda}$$

Geſetzt alſo, man hätte von einer Kugel, die aus einer ſehr leichten Materie beſtände, die Zeit t beobachtet, in der ſie von einer gegebenen Höhe x herabfällt, ſo ließe ſich daraus gegenſeitig der Koefficient λ auf eine leichte Art herleiten. Nennt man nemlich $\frac{t^2 G}{\pi a\, x^2} = A$, und $\frac{4aD \log 2}{3gx} = B$, ſo erhält man die Gleichung:

$$\lambda + B = \sqrt{2A\lambda}, \text{ oder}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda(A - B) + B^2 = 0, \text{ woraus}$$

$$\lambda = A - B + A\sqrt{\left(1 - \frac{2B}{A}\right)} \text{ wird.}$$

§. 94.

Um den Gebrauch dieſer ſehr einfachen und bequemen Formel zu erläutern, und zugleich auch, eine nähere und richtigere Beſtimmung des Werthes λ zu erhalten, weil ich davon auf die von Hawksbee in ſ. Exp. phyſico-mechan. Tom. I. pag. 27. angeführten Verſuche mit hohlen Glaskugeln, die er vom Thurme der St. Paulskirkche, eine Höhe von 220 engl. Fuß, herabfallen ließ, eine Anwendung machen; wobey ich noch erinnern muß, daß wegen der unvermeidlichen Fehler

der Beobachtung die Zeiten des Falles in nachſtehender Tafel durchgängig um 0,3″ geringer angenommen ſind, als der Verf. ſie angiebt.

Gewicht Gran.	Diam. engl. Zoll.	Zeit Sekunden.
510	5,1	8,2
642	5,2	7,7
599	5,1	7,7
515	5,0	7,9½
483	5,0	8,2

Was den erſten dieſer Verſuche betrift, ſo wird zuvörderſt nach angeſtellter Reduktion des engl. Maaßes auf rheinl. und des Gewichtes auf ℔, wozu folgende Vergleichungen dienen:

1 ℔ = 7680 Gr., und 1 engl. Fuß = 0,97146 Rheinl. Fuß.

1) $x = 213{,}72$, $a = 0{,}206435$, $G = 0{,}066406$, $t = 8{,}2$, alſo $V = \frac{4}{3}\pi a^3 = 0{,}03685$, und dies mit dem Gewichte eines Kubikfußes Luft $= \frac{7}{85}$ ℔ multiplicirt, giebt den Verluſt, den die Kugel in der Luft am Gewichte leidet $= 0{,}0030347$; daher wird ihr abſolutes Gewicht $M = 0{,}0694407$, und $D = \frac{M}{V} = 1{,}88441$.

2) Um ſich vorher erſt zu überzeugeu, daß man hier mit vollem Rechte 1 gegen $e^{2\alpha t}$ weglaſſen könne, gebrauche man vorläufig den zuvor für λ angenommenen Werth (§. 85.), der hier $= 0{,}001638$ iſt, weil

er ſich auf die Einheit ℔ bezieht, ſo erhält man $\omega t =$ $\frac{2gt}{M}\sqrt{\frac{1}{2}\lambda\pi a^2 G} = 9{,}956$, alſo $e^{2\omega t} = e^{19{,}912}$, eine Zahl, die aus 9 Ziffern beſteht, und wogegen folglich 1 auf keine Weiſe in Betracht kommt.

4) Dies vorausgeſetzt, wird nun die Rechnung folgende:

$$\log t^2 = 1{,}8276278$$
$$\log G = 0{,}8222086 - 2$$

$$\log t^2 G = 0{,}6498364$$

Ferner
$$\log x^2 = 4{,}6596904$$
$$\log a^2 = 0{,}6295668 - 2$$
$$\log \pi = 0{,}4971499$$

$$\log \pi a^2 x^2 = 3{,}7864071$$
$$\log A = 0{,}8634293 - 4$$
$$A = 0{,}00073018$$

5) Da in der Formel für B, log 2 den natürlichen Logarithmen bezeichnet, alſo $= 0{,}6931472$ iſt, ſo hat man

$$\log . 12 = 0{,}8408254 - 1$$
$$\log 4aD = 0{,}1920188$$

$$\log 4aD12 = 0{,}0328442$$
davon $\log 3gx = 4{,}0007864$ ſubtr.

bleibt: $\log B = 0{,}0320578 - 4$
$$B = 0{,}00010766.$$

6) Hieraus erhält man $1 - \frac{2B}{A} = 0{,}70511$, und

$$A\sqrt{(1-\frac{2B}{A})} = 0{,}00061314, \text{ folglich}$$

$$\lambda = A - B + A\sqrt{(1-\frac{2B}{A})} = 0{,}0012357$$

7) Eben ſo giebt der zweyte Verſuch

$\lambda = 0{,}0012873$

der dritte: . . . 0,0012878

der vierte . . . 0,0012059

und der fünfte . . . 0,0012174

Nimmt man zwiſchen dieſen fünf Werthen das Mittel, ſo bekommt man

$$\lambda = 0{,}001468.$$

8) demnach iſt der Widerſtand, den eine ebene Fläche von S Quad. Fußen leidet, die ſich durch die Luft mit der Geſchwindigkeit v ſenkrecht auf ihre Richtung bewegt, $= 0{,}0012468 \,.\, v^2 S \,.$ ℔.

9) und den eine Kugel leidet, deren Haldmeſſer = a Fuß, und Geſchwindigkeit $= v$ iſt, $= 0{,}0006234\, \pi a^2 v^2 = 0{,}00185847 \,.\, a^2 \,.\, v^2$.

§. 95.

Zum Beweiſe, daß der für λ gefundene Werth der Wahrheit ſehr nahe kommen müſſe, will ich noch von den Verſuchen ähnlicher Art, die **Desaguillers** mit Kugeln von leichten Materien angeſtellt hat, folgenden als Exempel beyfügen:

Bey einer mit Luft angefüllten Blaſe, die 5,3 engl. Zoll im Durchmeſſer, und 128 Gr. am Gewichte hatte, verfloſſen $19\frac{1}{8}''$, ehe ſie aus einer Höhe von 272

engl. Fuß, die nach unſerm Maaße 264 Fuß betragen, zum Boden herabkam.

Unſtreitig findet hier die Formel (§. 93.)

$$x = t\sqrt{\frac{2G}{\lambda\pi a^2}} - \frac{4aD \log 2}{3g\lambda}$$

ihre vollkommene Anwendung. Reducirt man nun die Data auf ihr gehöriges Maaß, ſo wird darinn $a = 0{,}2145$, $G = \frac{1}{80}$ ℔; alſo das erſte Glied $t\sqrt{\frac{2G}{\lambda\pi a^2}} = 263{,}46$ Fuß.

Ferner $V = 0{,}041357$; daher der Verluſt der Blaſe an ihrem abſoluten Gewichte $= 0{,}0034058$, welcher zu G addirt, $M = 0{,}0200725$ ℔ giebt. Dadurch bekommt man $\log D = 0{,}6860488 - 1$, und hieraus das zweyte Glied $\frac{4aD \log 2}{3g\lambda} = 4{,}94$; folglich $x = 258{,}52$ Fuß.

Nun war nach der Angabe . . $x = 264$

alſo beträgt die Abweichung $5\frac{1}{2}$ Fuß.

Eine genauere Uebereinſtimmung, als dieſe, darf man wohl gerade nicht erwarten, wenn man nur erwägt, daß die beobachtete Zeit leicht um $\frac{1}{2}''$ unrichtig ſeyn kann. Für $t = 20''$ erhielte man aus der Formel $x = 267$, folglich ſchon mehr, als der vorgeſchriebene Fallraum ausmacht.

§. 96.

Aufgabe. Ein Körper wird mit der Geſchwindigkeit c in der Luft vertikal aufwärts geworfen; man

ſucht für eine gegebene Zeit t ſeine Geſchwindigkeit v, und die Höhe, zu der er geſtiegen iſt.

Aufl. 1 Da hier beyde Kräfte (§. 88. 3.), ſowohl das relative Gewicht des Körpers G, als auch der Widerſtand der Luft Lv^2, ſeiner Bewegung entgegenwirken, ſo bekommt man:

$$Mdv = -2gdt\,(G + Lv^2),$$

oder, wenn wieder $\frac{2gG}{M} = f$, und $\frac{2gL}{M} = \frac{f}{\kappa^2}$ geſetzt wird:

$$dv = -fdt\left(1 + \frac{v^2}{\kappa^2}\right)$$

$$\text{alſo: } fdt = \frac{-dv}{1 + \frac{v^2}{\kappa^2}}$$

2) Man nenne $\frac{v}{\kappa} = u$, ſo wird $dv = \kappa du$, folglich:

$$\frac{fdt}{\kappa} = \frac{-du}{1 + u^2}, \text{ mithin}$$

$$\frac{ft}{\kappa} = C - \text{arc tang } u.$$

3) Für $t = 0$ iſt nun $v = c$, alſo $C = \text{arc tang } \frac{v}{\kappa}$; daher

$$\frac{ft}{\kappa} = \text{arc tang } \frac{c}{\kappa} - \text{arc tang } \frac{v}{\kappa}.$$

4) Die Differenz zweyer Bogen, deren Tangenten p und q ſind, gehört bekanntlich zur Tangente $\frac{p - q}{1 + pq}$;

ſetzt man alſo $p = \frac{c}{\varkappa}$, und $q = \frac{v}{\varkappa}$, ſo verwandelt ſich die vorige Gleichung in folgende:

$\frac{ft}{\varkappa} = \text{arc tang} \frac{(c - v)\varkappa}{\varkappa^2 + cv}$, woraus gegenſeitig

$\frac{(c - v)\varkappa}{\varkappa^2 + cv} = \text{tang} \frac{ft}{\varkappa}$, und wenn man tang $\frac{ft}{\varkappa} = z$ ſetzt:

$$v = \varkappa . \left(\frac{c - \varkappa z}{\varkappa + cz}\right) \text{ wird.}$$

5) Multiplicirt man ferner die Gleichung (1) noch durch v, und ſubſtituirt dann für vdt ſeinen Werth dx, ſo erhält man:

$$vdv = - \frac{fdx}{\varkappa^2} (\varkappa^2 + v^2), \text{ alſo}$$

$$\frac{2fdx}{\varkappa^2} = \frac{-2vdv}{\varkappa^2 + v^2}, \text{ und}$$

$$\frac{2fx}{\varkappa^2} = C - \log (\varkappa^2 + v^2)$$

6) Weil für $x = 0$, $v = c$ iſt, ſo wird in dieſer Gleichung $C = \log (\varkappa^2 + c^2)$, folglich:

$$x = \frac{\varkappa^2}{2f} . \log \left(\frac{\varkappa^2 + c^2}{\varkappa^2 + v^2}\right).$$

7) Hierin für v ſeinen Werth aus (4) geſetzt, giebt endlich:

$$x = \frac{\varkappa^2}{2f} \log \frac{(\varkappa + cz)^2}{\varkappa^2 (1 + z^2)},$$

oder, da $1 + z^2 = \text{Sec}^2 \frac{ft}{\varkappa}$ iſt:

$$x = \frac{\varkappa^2}{f} . \log \left[\left(1 + \frac{c}{\varkappa} \text{tang} \frac{ft}{\varkappa}\right) \text{Cos} \frac{ft}{\varkappa} \right].$$

§. 97.

Um zu finden, wieviel Zeit verfließt, bis der Körper ſeine größte Höhe erreicht, ſetze man in (4) $v = 0$, ſo bekommt man die ganze Dauer des Steigens $T = \frac{\varkappa}{f} . \text{arc tang} \frac{c}{\varkappa}$, oder, da $f = \frac{2gG}{M}$, und $\varkappa = \sqrt{\frac{G}{A}}$ iſt:

$$T = \frac{M}{2g\sqrt{GL}} . \text{arc tang}\, c\sqrt{\frac{L}{G}}.$$

Bey Körpern von beträchtlichem ſpecifiſchen Gewichte kann man, ohne daß es der nöthigen Schärfe nachtheilig werden könnte, $G = M$ ſetzen, wodurch $T = \frac{\sqrt{M}}{2g\sqrt{L}} . \text{arc tang}\, c\sqrt{\frac{A}{M}}$ wird.

Löſt man nun dieſen Ausdruck nach der bekannten Formel

$$\text{arc tang}\, u = u - \tfrac{1}{3}u^3 + \tfrac{1}{5}u^5 - \text{u. ſ. f.}$$

in eine Reihe auf, ſo erhält man endlich:

$$T = \frac{c}{2g}\left[1 - \frac{c^2L}{3M} + \frac{c^4L^2}{5M^2} - ..\right]$$

Exempel. Eine eiſerne Kugel von 6 Zoll Durchmeſſer werde mit einer Geſchwindigkeit von 100 Fuß in die Höhe geworfen; man fragt, wie lange ſie ſteigen werde?

Hier iſt $L = 0{,}0006234\, \pi a^2$, $M = \frac{4}{3}\pi a^3 D$,

$D = 546$ ℔, $a = \frac{1}{4}$; alſo $\frac{c^2L}{M} = 0{,}03425$, $\frac{c^4L^2}{M^2} =$

$0{,}00117$, und $T = \frac{c}{2g} \times 0{,}98881 = 3{,}164''$.

Im luftleeren Raume wäre $T = 3{,}2''$; daher bewirkt der Widerſtand der Luft in der ganzen Zeit des Steigens einen Unterſchied von $0{,}036''$.

§. 98.

Man ſetze auch in der für x (§. 96. 6.) gefundenen Formel $v = 0$, ſo erhält man für die größte Höhe, zu der der Körper hinaufſteigt

$$x = \frac{\varkappa^2}{2f} \log \left(1 + \frac{c^2}{\varkappa^2}\right).$$

Dieſen Ausdruck in eine Reihe verwandelt, und wieder $f = 2g$, $\varkappa = \sqrt{\frac{M}{L}}$ geſetzt, giebt:

$$x = \frac{c^2}{4g} \left[1 - \frac{c^2L}{2M} + \frac{c^4L^2}{3M^2} - \frac{c^6L^3}{4M^3} + \ldots\right]$$

So würde im vorigen Exempel $x = 0{,}98324 \cdot \frac{c^2}{4g} =$ $157{,}2$ Fuß, ſtatt daß im leeren Raume $x = \frac{c^2}{4g} = 160$ Fuß betrüge.

Vergleichung zwiſchen dem Steigen und nachherigen Fallen der Körper in der Luft.

§. 99.

Im leeren Raume iſt das Steigen und Fallen der

Körper eine zuſammenhängende Bewegung, bey der die Geſchwindigkeit nach einerley Geſetze erſt bis zu 0 abnimmt, und dann ins Negative übergeht. In der Luft hingegen hört dieſe Verbindung auf; da iſt nemlich, ſo lange der Körper ſteigt, die auf ihn wirkende Kraft $= G + Lv^2$, ſo bald aber ſeine Geſchwindigkeit $= 0$ geworden iſt, verwandelt ſich die Kraft plötzlich in $G - Lv^2$, die offenbar nicht mehr ſo vom negativen v abhängt, als erſtere vom poſitiven abhing. Alſo folgen beyde Bewegungen, das Steigen und das Fallen, in der Luft ganz verſchiedenen Geſetzen, und müſſen daher abgeſondert von einander betrachtet werden.

§. 100.

1) Es ſey nun, wie vorhin, die anfängliche Geſchwindigkeit des Körpers in $A = c$; ſeine Geſchwindigkeit in P, wenn er um den Raum $AP = x$ geſtiegen iſt, $= v$, und ſeine größte Höhe, die er erreicht $= h$, ſo iſt

$$x = \frac{\kappa^2}{2f} \log\left(\frac{\kappa^2 + c^2}{\kappa^2 + v^2}\right) \text{ (§. 96. 6.)}$$

$$\text{und } h = \frac{\kappa^2}{2f} \log\left(1 + \frac{c^2}{\kappa^2}\right)$$

$$\text{alſo } BP = h - x = \frac{\kappa^2}{2f} \log\left(1 + \frac{v^2}{\kappa^2}\right)$$

2) Ferner ſey ſeine Geſchwindigkeit an eben der Stelle P beym Herabfallen $= v'$, ſo erhält man aus der Formel §. 97. 6., wenn man darin $h - x$ ſtatt x, und v' ſtatt v ſetzt:

$$h - x = \frac{\varkappa^2}{2f} \log\left(\frac{\varkappa^2}{\varkappa^2 - v'^2}\right)$$

3) Beyde Werthe von $h - x$ gleich geſetzt, geben alſo:

$$1 + \frac{v^2}{\varkappa^2} = \frac{\varkappa^2}{\varkappa^2 - v'^2}$$

$$\text{oder } \left(1 + \frac{v^2}{\varkappa^2}\right)\left(1 - \frac{v'^2}{\varkappa^2}\right) = 1$$

$$\text{daher wird } v^2 - v'^2 - \frac{v^2 v'^2}{\varkappa^2} = 0.$$

4) Aus dieſer Gleichung bekommt man:

$$v'^2 = v^2 : \left(1 + \frac{v^2}{\varkappa^2}\right)$$

$$\text{und } v' = v : \sqrt{\left(1 + \frac{v^2}{\varkappa^2}\right)}$$

Man ſieht alſo offenbar, daß an einerley Stelle der Vertikale AB die Geſchwindigkeit des Körpers beym Herabfallen jedesmal geringer iſt, als beym Hinaufſteigen, und daß der Unterſchied zwiſchen beyden Geſchwindigkeiten deſto mehr beträgt, je größern Widerſtand der Körper in Verhältniß gegen ſeine Maſſe leidet.

5) Nennt man die Geſchwindigkeit, womit der Körper in A zurückkehrt $= c'$, ſo wird

$$c' = c : \sqrt{\left(1 + \frac{c^2}{\varkappa^2}\right)} = c : \sqrt{\left(1 + \frac{cL}{G}\right)}$$

In dem §. 97. angenommenen Falle wäre z. B.

$c' = c : \sqrt{(1{,}03425)} = 0{,}9833 \cdot c = 98{,}33$ Fuß.

§. 101.

Die Zeit des Steigens durch AB heiße $= T$, durch den Theil PB $= t'$, und die des Fallens durch eben den Raum BP $= t''$, ſo iſt zuvörderſt $T = \frac{\varkappa}{\mathfrak{f}} \cdot \text{arc tang} \frac{c}{\varkappa}$ (§. 97.), und daher: $t = T - \frac{\varkappa}{\mathfrak{f}} \cdot \text{arc tang} \frac{v}{\varkappa}$ (§. 96. 3.); folglich, da $t' = T - t$ iſt, $t' = \frac{\varkappa}{\mathfrak{f}} \cdot \text{arc tang} \frac{v}{\varkappa}$.

Man ſetze nun $v = \varkappa \text{ Cot } 2\xi$, ſo hat man $\frac{v}{\varkappa} = \text{tang}(\frac{1}{2}\pi - 2\xi)$, alſo $t' = \frac{\varkappa}{\mathfrak{f}}(\frac{1}{2}\pi - 2\xi)$.

Ferner wird $\sqrt{(1 + \frac{v^2}{\varkappa^2})} = \sqrt{(1 + \text{Cot } 2\xi^2)} = \text{Cosec} \cdot 2\xi$, folglich $v' = \varkappa \text{ Cot } 2\xi \cdot \text{Sin } 2\xi = \varkappa \text{ Cos } 2\xi$. Dies für v' in die Formel §. 88. 4. ſubſtituirt, giebt:

$$t'' = \frac{\varkappa}{2\mathfrak{f}} \log\left(\frac{1 + \text{Cos } 2\xi}{1 - \text{Cos } 2\xi}\right) = \frac{\varkappa}{2\mathfrak{f}} \log\left(\frac{2 \text{ Cos } \xi^2}{2 \text{ Sin } \xi^2}\right)$$

$$= \frac{\varkappa}{\mathfrak{f}} \log \text{ Cot } \xi.$$

Für $v = c$, ſey $\xi = \gamma$, ſo wird die Zeit des Steigens durch AB $= \frac{\varkappa}{\mathfrak{f}}(\frac{1}{2}\pi - 2\gamma)$, und die des Fallens durch AB $= \frac{\varkappa}{\mathfrak{f}} \log \text{ Cot } \gamma$.

Aus beyden zuſammen genommen entſpringt alſo die ganze Zeit, die vom Aufſteigen des Körpers aus A

bis zu ſeiner Rückkehr nach A verfließt, $= \frac{\varkappa}{\mathfrak{f}}(\frac{1}{2}\pi - 2\gamma + \log \text{Cot}\,\gamma)$.

Dieſe Formel giebt **Lambert** in den Mem. de l'acad. de Berlin 1765.

Exempel. In §. 97. erhält man $\frac{c}{\varkappa} = \text{Cot}\,2\gamma = 0{,}18507$, alſo $90° - 2\gamma = 10°29'$, und dieſen Winkel in einen Bogen verwandelt, giebt: $\frac{1}{2}\pi - 2\gamma = 0{,}1829687$. Ferner wird:

$\log$ nat. $\text{Cot}\,\gamma = 0{,}1839982$, und $\frac{\varkappa}{\mathfrak{f}} = 17{,}29497$, folglich die ganze Zeit des Steigens und Fallens $= 0{,}366967 \cdot \frac{\varkappa}{\mathfrak{f}} = 6{,}3466''$.

Ueber die Bahn geworfener Körper in der Luft.

§. 102.

Es bleibt jetzt noch zu beſtimmen übrig, welchen Einfluß der Widerſtand der Luft auf die Bewegung des Körpers hat, wenn ihm Anfangs die Geſchwindigkeit c nach irgend einer ſchrägen Richtung A$\varkappa$ ertheilt wird, die mit der Horizontale einen gegebenen Winkel I macht.

Fig. 7. Man ſetze, wie im §. 65., der Körper habe während der Zeit t von ſeiner Bahn den Bogen AM = s zurückgelegt, und ſey nun gegenwärtig im Punkte M der Vertikale MP = y, die von der durch A gehenden Vertikale um AP = x entfernt liegt. Ferner ſey

ſeine Geſchwindigkeit an dieſem Orte $= v$, und der Winkel mMI, den ſeine jetzige Richtung, oder das Element Mm, das er jetzt zu durchlaufen im Begriff iſt, mit der Horizontale MI macht, $= \varphi$.

1) So wirken auf ihn in dieſem Augenblicke zwey Kräfte, ſein relatives Gewicht G nach der Vertikale MP, und der Widerſtand der Luft $= Lv^2$, nach einer Richtung, die der ſeinigen entgegengeſetzt iſt, und alſo ebenfalls von der Horizontale um den Winkel φ abweicht.

2) Um dieſe Kräfte auf zwey andere zurück zu führen, deren Richtungen mit AP und PM parallel ſind (§. 58.), zerlege man die Kraft Lv^2 in eine nach $IM = Lv^2 \operatorname{Cos} \varphi$, und in eine nach $MP = Lv^2 \operatorname{Sin} \varphi$; alsdann giebt letztere in Verbindung mit G die vertikale Kraft $Q = - G - Lv^2 \operatorname{Sin} \varphi$, und erſtere allein die horizontale Kraft $P = - Lv^2 \operatorname{Cos} \varphi$; man erhält alſo die Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2gP}{M} = - \frac{2gLv^2 \operatorname{Cos} \varphi}{M}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2gQ}{M}$$

$$= -2g \left(\frac{G}{M} + \frac{Lv^2 \operatorname{Sin} \varphi}{M}\right) \text{ und } v = \frac{ds}{dt}.$$

3) Erſtere Gleichung durch $\operatorname{tang} \varphi dt^2$ multiplicirt, und von der zweyten, durch dt^2 multiplicirt, abgezogen, giebt:

$$d^2y - \operatorname{tang} \varphi d^2x = - \frac{2gdt^2 . Lv^2 \operatorname{Cos} \varphi}{M}$$

4) Nun iſt $dy = \operatorname{tang} \varphi dx$, alſo $d^2y \operatorname{tang} \varphi d^2x$

$+ \frac{dx d\varphi}{\cos\varphi^2}$; wird dies in voriger Gleichung für d^2y ſubſtituirt, ſo bekommt man:

$$\frac{dx d\varphi}{\cos\varphi^2} = - \frac{2gGdt^2}{M}.$$

5) Da ferner $dx = \cos\varphi ds$, ſo wird $vdt = ds = \frac{dx}{\cos\varphi}$, wodurch die erſtere Gleichung aus (2) ſich in folgende verwandelt:

$$d^2x = - \frac{2gLdx^2}{M \cos\varphi}.$$

6) Dieſe mit der vörhergehenden multiplicirt, giebt:

$$\frac{2gGd^2xdt^2}{M} = \frac{2gLdx\, d\varphi}{M \cos\varphi^3}, \text{ oder}$$

$$\frac{Gdt^2}{L} \cdot \frac{d^2x}{dx^3} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi^3}$$

wovon die Integralgleichung:

$$C - \frac{Gdt^2}{2Ldx^2} = \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi^3} \text{ iſt.}$$

7) Alſo wird $dt^2 = \frac{2Ldx^2}{G} \cdot \left(C - \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi^3}\right)$, und wenn man dies für dt^2 in der Gleichung (4) ſubſtituirt:

$$\frac{dx d\varphi}{\cos\varphi^2} = - \frac{4gLdx^2}{M} \cdot \left(C - \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi^3}\right),$$

woraus für dx und dy folgende Werthe entſpringen:

$$dx = - \frac{M d\varphi}{4gL \cos\varphi^2 \left(C - \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi^3}\right)} \text{ und}$$

$$dy = \text{tang}\,\varphi dx = -\frac{M\,\text{tang}\,\varphi d\varphi}{4gL\,\text{Cos}\,\varphi^2\left(C - \int \frac{d\varphi}{\text{Cos}\,\varphi^3}\right)}$$

8) Man ſetze noch tang $\varphi = u$, ſo wird $du = \frac{d\varphi}{\text{Cos}\,\varphi^2}$, folglich $\int \frac{d\varphi}{\text{Cos}\,\varphi^3} = \int du\ \text{Sec}\ \varphi = \int du \sqrt{(1 + u^2)}$. Dadurch bekommen die für dx und dy gefundenen Ausdrücke endlich folgende Geſtalt:

$$dx = -\frac{M du}{4gL\left[C - \int du \sqrt{(1 + u^2)}\right]},$$

und $$dy = -\frac{M u du}{4gL\left[C - \int du \sqrt{(1 + u^2)}\right]}$$

§. 103.

Die Wurzelgröße $\sqrt{(1 + u^2)}$ läßt ſich bekanntlich in folgende Reihe auflöſen:

$$\sqrt{(1 + u^2)} = 1 + \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{8}u^4 + \tfrac{1}{16}u^6 - \tfrac{5}{128}u + \ldots$$

Dieſe mit du multiplicirt, und dann integrirt, giebt:

$$\int du \sqrt{(1 + u^2)} = u + \tfrac{1}{6}u^3 - \tfrac{1}{40}u^5 + \tfrac{1}{112}u^7 - \tfrac{5}{1152}u^9 + \ldots$$

Setzt man daher $\int du \sqrt{(1 + u^2)} = \varkappa u$, ſo wird:

$$\varkappa = 1 + \tfrac{1}{6}u^2 - \tfrac{1}{40}u^4 + \tfrac{1}{112}u^6 - \ldots$$

Wenn u kleiner als 1 iſt, ſo läuft dieſe Reihe ſchnell zuſammen, und ſelbſt ihr zweytes Glied wird ſchon in Vergleichung gegen das erſte gering, ſo daß in ſolchen Fällen $\varkappa$ von 1 nur wenig verſchieden ſeyn kann. Für $\varphi = 30°$, oder $u = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$ wird doch nur $\varkappa = 1{,}05318$, ob hier gleich u der Einheit ſchon ziemlich nahe kommt.

So lange alſo φ unter 30° bleibt, wächſt dieſer Koefficient in Vergleichung des Winkels äußerſt langſam: die ganze Aenderung nemlich, die $\varkappa$ erleidet, während der Winkel φ von 0° bis zu 30° anwächſt, beträgt nicht mehr, als etwa $\frac{1}{20}$ ſeines anfänglichen Werthes.

Dergleichen Größen nun, die ſo langſamen Aenderungen unterworfen ſind, kann man allezeit da, wo nicht die allerſtrengſte Genauigkeit beobachtet werden muß, als beſtändige Größen in den Kalkul einführen, wofern man ihnen nur einen Werth beylegt, der zwiſchen den verſchiedenen Werthen, die ſie nach und nach bekommen können, das Mittel hält.

§. 104.

Der Winkel φ iſt im aufſteigenden Bogen der Kurve abnehmend, und daher jederzeit kleiner als der anfängliche Winkel I. Da nun dieſer Bogen bey weitem den größten Theil der Bahn des Körpers ausmacht, ſo läßt ſich in Fällen, wo I nicht über 30° beträgt, die eben gedachte Vorausſetzung mit Sicherheit anwenden. Dieſer zu Folge wird alſo, wenn man noch $\frac{M}{4gL} = f$ ſetzt:

$$dx = -\frac{fdu}{C - \varkappa u} \text{ und}$$

$$dy = -\frac{fudu}{C - \varkappa u}, \text{ oder}$$

$$\frac{\varkappa^2 dy}{Cf} = \frac{\varkappa du}{C} - \frac{\varkappa du}{C - \varkappa u}$$

wovon die Integralgleichungen folgende ſind:

$$x = A + \frac{f}{\varkappa} . \log (C - \varkappa u)$$

$$y = B + \frac{fu}{\varkappa} + \frac{Cf}{\varkappa^2} \log (C - \varkappa u).$$

§. 105.

Die beſtändige Größe C läßt ſich auf folgende Art beſtimmen:

1) Es iſt $dx = ds \, Cos \, \varphi$, alſo $\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} . Cos \, \varphi$ $= v \, Cos \, \varphi$; ſetzt man daher in der Gleichung §. 102. 6., $\varphi = I$, ſo wird darin $\frac{dx}{dt} = c \, Cos \, I$, folglich

$C - \frac{G}{2Lc^2 Cos \, I^2}$ = dem Werthe des Integrals $\int \frac{d\varphi}{Cos \, \varphi^3}$ für $\varphi = I$.

2) Um $\frac{d\varphi}{Cos \, \varphi^3}$ oder $du \sqrt{(1 + u^2)}$ zu integriren, ſetze man $\sqrt{(1 + u^2)} = z - u$, ſo erhält man $1 = z^2 - 2uz$, und daraus $u = \frac{z^2 - 1}{2z}$, alſo $du = \frac{(z^2 + 1) \, dz}{2z^2}$; ferner $z - u = \frac{z^2 + 1}{2z}$, folglich:

$$du \sqrt{(1 + u^2)} = (z - u) \, du = \frac{(z^2 + 1)^2 dz}{4z^3},$$

und $\int du \sqrt{(1 + u^2)} = \frac{1}{2} \log z + \frac{1}{8} \left(\frac{z^4 - 1}{z^2}\right)$. Nun iſt $z^4 = (1 + 2uz)^2 - 1 = 4uz + 4u^2z^2$, und $\frac{z^4 - 1}{z^2}$

$$= \frac{4uz + 4u^2z^2}{1 + 2uz} = 4uz - \frac{4u^2z^2}{z^2} = 4u\,(z - u)$$
$= 4u\sqrt{(1 + u^2)}$, daher wird:

$$\int du\sqrt{(1 + u^2)} = \tfrac{1}{2}u\sqrt{(1 + u^2)} + \tfrac{1}{2}\log [u + \sqrt{(1 + u^2)}].$$

3) Setzt man wieder tang φ für u, ſo bekommt man:

$$u + \sqrt{(1 + u^2)} = \text{tang}\,\varphi + \text{Sec}\,\varphi = \frac{1 + \text{Sin}\,\varphi}{\text{Cos}\,\varphi} =$$
$$\frac{1 + \text{Cos}\,(90^\circ - \varphi)}{\text{Sin}\,(90^\circ - \varphi)} = \frac{2\,\text{Cos}\,(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)^2}{2\,\text{Sin}\,(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)\,\text{Cos}\,(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)}$$
$= \text{Cot}\,(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) = \text{tang}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$, wodurch endlich $\int \frac{d\varphi}{\text{Cos}\,\varphi^3} = \frac{1}{2}\,\text{tang}\,\varphi\,\text{Sec}\,\varphi + \frac{1}{2}\log\text{tang}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$ wird.

4) Alſo iſt $C = \frac{G}{2Lc^2\,\text{Cos}\,I^2} + \frac{1}{2}\,\text{tang}\,I\,\text{Sec}\,I + \frac{1}{2}\log\text{tang}\,(45^\circ + \frac{1}{2}I)$.

§. 106.

Es kommt jetzt noch auf die Entſcheidung der Frage an, welchen Werth von u oder φ man für den mittlern anzunehmen habe? Wofern die Geſchwindigkeit des Wurfes c einigermaßen groß iſt, ſo ſieht man leicht, daß der Körper den größten Theil des aufſteigenden Bogens hindurch von ſeiner erſten Richtung abweichen, und folglich der Winkel φ nur erſt nahe am Scheitel der Bahn merklich kleiner als I werden könne; alſo darf man hier keinen andern beſtimmten Werth für

φ, als den anfänglichen $= \mathrm{I}$ zulaſſen. Im niederſteigenden Bogen hingegen iſt φ Anfangs $= 0$, wird nachher $= -\mathrm{I}$, und wächſt dann während der übrigen Zeit des Fallens noch weiter ins Negative fort, ſo daß offenbar kein merklicher Fehler entſtehen kann, wenn man in dieſem Theile der Bahn den mittlern
I Werth von $\varphi = -\mathrm{I}$ ſetzt. Beyde Winkel nun, ſowohl I als $-\mathrm{I}$, haben einerley Tangente mit entgegengeſetzten Zeichen, und beſtimmen folglich $\varkappa$ auf eine und dieſelbe Art. Es wird nemlich für beyde $\varkappa = 1 + \frac{1}{6}\tang \mathrm{I}^2 - \frac{1}{40}\tang \mathrm{I}^4 + \ldots$, oder nach dem im §. 105. 3. gefundenen Integralausdrucke:

$$\varkappa = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sec}\,\mathrm{I} + \frac{\log\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}\mathrm{I})}{2\operatorname{tang}\mathrm{I}}$$

wodurch folgende Gleichung entſteht:

$$C - \varkappa\operatorname{tang}\mathrm{I} = \frac{G}{2Lc^2\,\mathrm{Cos}\,\mathrm{I}^2}.$$

§. 107.

Man ſetze in den für x und y (§. 104.) gefundenen Formeln $\varphi = \mathrm{I}$, oder $n = \operatorname{tang}\mathrm{I}$, ſo wird

$$0 = A + \frac{f}{\varkappa}.\log(C - \varkappa\operatorname{tang}\mathrm{I}), \text{ und}$$

$$0 = B + \frac{f\operatorname{tang}\mathrm{I}}{\varkappa} + \frac{Cf}{\varkappa^2}\log(C - \varkappa\operatorname{tang}\mathrm{I})$$

und daraus:

$$x = \frac{f}{\varkappa}\log\frac{C - \varkappa\operatorname{tang}\varphi}{C - \varkappa\operatorname{tang}\mathrm{I}}, \text{ und}$$

$$y = \frac{f}{\varkappa}(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\mathrm{I}) + \frac{Cf}{\varkappa^2}\log\frac{C - \varkappa\operatorname{tang}\varphi}{C - \varkappa\operatorname{tang}\mathrm{I}}.$$

Wenn man nun erſtere Gleichung durch C, letztere durch $\varkappa$ multiplicirt, und dann beyde von einander ſubtrahirt, ſo bleibt:

$$\varkappa y - Cx = f(\tan\varphi - \tan I)$$

Ferner erhält man aus der erſten Gleichung:

$$\varkappa \tan\varphi = C - (C - \varkappa \tan I)\, e^{\frac{\varkappa x}{f}}$$

$$\text{oder } \varkappa \tan\varphi = C - \frac{G e^{\frac{\varkappa x}{f}}}{2Lc^2 \cos I^2}$$

Dies für tang φ in die vorige Gleichung ſubſtituirt, giebt endlich:

$$\varkappa y - Cx = \frac{Gf(1 - e^{\frac{\varkappa x}{f}})}{2\varkappa Lc^2 \cos I^2},$$

oder, wenn für C ſein Werth aus §. 105. geſetzt wird:

$$y = x\left(\tan I + \frac{G}{2L\varkappa c^2 \cos I^2}\right) + \frac{Gf(1 - e^{\frac{\varkappa x}{f}})}{2L\varkappa^2 c^2 \cos I^2}$$

welches eben die Formel iſt, die Bezout in ſ. Cours de Math. à l'uſage du corps roy. de l'artill. P. IV. durch einen ähnlichen, wiewohl etwas mühſamern, Kalkul herausbringt.

§. 108.

Setzt man hierin y = o, ſo bekommt man:

$$o = x\left(\tan I + \frac{G}{2L\varkappa c^2 \cos I^2}\right) + \frac{Gf}{2L\varkappa^2 c^2 \cos I^2}(1 - e^{\frac{\varkappa x}{f}})$$

eine Gleichung mit zweyen Wurzeln x = o, und x =

AB, wovon letztere ſich auf den zweyten Durchſchnittspunkt B der Kurve mit der Horizontale AB bezieht, und alſo die Weite des ganzen Wurfes angiebt.

Man kann dieſe nicht unmittelbar aus der Gleichung herleiten; hat man aber bereits einen Werth b gefunden, der ihr nahe kommt, ſo daß, wenn $x = b + i$ geſetzt wird, der unbekannte Theil i nur noch in Vergleichung gegen b gering iſt, ſo läßt ſich i auf folgende Art ſehr leicht beſtimmen:

1) Man nenne der Kürze wegen die zu x und $1 - e^{\frac{\kappa x}{f}}$ gehörigen Koefficienten A und B, oder drücke die obige Gleichung ſo aus:

$$o = Ax + B\left(1 - e^{\frac{\kappa x}{f}}\right),$$

ſo wird, wenn man darin $x = b + i$ ſetzt:

$$o = Ab + Ai + B\left(1 - e^{\frac{\kappa b}{f}} \,.\, e^{\frac{\kappa i}{f}}\right)$$

2) Nun hat man bekanntlich für $e^{\frac{\kappa i}{f}}$ folgende Reihe:

$$e^{\frac{\kappa i}{f}} = 1 + \frac{\kappa i}{f} + \frac{\kappa^2 i^2}{2f^2} + \frac{\kappa^3 i^3}{6f^3} + \ldots$$

wovon man hier, weil i klein, und f ſehr groß iſt (§. 104.), bloß die zwey erſten Glieder zu nehmen braucht. Dieſe Vorausſetzung giebt alſo $e^{\frac{i}{f}} = 1 + \frac{\kappa i}{f}$, und daher:

o =

$$0 = Ab + Ai + B\left(1 - e^{\frac{\varkappa b}{f}}\right) - \frac{\varkappa i B}{f} . e^{\frac{\varkappa b}{f}}$$

3) In dieſer Gleichung iſt $Ab + B\left(1 - e^{\frac{\varkappa b}{f}}\right)$ der Werth von y für $x = b$, alſo bekannt. Man ſetze ihn $= d$, ſo erhält man endlich:

$$\left(\frac{\varkappa B}{f} . e^{\frac{\varkappa b}{f}} - A\right) i = d\text{; oder}$$

$$i = \frac{df}{\varkappa B . e^{\frac{\varkappa b}{f}} - Af}$$

Exempel. In Huttons math. and phil. tracts. 9. Abh. findet ſich unter einer Menge von Angaben balliſtiſcher Verſuche pag. 263. auch eine Tafel, die außer der anfänglichen Geſchwindigkeit der Kugel zugleich die Schußweite für mehrere Richtungswinkel und Ladungen enthält. Die Geſchwindigkeiten ſind zwar nicht als ganz zuverläßig anzuſehen, da ſie der Verf. nach Robins Methode aus Beobachtungen des Pendelbogens beſtimmt hat, und die Rechnung noch nach der gewöhnlichen Formel anſtellt, die nach Lamberts Bemerkung der Sache nicht völlig angemeſſen iſt; indeß will ich doch eine dieſer Angaben zur Erläuterung des vorigen Kalkuls hier beyfügen:

Eine Kugel von 1,96 engl. Zoll Durchmeſſer, und 16 Unzen $8\frac{1}{3}$ Drachmen Gewicht bekam unter einem Erhöhungswinkel von 15° eine Geſchwindigkeit von 1234 engl. Fuß. Hier hat man alſo $c = 1198{,}7$; $a = 0{,}07934$; $G = 1{,}0651$ Pfund, $\varkappa = 1{,}0118405$, und $L = 0{,}0006234\pi a^2$, folglich

$$\log L = 0{,}0909011 - 5$$

$$\log 2\varkappa c^2 \operatorname{Cos} I^2 = 6{,}4335100$$

$$\log 2L\varkappa c^2 \operatorname{Cos} I^2 = 1{,}5244111$$

$$\log G = 0{,}0273920$$

$$\log \frac{G}{2L\varkappa c^2 \operatorname{Cos} I^3} = 0{,}5029809 - 2,$$

dem die Zahl = 0,0318405 zugehört;
dazu tang I = 0,2679492 addirt,

giebt A = 0,2997897.

Ferner wird, wenn man hier M = G annimmt, log f = 3,1406109, und daraus log B = 1,6384796. Setzt man nun x = 4800, ſo erhält man $\frac{xx}{f}$ log e = 0,43429448 . $\frac{xx}{f}$ = 1,5259023, folglich $e^{\frac{xx}{f}}$ = 33,5662, und B $(1 - e^{\frac{xx}{f}})$
= 1416,6
Ax = 1439,0

alſo d = 22,4,

$i = \frac{2240}{77} = 29$ Fuß, und x = 4829 Fuß.

Die beobachtete Schußweite iſt dagegen nur 4660 engl. oder 4527 rheinl. Fuß: es iſt aber leicht möglich, daß dieſe Abweichung allein in der unrichtigen Angabe der Geſchwindigkeit ihren Grund hat.

§. 109.

Eine zweyte Näherungsmethode, die, wie die vorhergehende, zuerſt von Herrn Bezout angegeben, nachmals aber durch Herrn Krafts Bemühungen *) zu einer größern Vollkommenheit gebracht iſt, beſteht darin, daß man für das Integral $\int du\sqrt{(1+u^2)}$ die Formel $u + \varkappa u^3$ annimmt, und darin dem Koefficienten $\varkappa$ wieder einen mittlern Werth beylegt. Vergleicht man nun dieſe Formel mit der für $\int du\sqrt{(1+u^2)}$ (§. 112.) gefundenen Reihe, ſo bekommt man

$$\varkappa = \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{40}u^2 + \tfrac{1}{112}u^4 - \ldots$$

alſo wird z. B.

*) Man ſehe hierüber deſſen Abhandlung in den Actis Acad. Sc. Petrop. 1780 P. I. pag. 154 u. f.

für $\varphi = 0$ oder $u = 0$, $x = 0{,}16666\ldots$
... 30° ... $\sqrt{\tfrac{1}{3}}$ ... $0{,}15$
... 45° ... 1 ... $0{,}14779$,

woraus man leicht ſieht, daß die Größe x in der Bedeutung, wie ſie hier gebraucht wird, noch weit geringeren Aenderungen unterworfen ſey, als in der erſtern, und daß folglich dies Verfahren nicht allein eine weit größere Genauigkeit gewähre, als das vorige, ſondern auch bey größern Erhöhungswinkeln noch mit gleicher Sicherheit ſich anwenden laſſe; ich kann mich aber, wegen der umſtändlichern Rechnung, die damit verbunden iſt, nicht darauf einlaſſen, es hier weiter auseinander zu ſetzen, und muß deshalb auf die erwähnte Abhandlung verweiſen.

Fünftes Kapitel.

Zurückführung der mechaniſchen Geſetze auf das Gleichgewicht.

---

§. 110.

Wenn ein Körper, deſſen Maſſe $= M$ iſt, fortdauernd von einer Kraft P nach einerley Richtung getrieben wird, und dadurch nach Verlauf einer beſtimmten Zeit t die Geſchwindigkeit v bekommt, ſo hat man (§. 50. 9.)

für die augenblickliche Aenderung dieſer Geſchwindigkeit folgende Gleichung:

$$dv = \frac{2gPdt}{M}$$

Gegenſeitig entſpringt hieraus die Formel:

$$P = \frac{Mdv}{2gdt}$$

für die Kraft, die in jedem Augenblicke die Bewegung des Körpers beſchleunigen oder verzögern muß, wenn ſeine Geſchwindigkeit nach irgend einem Geſetze wachſen oder abnehmen ſoll.

§. 111.

Man ſetze nun, der Körper erhalte unter gewiſſen Umſtänden eben dieſe Bewegung durch eine andere Kraft V; ſo folgt nothwendig, daß beyde Kräfte V und P, einzeln genommen, einerley Wirkung auf den Körper ausüben, und alſo in jedem beſtimmten Zeitpunkte äquipollent ſeyn müſſen. Wird daher die Kraft P nach entgegengeſetzter Richtung auf den Schwerpunkt des Körpers angebracht, ſo entſteht unter den angenommenen Bedingungen zwiſchen ihr und der Kraft V Gleichgewicht.

Dieſe Betrachtung leitet auf eine ſehr einfache Auflöſung folgender Aufgabe:

§. 112.

Die Maſſe M erhält durch eine gegebene Kraft V, die nicht unmittelbar auf ihren Schwerpunkt wirkt, eine fortgehende Bewegung nach irgend einer geraden Linie;

man fragt, wie unter dieſen Umſtänden ihre Geſchwindigkeit v für eine gegebene Zeit t zu beſtimmen ſey.

Aufl. Man ſuche die Kraft P, die gegen die Richtung der Maſſe auf ihren Schwerpunkt angebracht, der Kraft V das Gleichgewicht hält; ſo iſt dieſe nach entgegengeſetzter Richtung der Kraft V äquipollent, und beſtimmt alſo das Geſetz der Bewegung. Es wird nemlich, wenn man ſie gefunden hat: $dv = \frac{2gPdt}{M}$.

§. 113.

Fig. 2. **Exempel I.** Die Maſſe gleite von einer ſchiefen Ebene CA herab, die gegen die Horizontale unter dem Winkel CAB = I geneigt iſt.

Hier ſind unter V zwey Kräfte zugleich begriffen: das abſolute Gewicht der Maſſe = M, und der Widerſtand, den das Reiben am Boden nach der Richtung AC hervorbringen. Beyden ſoll nun die Kraft P, im Schwerpunkte der Maſſe nach der Richtung AC angebracht, das Gleichgewicht halten; alſo hat man (Statik §. 320.):

$$P = M\,(\mathrm{Sin}\,I - \lambda\,\mathrm{Cos}\,I)$$

folglich $dv = \frac{2gPdt}{M} = 2gdt\,(\mathrm{Sin}\,I - \lambda\,\mathrm{Cos}\,I)$

und in der Vorausſetzung, daß die Friktion von der Geſchwindigkeit v unabhängig ſey:

$$v = c + 2gt\,(\mathrm{Sin}\,I - \lambda\,\mathrm{Cos}\,I)$$

wo c die anfängliche Geſchwindigkeit bedeutet.

§. 114.

II. Auf einer vertikalſtehenden Schraube liegt eine Laſt M, die durch die Kraft V vermittelſt eines Hebelarmes, deſſen Länge = f iſt, in die Höhe gehoben wird; man ſucht für eine gegebene Zeit t die Geſchwindigkeit derſelben.

Man ſetze die Höhe der Schraubengänge = h; ferner, um zugleich die Friktion in Rechnung zu bringen, den mittlern Halbmeſſer der Schraube = r, den Winkel NMO = ϑ (Statik §. 243.), $\frac{h}{2\pi r} = \text{tang}\,\alpha$, $\sqrt{(\text{tang}\,\alpha^2 + \text{tang}\,\vartheta^2)} = \text{tang}\,I$, und endlich die Verhältnißzahl $\lambda = \text{tang}\,\omega$; ſo iſt der Kraft V im Schwerpunkte der Laſt die Kraft $P = \frac{2\pi V f\,\text{tang}\,I}{h\,\text{tang}\,(I + \omega)}$ äquipollent (§. 322.).

Hiervon noch das Gewicht der Maſſe abgezogen, das nach entgegengeſetzter Richtung wirkt, bleibt die Kraft P — M übrig, wodurch die Laſt unmittelbar nach vertikaler Richtung aufwärts getrieben wird. Man erhält alſo:

$$dv = 2g dt\,(\frac{P-M}{M}) = 2g dt\,(\frac{P}{M} - 1)$$

und, wenn V, folglich auch P, unveränderlich iſt:

$$v = c + 2gt\,(\frac{P}{M} - 1) = c + 2gt\,[\frac{2\pi V f\,\text{tang}\,I}{hM\,\text{tang}(I+\omega)} - 1].$$

§. 115.

Es ſey die Maſſe M noch mit einer zweyten Maſſe N in eine ſolche Verbindung gebracht, daß bey ihren

Bewegungen eine gegenſeitige Rückwirkung der einen auf die andere ſtatt finde. Durch gegebene Kräfte erhalte jede von ihnen ihre eigene Bewegung nach irgend einer geraden Linie, und zwar ſey nach Verlauf der Zeit t die Geſchwindigkeit der erſtern $= v$, die der leztern $= u$; ſo erhellet aus §. 110., daß dieſe Bewegungen nach eben den Geſetzen erfolgen würden, wenn ſtatt der vorhandenen Kräfte auf die Schwerpunkte der beyden Maſſen unmittelbar die Kräfte $P = \frac{Mdv}{2gdt}$ und $Q = \frac{Ndu}{2gdt}$ wirkten. Alſo müſſen dieſe den gegebenen Kräften in einerley Zeitpunkte der Bewegung äquipollent ſeyn, und folglich nach entgegengeſetzter Richtung angebracht, ihnen das Gleichgewicht halten.

Die Folgerungen, die ſich daraus ziehen laſſen, ſind zur Beſtimmung der Geſchwindigkeiten v und u allemal hinreichend, wofern man nur die übrigen Bedingungen der Aufgabe damit gehörig zu verbinden ſucht. In einzelnen Fällen wird ſich dies deutlicher zeigen laſſen.

§. 116.

Fig. 14. **Aufgabe.** Die beyden Maſſen M und N hängen an zweyen mit einander verbundenen Rollen, deren Halbmeſſer $CA = a$, und $CB = b$ ſind. Erſtere hat das Uebergewicht, und zieht beym Herabſinken die andere aufwärts; man ſucht für eine gegebene Zeit t ihre Geſchwindigkeit v, und den von ihr zurückgelegten Raum $AM = x$.

Aufl. 1) Die Richtungen, nach denen die beyden Maſſen fortrücken, ſind alſo AM und NB, und die auf ſie wirkenden Kräfte, ihre Gewichte M und N. Wenn man nun zu dieſen noch die virtuellen Kräfte $P = \frac{Mdv}{2gdt}$ und $Q = \frac{Ndu}{2gdt}$ nach den entgegengeſetzten Richtungen MA und BN hinzufügt, ſo erhält man die Kräfte $M - P$ und $N + Q$, die einander an den beyden Rollen das Gleichgewicht halten müſſen.

2) Heißt demnach e der Halbmeſſer des gemeinſchaftlichen Zapfens beyder Rollen, ſo wird mit Rückſicht auf die Friktion (Statik §. 327.)

$$(M - P)(a - \lambda e) = (N + Q)(b + \lambda e),$$

oder, wenn man ſtatt P und Q ihre Werthe ſetzt:

$$\left(1 - \frac{dv}{2gdt}\right)(a - \lambda e) M = \left(1 + \frac{du}{2gdt}\right)(b + \lambda e) N.$$

3) Es ſey der Winkel, um den ſich beyde Rollen im nächſten Zeittheile dt gemeinſchaftlich drehen, $= d\varphi$, ſo wickelt ſich von der größern das Seilſtück $= ad\varphi$ ab, und auf die kleinere das Stück $= bd\varphi$ auf. Man hat alſo $vdt = ad\varphi$, $udt = bd\varphi$, folglich $u = \frac{bv}{a}$, und $du = \frac{bdv}{a}$.

4) Dies für du in voriger Gleichung ſubſtituirt, giebt:

$$\left(1 - \frac{dv}{2gdt}\right)(a - \lambda e) M = \left(1 + \frac{bdv}{2agdt}\right)(b + \lambda e) N,$$ woraus

$$dv = 2gdt \left[\frac{(a-\lambda e)aM - (b+\lambda e)aN}{(a-\lambda e)aM + (b+\lambda e)aN} \right]$$ wird.

5) Man ſetze den eingeſchloſſenen Koefficienten $= f$, oder $dv = 2gfdt$, ſo erhält man durch Integration dieſer Gleichung: $c = 2gft$, und $x = v\int dt = gft^2$.

§. 117.

Die Kräfte, womit die Seile AM und BN von den Maſſen M und N während der Bewegung geſpannt werden, laſſen ſich folgendermaßen beſtimmen:

1. Es ſey die Spannung des Seiles $AM = Y$, ſo wirkt auf die Maſſe M außer ihrem Gewichte M noch die Kraft Y nach entgegengeſetzter Richtung MA. Da nun beyde Kräfte die Bewegung dieſer Maſſe allein hervorbringen, ſo muß ihnen die Kraft $P = \frac{Mdv}{2gdt}$ nach der Richtung AM äquipollent ſeyn. Dieſem zufolge wird:

$$M - Y = \frac{Mdv}{2gdt} = Mf,$$ und folglich

$$Y = (1 - f)M = \frac{(a+b)(b+\lambda e)MN}{(a-\lambda e)aM + (b+\lambda e)bN}$$

2) Man ſetze ferner die Spannung des Seiles $BN = Z$, ſo wirken auf die Maſſe N allein die Kräfte Z und N nach den Richtungen NB und BN, denen alſo die Kraft $Q = \frac{Ndu}{2gdt}$ nach NB äquipollent ſeyn muß. Man erhält daher:

$$Z - N = \frac{Ndu}{2gdt} = \frac{Nbf}{a}, \text{ mithin}$$

$$Z = (1 + \frac{bf}{a}) N = \frac{(a+b)(a-\lambda e) MN}{(a-\lambda e) aM + (b+\lambda e) bN}.$$

3) Die Spannungen der beyden Seile ſind alſo während der ganzen Bewegung unveränderlich, und verhalten ſich zu einander, wie $(b+\lambda e) : (a-\lambda e)$.

§. 118.

Iſt die Maſſe N gegeben, ſo kann man fragen, welches die kleinſte Maſſe M ſey, wodurch jene in der kürzeſten Zeit zu einer beſtimmten Höhe h hinaufgezogen wird. Es ſoll alſo Mt ein Minimum, oder $d(Mt) = 0$ ſeyn, und außerdem hat man noch $gft^2 = h$, folglich auch $d(gft^2) = 0$. Hieraus entſpringen die Gleichungen

$$Mdt + tdM = 0, \text{ und}$$
$$2fdt + tdf = 0,$$

die zuſammen verbunden, die dritte Gleichung:

$$2fdM = Mdf \text{ geben.}$$

Man ſetze $f = \frac{p}{q}$, ſo wird $dp = dq = (a-\lambda e)$ adM, folglich $df = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{q^2} = (\frac{q-p}{q^2})(a-\lambda e)$ adM, und daher:

$$2pq = (q-p)(a-\lambda e) aM.$$

Subſtituirt man nun für p und q ihre Werthe, ſo erhält man endlich folgende Gleichung:

$$M^2-\left(\frac{3}{2}-\frac{b}{2a}\right)\left(\frac{b+\lambda e}{a-\lambda e}\right)MN=\frac{b}{a}\left(\frac{b+\lambda e}{a-\lambda e}\right)^2.N^2,$$

aus der ſich das geſuchte M leicht beſtimmen läßt.

§. 119.

Sieht man dagegen M als gegeben an, ſo läßt ſich auf gleiche Art beſtimmen, welches die größte Laſt N ſey, die von M in der kürzeſten Zeit zur Höhe h gehoben wird.

Hier iſt nemlich $\frac{N}{t}$ ein Maximum, und man hat alſo außer der erſtern Gleichung $2fdt + tdf = 0$ noch die zweyte:

$$tdN - Ndt = 0,$$

die beyde in Verbindung

$$2fdN + Ndf = 0$$ geben.

Setzt man nun wieder $f = \frac{p}{q}$, ſo wird $dp = -(b+\lambda e)adN$, und $dq = (b+\lambda e)bdN$, alſo $df = -\left(\frac{aq+bp}{q^2}\right)(b+\lambda c)N$, wodurch ſich die vorige Gleichung in folgende verwandelt:

$$2pq = (b+\lambda e)(aq+bp)N$$

Was rechter Hand ſteht, wird nach verrichteter Subſtitution $= (a-\lambda e)(b+\lambda e)(a^2+ab)MN$, welches mit $(a-\lambda e)(q-p)aM$ einerley iſt. Daher bekommt man hier eben die Gleichung zwiſchen M und N, als im vorigen §., und beyde Forderungen ſind folglich gleichbedeutend.

§. 120.

1. Wenn nur eine Rolle vorhanden iſt, ſo wird b $= a$ alſo $f = \frac{M(a - \lambda e) - N(a + \lambda e)}{M(a - \lambda e) + N(a + \lambda e)}$, und die Spannung des Seiles $= \frac{2MN(a + \lambda e)}{(a - \lambda e)M + (a + \lambda e)N}$

2. Ferner erhält man für das vortheilhafteſte Verhältniß zwiſchen M und N die Gleichung:

$$M^2 - \left(\frac{a + \lambda e}{a - \lambda e}\right) MN = \left(\frac{a + \lambda e}{a - \lambda e}\right) N^2$$

woraus $M = (\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{5}{4}}) \left(\frac{a + \lambda e}{a - \lambda e}\right) N$, oder:

$$M : N = (\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{5}{4}}) : \left(1 - \frac{2\lambda e}{a + \lambda e}\right) \text{ wird.}$$

3. Nach De la Hire *) iſt die Kraft, die der Menſch anzuwenden vermag, um ſeinen Körper mit den Armen in die Höhe zu heben, um 20 ℔ größer, als ſein Gewicht, das man im Durchſchnitte zu 140 ℔ annehmen kann. Wir wollen beydes, Kraft und Gewicht des Menſchen, gleich ſetzen, ſo wird die vortheilhafteſte Laſt, die er vermittelſt einer Rolle aufzuwinden im Stande iſt, $= 140$ ℔ $\times (\sqrt{\tfrac{5}{4}} - \tfrac{1}{2}) . \left(\frac{a - \lambda e}{a + \lambda e}\right)$ $= 85\tfrac{1}{2}$ ℔ $\left(1 - \frac{2\lambda e}{a + \lambda e}\right)$.

Der Menſch ſinkt nemlich bey jedem Zuge, den er mit dem einen Arme verrichtet, durch einen kleinen

*) Memoires de l'acad. de Paris 1699 pag. 154.

Raum (der vorhin h genannt wurde) mit beſchleunigter Bewegung herab, und überläßt ſodann die Laſt ſo lange ihrer eigenen Bewegung, bis er ſich mit dem andern Arme zu einem zweyten Zuge erhoben hat. Alſo gehört dieſe Bewegung zu denen, die zwar im Ganzen genommen gleichförmig zu ſeyn ſcheinen, aber eigentlich in kleinen Zeitabtheilungen beſchleunigt ſind, und nur durch nahe auf einander folgende Ruhepunkte immer von neuem wieder unterbrochen werden. Das Fortrücken der Laſt nach vollendetem Zuge, bevor der folgende Zug beginnt, iſt hier wegen ſeiner kurzen Dauer außer Acht gelaſſen; indeß läßt ſich auch dieſe Bewegung, wie wir im folgenden Kapitel ſehen werden, zugleich mit in Rechnung bringen.

§. 121.

Aufgabe. Es werde die Maſſe N von der Maſſe M vermittelſt eines Flaſchenzuges, der in jeder Flaſche n Rollen enthält, aufwärts gezogen; man fragt, zu welcher Höhe ſie in einer gegebenen Zeit t ſteigen müſſe.

Aufl. 1) Da M herabſinkt, und N in die Höhe ſteigt; ſo ſind wieder die Kräfte M − P und N + Q mit einander im Gleichgewichte; man hat alſo die Gleichung:

$$2n(M - P) = N + Q, \text{ oder}$$

$$2nM\left(1 - \frac{dv}{2gdt}\right) = N\left(1 + \frac{du}{2gdt}\right)$$

2) Wenn nun die Maſſe N durch den Raum dx = udt hinaufrückt, ſo wird jedes Seilſtück zwiſchen

einer obern und der dazu gehörigen untern Rolle um eben ſo viel kürzer, folglich beträgt die Verkürzung des ganzen Seiles, das zwiſchen den Rollen ſich befindet, $2ndx = 2nudt$. Durch dieſen Raum muß alſo zu gleicher Zeit die Maſſe M herabſinken, und man bekommt daher $vdt = 2nudt$, $v = 2nu$, und $dv = 2ndu$.

3) Dies für dv in voriger Gleichung ſubſtituirt, giebt:

$$2nM\left(1 - \frac{2ndu}{2gdt}\right) = N\left(1 + \frac{du}{2gdt}\right)$$

woraus: $du = 2gdt\left(\frac{2nM - N}{4n^2M + N}\right)$, und

$$x = \frac{gt^2(2nM - N)}{4n^2M + N} \text{ wird.}$$

§. 122.

Auch hier läßt ſich, wenn M gegeben iſt, die Maſſe N ſo beſtimmen, daß ſie zur Zeit t, worin ſie durch einen gegebenen Raum herabſinkt, das möglichſt größte Verhältniß hat; ſetzt man nemlich wieder $\frac{2nM - N}{4n^2M + N} = f$, ſo wird, wie vorhin:

$$2fdN + Ndf = 0,$$

und, wenn man noch Zähler und Nenner von f durch p und q bezeichnet: $df = \frac{dp}{q} - \frac{pdp}{q^2} = -\frac{(p + q)\,dN}{q^2}$, alſo:

$$2pq = (p + q)\,N, \text{ oder}$$

$$8n^3M^2 = N^2 + (6n^2 - n)\, MN$$

welches $N = -(3n^2 - \frac{1}{2}n)\,M + M\sqrt{(9n^4 + 5n^3 + \frac{1}{4}n^2)}$ giebt.

So wird alſo z. B. für $n = 3$, $= 3{,}932\,M$.

§. 123.

Man ſieht leicht, daß das bisherige Verfahren, aus dem Gleichgewichte der virtuellen Kräfte mit den gegebenen die Geſetze der durch ſie hervorgebrachten Bewegungen herzuleiten, auch bey einer Verbindung mehrerer Maſſen, und ſelbſt in Fällen, wo ihre Bewegung krummlinigt iſt, in Anwendung gebracht werden könne. Bewegt ſich nemlich eine dieſer Maſſen M in einer Kurve, ſo kann man jederzeit zwey oder drey auf einander ſenkrecht gerichtete Kräfte angeben, die auf den Schwerpunkt derſelben angebracht, ſie nach eben dem Geſetze durch eben die Kurve zu leiten vermögend ſind. So wird z. B., wenn ihre Bahn in einer Ebene liegt, ihr Ort für eine gegebene Zeit t durch zwey rechtwinklichte Koordinaten x und y beſtimmt, und man hat für deren augenblickliche Aenderungen die Gleichungen $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2gP}{M}$, $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2gQ}{M}$, aus denen gegenſeitig die Kräfte $P = \frac{Md^2x}{2gdt^2}$ und $Q = \frac{Md^2y}{2gdt^2}$ entſpringen, die als unmittelbar wirkende Urſachen dieſer krummlinigten Bewegung zu betrachten ſind. Sucht man nun auf gleiche Weiſe die virtuellen Kräfte auch aus den Bewegungen

der übrigen Maſſen, ſo müſſen dieſe insgeſammt den gegebenen Kräften äquipollent ſeyn, und folglich nach entgegengeſetzten Richtung angebracht, ihnen das Gleichgewicht halten.

Es wäre überflüßig, dieſe Methode noch durch andere hieher gehörige Beyſpiele zu erläutern, da die in den folgenden Kapiteln abzuhandelnden Materien uns Gelegenheit genug zu ihrer Anwendung darbieten werden.

Beharrungszuſtand der Bewegung.

§. 124.

Es giebt beſchleunigte Bewegungen, bey denen die Geſchwindigkeit Anfangs $= 0$ iſt, und ſich darauf durch ſtete Zunahme nach und nach einer beſtimmten Grenze ins Unendliche nähert. Dieſe Grenze erreicht ſie zwar, im ſtrengſten Verſtande genommen, nie; ſie kann ihr aber doch binnen einer gewiſſen Zeit ſchon ſo nahe gekommen ſeyn, daß man auf den noch fehlenden Unterſchied keine Rückſicht zu nehmen braucht. Bey den meiſten Bewegungen ſolcher Art geſchieht dies ſehr bald, und die Geſchwindigkeit ändert ſich folglich alsdann die ganze übrige Zeit hindurch, ſo lange auch die Bewegung dauern mag, nur noch unmerklich, ſo daß man berechtigt iſt, ſie mit ihrer Grenze zu verwechſeln, oder die Bewegung ſelbſt als vollkommen gleichförmig anzuſehen. Man ſagt in dieſem Falle von ihr, ſie ſey in den **Beharrungszuſtand** gekommen.

Ein Beyſpiel dieſer Art giebt (§. 88.) das Herabfallen eines Körpers durch die Luft; ſetzt man nemlich das Gewicht, das ihm in der Luft übrig bleibt, $= G$, ſo wird die Grenze ſeiner zunehmenden Geſchwindigkeit $= \sqrt{\frac{G}{L}}$, und es hängt allein von der Größe des Widerſtandes ab, wie bald ſie dieſer Grenze nahe genug kommen wird, um die Bewegung als gleichförmig annehmen zu können. Bey der Glaskugel (§. 94.) wäre z. B. $M = 0{,}0694407$, $G = 0{,}066406$, $L = 0{,}0006234 \pi a^2 = 0{,}000083461$, $\varkappa = \sqrt{\frac{G}{L}} = 28{,}207$ Fuß, und $\omega = \frac{2g\sqrt{GL}}{M} = 1{,}059452$; folglich ihre Geſchwindigkeit nach Verlauf einer Zeit von 5 Sekunden $= \varkappa \left(\frac{e^{10\omega} - 1}{e^{10\omega} + 1}\right) = 28{,}206$ Fuß. Ihr Fallen ließe ſich alſo von dieſer Zeit an ſchon vollkommen als gleichförmig anſehen, da die Geſchwindigkeit in der ganzen folgenden Zeit höchſtens nur noch um $\frac{1}{1000}$ Fuß wachſen könnte.

§. 125.

Im Beharrungszuſtande iſt die bewegende Kraft mit dem geſammten Widerſtande, der ihr entgegenwirkt, im Gleichgewichte.

Es ſey die in Bewegung geſetzte Maſſe $= M$, ihre Geſchwindigkeit in einem Augenblicke, wo ſie noch im Wachſen iſt, $= v$, die auf ſie wirkende Kraft $= V$,

der Widerſtand $= R$; ſo müſſen die drey Kräfte V, R und $\frac{Mdv}{2gdt}$, wenn letztere nach einer der Bewegung entgegengeſetzten Richtung auf den Schwerpunkt der Maſſe angebracht wird, einander das Gleichgewicht halten.

Iſt nun die Bewegung bereits in den Beharrungszuſtand gekommen, ſo leidet die Geſchwindigkeit v keine weitern Aenderungen mehr, oder es iſt $dv = 0$, alſo auch die Kraft $\frac{Mdv}{2gdt} = 0$; folglich ſind alsdann noch die Kräfte V und R für ſich allein mit einander im Gleichgewichte.

§. 126.

Gegenſeitig folgt, daß wenn Kraft und Widerſtand ſich mit einander ins Gleichgewicht ſetzen, die Bewegung der Maſſe, die von der Kraft getrieben wird, in den Beharrungszuſtand komme. Man ſetze nemlich, wie vorhin, ihre Geſchwindigkeit $= v$, ſo ſind die drey Kräfte V, R und $\frac{Mdv}{2gdt}$ unter ſich im Gleichgewichte. Wenn nun von dieſen die erſtern beyden Kräfte für ſich einander das Gleichgewicht halten, ſo kann es zwiſchen allen dreyen nicht mehr beſtehen, wofern nicht $\frac{Mdv}{2gdt}$ verſchwindet; alſo muß in dieſem Falle $dv = 0$, und folglich v eine unveränderliche Größe ſeyn.

§. 127.

In manchen Fällen, zumal wenn die anfängliche

Beſchleunigung nur einen geringen Theil der ganzen Bewegung ausmacht, kann man ſich begnügen, bloß mit dem Beharrungszuſtande der Bewegung bekannt zu ſeyn, ohne daß man den allmähligen Uebergang zu dieſem von der Ruhe an in Betracht zu ziehen nöthig hat. Hierdurch wird die Auflöſung vieler mechaniſchen Probleme ſehr erleichtert; ja oft iſt dies das einzige Mittel, zu einem brauchbaren Reſultate zu gelangen, wenn das Geſetz der Bewegung im Allgemeinen zu verwickelt, und ſeine Beſtimmung mit zu großen Schwierigkeiten verbunden iſt.

So ließe ſich z. B. die Geſchwindigkeit des fallenden Körpers nach vollendetem Wachsthum ohne Rückſicht auf die vorhergehende anfängliche Beſchleunigung auf folgende Art finden. Sie ſey $= c$, ſo iſt der Widerſtand $= Lc^2$, folglich, da dieſer mit der bewegenden Kraft G im Gleichgewichte ſeyn muß: $G = Lc^2$, mithin $c = \sqrt{\frac{G}{L}}$.

Sechstes Kapitel.

Von den Kräften der Menſchen und Thiere bey Bewegungen.

§. 128.

Es ſey das Gewicht eines Menſchen von mittlerer Statur und Stärke $= G$; die größte Laſt, womit er bela-

den werden kann, ohne zu ſinken, $=K$; ſo iſt ſeine ganze Körperkraft mit der Laſt $G+K$ im Gleichgewichte, oder die Summe aller Kräfte, die er nach vertikaler Richtung anzuwenden vermag, iſt einer einzigen Kraft $G+K$, deren Richtung durch ſeinen Schwerpunkt geht, äquipollent.

§. 129.

Dieſe Kraft behält er, wie die Erfahrung lehrt, auch dann, wenn ſeine Kniee gebogen ſind. Er hat alſo das Vermögen, mit einer Laſt P, die kleiner als K iſt, aus einer ſolchen gebogenen Stellung ſich in die Höhe zu richten, und ſeine Kniee zu ſtrecken. Dies geſchieht nemlich, indem er die Füße gegen den Boden, der ihm zur Unterſtützung dient, mit ſeiner ganzen Kraft $G+K$ gegendrückt, und ſo ſeinen Körper ſowohl, als die ihm aufgelegte Laſt hinaufhebt.

Man ſetze die Geſchwindigkeit, die beyde dadurch nach einer gewiſſen Zeit t erhalten, $=u$, ſo ſind, der Widerſtand $G+P$, und die virtuelle Kraft $\frac{(G+P)\,du}{2g\,dt}$ zuſammen genommen, mit der bewegenden Kraft $G+K$ im Gleichgewichte; alſo hat man

$$G+P+\frac{(G+P)\,du}{2g\,dt}=G+K,$$

$$\text{oder } du=2g\,dt\left(\frac{K-P}{G+P}\right),$$

$$\text{folglich } u=2gt\left(\frac{K-P}{G+P}\right),$$

und die Höhe x, zu der ſein Schwerpunkt während der Zeit t vertikal aufwärts getrieben wird $= \frac{gt^2(K-P)}{G+P}$.

Dieſe Bewegung dauert aber nur ſo lange, als ſeine Füße den Boden berühren; ſo bald dies nicht mehr geſchieht, hört die Beſchleunigung auf, und ſein Schwerpunkt erhebt ſich dann noch mit der zuletzt erhaltenen Geſchwindigkeit zu einer Höhe, die dieſer Geſchwindigkeit als Fallhöhe zugehört.

§. 130.

Nach **de la Hire** kann ein knieender Menſch mit einer fremden Laſt von 150 ℔ 2 bis 3 Zoll in einer Sekunde ſich in die Höhe heben. Wenn man nun ſein eigenes Gewicht G zu 140 ℔ annimmt, ſo erhält man nach der vorhergehenden Formel $15\frac{5}{8}$ *) (K — 150) $= \frac{1}{4} \times 290$, alſo

$$K = 155 \text{ ℔ beynahe.}$$

Dies Gewicht läßt ſich aber nur, wie begreiflich iſt, als ein mittleres Maaß menſchlicher Kraft annehmen. Bey ſehr ſtarken Leuten kann es wohl über 200 ℔ betragen, und man wird es dagegen, wenn von anhaltender Anſtrengung der Kraft die Rede iſt, viel kleiner als 150 ℔ annehmen müſſen. **Euler** *) ſetzt in dieſem Betracht K = 60 ℔.

Vom Gange belaſteter Menſchen.

§. 131.

Aufgabe. Es ſey, wie vorhin, K die größte

*) Mem. de l'acad. de Berlin 1772 pag. 161.

Laſt, die ein Menſch im Gleichgewichte zu halten vermag, wenn er ſtill ſteht; c die Geſchwindigkeit ſeines ſchnellſten Ganges, wenn er mit keinem fremden Gewichte beladen iſt; man ſucht die Geſchwindigkeit v, womit er eine gegebene Laſt P, die kleiner als K iſt, auf horizontalem Boden forttragen kann.

Fig. 15. Aufl 1) Man ſetze die Länge ſeines Beines CB = a, die Weite ſeines natürlichen Schrittes AB = 2b. Wenn er mit dem vordern Fuße B bis zu dieſer Weite ausgetreten iſt, ſo liegt ſein Schwerpunkt C am tiefſten. Er erhebt ihn nach und nach, indem er ſich um den Unterſtützungspunkt B dreht, durch einen Bogen, der CB zum Halbmeſſer hat, und läßt während dieſer Zeit das hintere Bein ſo lange vorwärts rücken, bis beyde in der durch B gehenden Vertikale BG zuſammen kommen.

2) In dieſer Stellung hat ſein Schwerpunkt die größte Höhe erreicht. Er läßt ihn hierauf durch die andere Hälfte des Bogens wieder herabſinken, während er das andere Bein zu einem zweyten Schritte Ba ausſtreckt, und wenn er endlich den Fuß in a niederſetzt, kommt der Schwerpunkt c wieder in dieſelbe Lage, die er in C hatte, oder hat eben die Höhe über dem Boden, als zu Anfange.

3) Zugleich iſt derſelbe dann um die Weite Cc = AB = 2b nach horizontaler Richtung fortgerückt. Nennt man alſo die Zeit, die zwiſchen zweyen Fußtritten B und a, oder während eines Schrittes verfließt, = T, ſo wird $Tv = 2b$, folglich $v = \frac{2b}{T}$.

4) Wenn nun dieſe Bewegung einmal eingeleitet iſt, ſo hat der Menſch weiter keine Kraft anzuwenden nöthig, um ſie zu unterhalten, als daß er nach jedesmaligem Austreten den Schwerpunkt von ſeiner niedrigſten Stelle C bis zur höchſten G, alſo durch den vertikalen Raum DG, erheben muß. Man ſetze dieſen Raum $= h$, ſo hat man: $h = a - \sqrt{(a^2 - b^2)}$.

5) Es ſey ferner für eine unbeſtimmte Zeit t die Geſchwindigkeit des Schwerpunktes $= u$, der Raum, durch den er während dieſer Zeit geſtiegen iſt, $= x$, ſo wird, wenn man (§. 129.) $\frac{K - P}{G + P} = p$ ſetzt, $u = 2gpt$, und $x = gpt^2$.

6) Dieſe Beſchleunigung dauert aber nur ſo lange, bis der Schwerpunkt eine Geſchwindigkeit u bekommen hat, womit er, ſich ſelbſt überlaſſen, zu einer Höhe gelangt, die den bereits zurückgelegten Raum x zur ganzen Höhe h, die er erreichen muß, ergänzt. Da er nun mit der Geſchwindigkeit u noch bis zur Höhe $\frac{u^2}{4g}$ (§. 41. 4.) ſteigt, ſo hat man:

$$x + \frac{u^2}{4g} = h,$$

oder, wenn man für x und u ihre Werthe (5) ſubſtituirt,

$$gpt^2 + gp^2t^2 = h,$$

woraus die Dauer der Beſchleunigung $t = \sqrt{\frac{h}{gp(1 + p)}}$ wird.

7) Dieſen Werth von t in u geſetzt, giebt für die Geſchwindigkeit, wobey die Beſchleunigung aufhört: $u = 2\sqrt{\frac{ghp}{1+p}}$. Nennt man alſo die Zeit des übrigen Steigens $= t'$, ſo iſt $2gt' = 2\sqrt{\frac{ghp}{1+p}}$, und $t' = \sqrt{\frac{hp}{g(1+p)}} = pt$.

8 Alſo die Zeit, worin der Schwerpunkt von C bis G gelangt, $= t + t' = (1+p)\,t = \sqrt{\frac{h(1+p)}{gp}}$. Hierzu noch die Zeit addirt, die er zubringt, um von G bis c herabzuſinken, giebt die Zeit T des ganzen Schrittes.

9) Dieſe letztere Zeit iſt aber genau der vorhergehenden gleich: denn, wenn der Schwerpunkt die Zeit t' hindurch gefallen iſt, und dadurch die Geſchwindigkeit $2gt' = 2\sqrt{\frac{ghp}{1+p}}$ erlangt hat, die er vorhin zu Ende der Zeit t hatte (7), ſo muß der Menſch nun wieder ſeine ganze Kraft G + K anwenden, um dieſe Geſchwindigkeit nach und nach zu vernichten, damit ſie im Punkte c = o ſey. Setzt man alſo die Zeit dieſer Verzögerung $= t''$, ſo muß

$$2gt' - 2gpt'' = 0, \text{ folglich}$$

$$t'' = \frac{t'}{p} = t \text{ ſeyn.}$$

10) Demnach iſt $T = 2\sqrt{\frac{h(1+p)}{gp}} = 2\sqrt{}$

$\frac{h(G+K)}{g(K-P)}$, und daher $v = \frac{2b}{T} = b\sqrt{\frac{g(K-P)}{h(G+K)}}$,

oder $v^2 = \frac{b^2 g(K-P)}{h(G+K)}$.

11) Hierin $P = 0$ geſetzt, giebt $c^2 = \frac{b^2 gK}{h(G+K)}$;

alſo wird: $\frac{v^2}{c^2} = \frac{K-P}{K}$, und $v = c\sqrt{(1-\frac{P}{K})}$.

§. 132.

Die Kraft K muß hier offenbar viel kleiner angenommen werden, als ſie im §. 130. gefunden iſt, weil ſie beym Gange abwechſelnd nur durch die Muſkeln des einen Beines ausgeübt werden kann, auf dem jedesmal die ganze Laſt ruhet. Setzen wir mit **Lambert** die Länge des Beines $a = 2\frac{1}{2}$ Rheinl. Fuß, die Weite des natürlichen Schrittes $2b = 2$ Fuß, und die Geſchwindigkeit des ſchnellſten Ganges $c = 5\frac{1}{2}$ Fuß *), ſo wird $h = \frac{5-\sqrt{21}}{2} = 0{,}2$ Fuß beynahe. Dieſe Werthe für c, b und h in die für c erhaltene Formel ſubſtituirt, geben

$$6(G+K) = 15\tfrac{5}{8}K,$$

woraus man $K = \frac{48}{77} G = 87$ ℔ erhält.

*) Größer darf man dieſe Geſchwindigkeit, da hier vom bloßen Gange die Rede iſt, nicht wohl annehmen. Beym Laufen kann ſie allerdings die angegebene Grenze überſteigen: wovon aber der Grund in einer zweckmäßigen Beugung der Kniee liegt, die dieſe Bewegung vom eigentlichen Gange weſentlich unterſcheidet, und die den Vortheil gewährt, daß dadurch die Höhe h, zu der der Schwerpunkt bey jedem Schritte gehoben werden muß, um ein Merkliches vermindert wird.

§. 133.

Aus der Formel $v = c\sqrt{(1 - \frac{P}{K})}$ erhält man gegenſeitig

$$P = K(1 - \frac{v^2}{c^2}),$$

wodurch die Laſt beſtimmt wird, die ein Menſch tragen kann, wenn er dabey zugleich mit einer gegebenen Geſchwindigkeit v fortſchreitet.

Anmerk. Dieſe Formel wurde zuerſt von Herrn Euler in die Maſchinenlehre eingeführt *). Nachmals verwarf er ſie zwar wieder, und ſetzte ſtatt ihrer: $P = K(1 - \frac{v}{c})^2$, allein bloß aus dem Grunde, weil letztere mit einer bekannten hydrodynamiſchen Formel übereinkommt, die die Wirkung des Stoßes flüßiger Materien angiebt **). Bouguer bedient ſich in ſ. Manoeuvre des Vaiſſeaux Liv. I. Sect. 2. pag. 141. der einfachern Formel $P = K(1 - \frac{v}{c})$, die aber meines Wiſſens von Niemanden nachher weiter gebraucht iſt.

§. 134.

Wir haben bisher angenommen, der Menſch verwende auf die Bewegung ſeine ganze Kraft G + K, die er nach vertikaler Richtung auszuüben im Stande iſt; man ſieht aber leicht, daß eine ſolche Anſtrengung ihn in kurzer Zeit ermüden, und zu fernerer Arbeit untauglich machen würde. Daher bleibt noch zu unter-

*) S. Mem. de l'acad. de Berlin 1747 und Nov. Comment. Petrop. Tom. III.

**) Mem. de l'acad. de Berlin 1752 und Nov. Comment. Petrop. Tom. VIII.

ſuchen übrig, in wiefern die vorhin gefundene Formel abgeändert werden müſſe, wenn man zugleich auf eine anhaltende Dauer der Bewegung Rückſicht nehmen will.

Man ſetze, der Menſch gebrauche während der ganzen Bewegung nur einen Theil ſeiner völligen Kraft $= G + W$, ſo daß $W < K$ angenommen wird, ſo bleibt ihm zu Anfange noch die Kraft $K - W$ zum allmählichen Erſatze deſſen, was nach und nach verloren geht, übrig. Die fortgeſetzte Anwendung der Kraſt $G + W$ raubt ihm nun von dieſem Ueberreſte $K - W$ von Zeit zu Zeit immer mehr und mehr, und zwar iſt es ſehr natürlich, anzunehmen, daß der Verluſt in einerley Zeit der Kraft $G + W$ ſelbſt proportional ſey; wir können ihn alſo für jedes Zeitmoment $dt = \frac{1}{n}.(G + W)\,dt$ ſetzen.

Nach Verlauf einer Zeit t beträgt demnach dieſer Verluſt $\frac{1}{n}.(G + W)\,t$, und wenn T die Zeit heißt, worin die ganze Kraft $K = W$ erſchöpft wird, ſo hat man:

$$\frac{1}{n}(G + W)\,T = K - W, \text{ folglich:}$$

$$T = \frac{n(K - W)}{G + W}.$$

Nach dieſer Zeit kann alſo die Kraft $G + W$ nicht mehr ergänzt, folglich auch nicht ferner mehr in Ausübung gebracht werden.

§. 135.

Hieraus läßt ſich zuvörderſt herleiten, welches die vortheilhafteſte Laſt W ſey, die der Menſch im ruhenden Zuſtande zu tragen, oder im Gleichgewichte zu halten vermögend iſt. In dieſem Betracht muß nemlich das Produkt WT aus der Laſt W in die mögliche Dauer der Anſtrengung T ein Maximum ſeyn; gebraucht man nun für T den eben gefundenen Werth, ſo erhält man:

$$d.n\left(\frac{KW - W^2}{G + W}\right) = 0, \text{ oder:}$$

$$(K - 2W)(G + W) - KW + W^2 = 0,$$

woraus für W die Gleichung:

$$W^2 + 2GW - KG = 0 \text{ entſpringt.}$$

Aus dieſer wird $W = \surd(KG + G^2) - G$, und wenn man K = 150 ℔, G = 140 ℔ ſetzt, W = $61\frac{1}{2}$ ℔, wofür wir mit **Euler** 60 ℔ annehmen wollen.

§. 136.

Wir wollen jetzt eben dieſe Betrachtung auch auf den Fall anwenden, wo eine Laſt P gegeben iſt, und die Geſchwindigkeit v beſtimmt werden ſoll, womit der Menſch dieſe Laſt forttragen kann. Es ſey G + W die vortheilhafteſte Kraft, die er dazu fortdauernd anwenden darf, ſo wird, wenn man in der für v §. 131. 10.) gefundenen Formel W ſtatt K, und der Kürze wegen den beſtändigen Faktor $\frac{b^3g}{h} = f^2$ ſetzt, $v^2 = f^2$.

$\left(\frac{W-P}{G+W}\right)$, und da hier Tv ein Maximum ſeyn muß:

$d(Tv) = o$, oder, welches einerley iſt:

$$d(T^2v^2) = d\left(f^2n^2\frac{(K-W)^2.(W-P)}{(G+W)^3}\right) = o.$$

Nach angeſtellter Differenziation erhält man nun:

$$(G+W)[(K-W)^2 - 2(W-P)(K-W)]$$
$$= 3(K-W)^2(W-P)$$

oder $(G+W)(K+2P-3W) = 3(K-W)$
$(W-P)$

woraus $W = \frac{KG + 2GP + 3KP}{3G + 2K + P}$ wird.

Dies für W in v^2 ſubſtituirt, giebt ferner:

$$\frac{v^2}{f^2} = \frac{KG + KP - GP - P^2}{3G^2 + 3GP + 3KG + 3KP} = \frac{(G+P)(K-P)}{3(G+P)(G+K)},$$

alſo $v^2 = \frac{1}{3}f^2\left(\frac{K-P}{G+K}\right)$.

§. 137.

Man nenne $\varkappa$ die vortheilhafteſte Geſchwindigkeit, womit ein Menſch gehen muß, dem gar keine Laſt weiter aufgelegt iſt, ſo wird für $P = o$, $v = \varkappa$, alſo

$$\varkappa^2 = \frac{1}{3}f^2 . \frac{K}{G+K} = \frac{1}{3}c^2 \text{ (§. 131. 11.)}$$

Nimmt man nun, wie oben (§. 132.), $c = 5\frac{1}{2}$ Fuß an, ſo bekommt man $\varkappa = \frac{11\sqrt{3}}{6} = 3{,}175$ Fuß. Mit dieſer Geſchwindigkeit würde er eine deutſche Meile, die nach den genaueſten Rechnungen 3805 Toi-

ſen, oder 23630 Rheinl. Fuß enthält, in einer Zeit von 7442 Sec. oder 2 Stunden 4 Min. zurücklegen, die man auch für den gewöhnlichen Schritt der Fußgänger auf die Meile feſtzuſetzen pflegt.

§. 138.

Wenn man die letztere Gleichung in die vorhergehende dividirt, ſo erhält man:

$$\frac{v^2}{\varkappa^2} = 1 - \frac{P}{K}, \text{ oder}$$

$$v = \varkappa\sqrt{\left(1 - \frac{P}{K}\right)}$$

eine Gleichung, die mit der zuerſt gefundenen (§. 131.) in der Form einerley iſt.

Um hieraus endlich noch die Laſt und Geſchwindigkeit zu beſtimmen, bey denen das Produkt Pv ein Maximum wird, ſetze man $d \cdot Pv = d\left(v - \frac{v^3}{\varkappa^2}\right) = 0$. Dadurch wird $3v^2 = \varkappa^2$, oder $v = \varkappa\sqrt{\tfrac{1}{3}}$, und $P = \tfrac{2}{3}K$.

Wir wollen $K = 60$ ℔, und $\varkappa = 3\tfrac{1}{2}$ Fuß annehmen, ſo iſt die vortheilhafteſte Laſt für den Menſchen $= 40$ ℔, und dieſe trägt er mit 2 Fuß Geſchwindigkeit.

Anmerk. Herrn Coulombs Abhandlung über die Kräfte des Menſchen in den Mem. de l'inſt. nat. an VII. pag. 380. iſt beſonders wegen der darin mitgetheilten Beobachtungen ſchätzungswerth, wiewohl dieſe ſich größtentheils nur auf Leute von vorzüglicher Stärke beziehen, und alſo in ſofern nicht geradezu für die Ausübung brauchbar ſind.

Nach dem Berichte der ſtärkſten Laſtträger können dieſe den Tag über eine Laſt von 44 Kilogram oder 90,86 Pfund

auf eine Weite von höchſtens 20 Kilometern forttragen. Da nun das Kilometer 3079,458 pariſ. oder 3187,936 rheinl. Fuß enthält, ſo giebt dies, den Arbeitstag zu 10 Stunden gerechnet, eine Geſchwindigkeit $v = 1,77107$ Fuß in 1 Sec.

Um hiernach die Werthe von c und K zu beſtimmen, hat man zuvörderſt

$$v^2 = \tfrac{1}{3} c^2 \left(1 - \frac{P}{K}\right), \text{ und}$$

$$c^2 = \frac{b^2 g K}{h\,(G + K)} \text{ (§. 131. II.), oder } K = \frac{c^2 h G}{b^2 g - c^2 h};$$ daher wird ferner:

$$3v^2 = c^2 \left(1 + \frac{P}{G}\right) - \frac{b^2 g P}{hG}, \text{ und folglich}$$

$$c^2 = \left(3v^2 + \frac{b^2 g P}{hG}\right) : \left(1 + \frac{P}{G}\right).$$

Setzt man nun, wie oben (§. 132.), $b = 1$ Fuß. $h = 0,3$ Fuß, $G = 140$ Pfund, und nach der gegenwärtigen Angabe $P = 90,86$ Pfund, $v = 1,771$ Fuß, ſo erhält man $c^2 = 37,052'$, $c = 6,0875'$, und $\varkappa = c\sqrt{\tfrac{1}{3}} = 3,5143'$; woraus ſich $K = 126$ Pfund ergiebt.

Eine andere von ihm ſelbſt gemachte Beobachtung iſt folgende: Er ließ durch einige Arbeiter Meubeln aus ſeiner Wohnung zu einem andern, 2 Kilometer, oder 6376 Fuß davon entlegenen Hauſe hinübertragen. Die jedesmalige Laſt für jeden einzelnen Mann betrug 58 Kilogram = 119,77 Pfd., und damit konnten ſie in einem Tage 6 Gänge machen; doch war dieſe Arbeit für ſie ſo anſtrengend, daß ſie es nicht vermogten, ſie den folgenden Tag fortzuſetzen.

Nach der vorhin erhaltenen Geſchwindigkeit eines unbelaſteten Menſchen $\varkappa = 3,5143'$ beträgt die Zeit, die ſie auf die Rückwege verwenden mußten, etwa 3 Stunden; dieſe von 10 Stunden abgezogen, bleibt für die Zeit des eigentlichen Tragens 7 Stunden übrig, die in Sekunden verwandelt, und in das Sechsfache des obigen Weges dividirt, eine Geſchwindigkeit $v = 1,518$ Fuß giebt. Subſtituirt man dieſen Werth für v in die Formel $P = K\left(1 - \frac{v^2}{\varkappa^2}\right)$, und ſetzt außerdem nach voriger Rechnung $K = 126$ Pfund, $\varkappa = 3,5143'$, ſo

bekommt man P = 103 Pfund, alſo nicht ganz ſo viel, als die wirkliche Laſt betrug, wie denn dies nach der angeführten Bemerkung auch nicht anders zu erwarten iſt.

§. 139.

Aufgabe. Die Geſchwindigkeit v zu beſtimmen, womit ein Menſch auf ſchrägem Boden eine gegebene Laſt P in die Höhe tragen kann.

Aufl. 1) Man ſetze den Neigungswinkel des Bodens = I, die Weite eines natürlichen Schrittes auf dieſem = f, ſo iſt die Höhe, zu der der Schwerpunkt bey jedem Schritte gehoben werden muß, = h + f Sin I. Dies in §. 131. 8. ſtatt h geſetzt, giebt die Zeit ſeines Steigens $= \sqrt{\frac{(1+p)(h+f\,\mathrm{Sin}\,I)}{pg}}$.

2) Die übrige Zeit, worin er durch den Raum h wieder vertikal herabſinkt, iſt dagegen, wie dort, $= \sqrt{\frac{(1+p)h}{pg}}$.

3) Beydes addirt, giebt die Zeit des ganzen Schrittes $T = \sqrt{\frac{1+p}{pg}} \cdot [\sqrt{h} + \sqrt{(h + f\,\mathrm{Sin}\,I)}]$.

4) Alſo wird $v^2 = \frac{f^2}{T^2} = \frac{f^2pg}{1+p} : [\sqrt{h} + \sqrt{(h + f\,\mathrm{Sin}\,I)}]^2 = \left(\frac{K-P}{G+K}\right) \cdot \frac{f^2g}{[\sqrt{h} + \sqrt{(h+f\,\mathrm{Sin}\,I)}]^2}$.

§. 140.

Die beyden Größen f und h laſſen ſich hier nicht ſo leicht und ſicher angeben, als in dem vorhin betrach-

teten

teten beſondern Falle, wo $I = o$ iſt. Die Weite des Schrittes f iſt unſtreitig von dem Neigungswinkel abhängig, und wird, wie die Erfahrung lehrt, deſto kleiner, je ſteiler der Boden iſt; man kann alſo, da für $I = o$, $f = 2b$ iſt, im Allgemeinen $f = 2b \operatorname{Cos} I^n$ ſetzen. Bey Treppen, die 30° Neigung haben, giebt man der Regel nach den Stufen 1 Fuß Breite im freyen Auftritte, d. h. es iſt für dieſe Schiefe $f = b\sqrt{\frac{4}{3}} = 1{,}1547\,b$. Wir wollen für $I = 45°$, $f = b$ annehmen, ſo wird $(\operatorname{Cos} 45°)^n = \frac{1}{2}$, folglich $n = 2$, und daher $f = 2b \operatorname{Cos} I^2$.

Was die Größe h betrift, ſo iſt dieſe ſchon an ſich im Verhältniſſe gegen f kleiner, als beym horizontalen Gange, und wird dadurch noch mehr vermindert, daß man das Knie, das beym Austreten nothwendig gebogen werden muß, nie ganz gerade ſtreckt, auch wenn der Schwerpunkt ſeine größte Höhe erreicht hat. Sie mögte daher gegen die Höhe $f \operatorname{Sin} I$, zu der der Körper bey jedem Schritte wegen der Schiefe des Bodens gehoben wird, zumal wenn dieſe einigermaßen beträchtlich iſt, wohl kaum in Anſchlag zu bringen ſeyn.

§. 141.

Um den Neigunpswinkel zu finden, unter welchem eine gegebene Höhe in der kürzeſten Zeit erſtiegen werden kann, zerlege man die Geſchwindigkeit v in eine horizontale $= v \operatorname{Cos} I$, und in eine vertikale $= v \operatorname{Sin} I$, ſo erhält man für letztere

$$\upsilon \operatorname{Sin} I = \sqrt{\left(\frac{K-P}{G+R}\right)} \cdot \frac{f \operatorname{Sin} I \sqrt{g}}{\sqrt{h} + \sqrt{(h + f \operatorname{Sin} I)}}.$$

Dieſe muß alſo für den geſuchten Winkel am größten ausfallen, oder es muß, wenn man $f \operatorname{Sin} I = z$ ſetzt, $\frac{z}{\sqrt{h} + \sqrt{(h+z)}}$ ein Maximum ſeyn. Daher hat man: $d \cdot \frac{z}{\sqrt{h} + \sqrt{(h+z)}} = 0$, und, wenn man für h einen mittlern Werth annimmt, und dieſen als beſtändig anſieht:

$$[\sqrt{h} + \sqrt{(h+z)}]\, dz - \frac{\frac{1}{2} z dz}{\sqrt{(h+z)}} = 0, \text{ oder}$$

$$\sqrt{(h^2 + hz)}\, dz = -(h + \tfrac{1}{2} z)\, dz$$

alſo wird $\frac{1}{2} z dz = 0$, folglich $dz = 0$.

Nun iſt $z = f \operatorname{Sin} I = 2b \operatorname{Cos} I^2 \operatorname{Sin} I$, oder, wenn man $\operatorname{Sin} I = u$ ſetzt, $z = 2b(u - u^3)$. Man bekommt alſo: $du - 3u^2 du = 0$, und daraus $u = \operatorname{Sin} I = \sqrt{\frac{1}{3}}$, $I = 35°16'$. Gewöhnlich ſchätzt man dieſen Winkel auf 30°, wobey aber dann zugleich auf eine längere Dauer der Bewegung Rückſicht genommen wird.

§. 142.

Zum Fortſchieben einer Sache dient dem Menſchen der Arm bloß als Werkzeug; die Kraft dazu verſchafft ihm nur allein das Gewicht ſeines Körpers. Er bringt nemlich ſeinen Körper dabey in eine ſchräge Stellung Fig. 16. HCA, wodurch das Gewicht deſſelben G in eine Kraft nach der Horizontale Cf und in eine nach CA zerfällt.

Man nenne dieſe beyden Kräfte M und N, und den Winkel ACg, den die Lage des Körpers HCA mit der Vertikale Cg macht, $= \varphi$, ſo hat man die beyden Gleichungen (Stat. §. 49.)

$$N \text{ Sin } \varphi = M \text{ Sin } fCG = M, \text{ und}$$

$$G \text{ Sin } \varphi = M \text{ Sin } ACf = M \text{ Cos } \varphi.$$

Hieraus wird die Kraft $M = G \text{ tang } \varphi$, die zum Fortſchieben des Widerſtandes allein wirkſam iſt, und $N = G \text{ Sec } \varphi$, die gegen den Unterſtützungspunkt A drückt, und dadurch aufgehoben wird.

Es ſey ferner R der Widerſtand, der dem ausgeſtreckten Arme HE nach der horizontalen Richtung EH entgegenwirkt, ſo iſt zu deſſen Ueberwindung im Schwerpunkte C die Kraft $\frac{R \cdot AH}{AC}$ erforderlich. Setzt man nun das Verhältniß AH : AC wie 5 : 3, ſo erhält man die Gleichung

$$G \text{ tang } \varphi = \tfrac{5}{3} R,$$

woraus der Winkel φ beſtimmt wird, unter welchem der Menſch ſeinen Körper inkliniren muß, um den gegebenen Widerſtand aus der Stelle zu ſchieben.

§. 143.

Wenn die Maſſe bereits ins Fortrücken gekommen iſt, ſo hat der Menſch, um den gleichförmigen Gang der Bewegung zu unterhalten, bloß nöthig, ihr in eben der inklinirten Lage, wodurch er ſie Anfangs zum Weichen brachte, beſtändig nachzufolgen. Dabey drückt auf ihn nach der ſchiefen Richtung CA eine Kraft =

G Sec φ, die um G (Sec φ — 1) größer iſt, als das bloße Gewicht ſeines Körpers. Es verhält ſich daher dieſe Art des ſchrägen Ganges gerade ſo, als erſtiege der Menſch mit einer fremden Laſt = G (Sec φ — 1) eine Anhöhe, die unter dem Winkel φ gegen die Horizontale geneigt iſt; wovon man ſich am deutlichſten überzeugen kann, wenn man ſich die Richtung CA als vertikal denkt, und damit die Richtung der Kraft G Sec φ, ſo wie die Lage des Bodens in Vergleichung bringt.

§. 144.

Will man alſo auf gegenwärtigen Fall die Formel (§. 139.) anwenden, ſo wird hier $P = G\,(\mathrm{Sec}\,\varphi - 1)$, $I = \varphi$, und da der Schwerpunkt C ſtets dieſelbe Höhe über den Boden behalten muß, $h = 0$, folglich erhält man:

$$v^2 = \left(\frac{K + G - G\,\mathrm{Sec}\,\varphi}{K + G}\right) \cdot \frac{2gh\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2}{\mathrm{Sin}\,\varphi}$$

für die Geſchwindigkeit, womit der Widerſtand $R = \frac{3}{5} G\ \mathrm{tang}\ \varphi$ ſich fortſchieben läßt.

Dieſe Geſchwindigkeit wird offenbar deſto geringer, je größer man den Winkel φ, folglich auch den Widerſtand R annimmt, oder: was auf der einen Seite der Menſch durch ſtärkere Inklinirung ſeines Körpers an Kraft zum Fortſchieben gewinnt, das geht ihm auf der andern Seite an Geſchwindigkeit verloren. Es giebt alſo irgend eine Lage für ihn, wobey er von ſeinem Gewichte den zweckmäßigſten Gebrauch macht, d. h. wofür das Produkt vR ein Maximum iſt; dieſe Voraus-

ſetzung giebt $dv^2R^2 = 0$, oder mit Weglaſſung der beſtändigen Faktoren: $d((K+G)\,\mathrm{Sin}\,\varphi - G\,\mathrm{tang}\,\varphi) = 0$; wodurch

$$(K+G)\,\mathrm{Cos}\,\varphi^3 = G, \text{ und}$$

$$\mathrm{Cos}\,\varphi = \sqrt[3]{} \cdot \frac{G}{K+G} \text{ wird.}$$

Man ſetze $G = 140$ ℔, $K = 60$ ℔, ſo bekommt man $\mathrm{Cos}\,\varphi = \sqrt[3]{\tfrac{7}{10}} = 0{,}8879038 + \varphi = 27°23'$, und $R = 84\,\mathrm{tang}\,27°23' = 43\tfrac{1}{2}$ ℔. Dabey iſt alsdann die Geſchwindigkeit $v = 3{,}36$, oder beynahe $3\tfrac{1}{3}$ Fuß.

Von der Kraft der Arme zum Ziehen.

§. 145.

Die Kraft, die der Menſch im Arme beſitzt, etwas zu ſich hin zu ziehen, oder von ſich wegzuſchieben, läßt ſich im Allgemeinen nicht größer, als etwa zu 40 oder höchſtens 60 ℔ annehmen, wiewohl ſie bey ſtarken und geübten Leuten nahe an 100 ℔ betragen kann. Eine größere oder geringere Beugung des Armes bewirkt darin keinen merklichen Unterſchied, ausgenommen, daß er durch eine unbequeme Lage, z. B. wenn man ihn zu weit ausſtreckt, oder dem Leibe zu nahe bringt, an der Ausübung ſeiner völligen Kraft etwas gehindert wird; worauf man aber bey Handmaſchinen, als Kurbeln, Armrädern u. dergl. auch allemal Rückſicht nehmen muß.

§. 146.

Aufgabe. Die Geſchwindigkeit v zu beſtimmen, womit ein Arbeiter eine gegebene Laſt P vermittelſt eines Armrades aufwinden kann.

Aufl. 1) Durch die Kraft, die der Menſch mit dem Arme anwendet, die Hörner oder Spillen des Rades zu ſich hinzuziehen, wird die Laſt P bey jedem Zuge Anfangs beſchleunigt. Wir wollen dieſe Kraft = K ſetzen.

2) Ferner ſey die Geſchwindigkeit der Laſt während ihrer Beſchleunigung für eine beſtimmte Zeit t = u, ſo iſt die virtuelle Kraft der Bewegung $= \frac{Pdu}{2gdt}$. Dieſe nach entgegengeſetzter Richtung angebracht, alſo mit P verbunden, giebt eine Kraft $= P\left(1 + \frac{du}{2gdt}\right)$, womit K im Gleichgewichte ſeyn muß.

3) Nennt man demnach m : 1 das Verhältniß der Halbmeſſer des Rades und der Welle, ſo bekommt man die Gleichung:

$$mK = P\left(1 + \frac{du}{2gdt}\right).$$

4) Aus dieſer wird $du = 2gdt\left(\frac{mK}{P} - 1\right)$, und wenn man der Kürze wegen $\frac{mK}{P} - 1 = p$ ſetzt:

$$u = 2gpt$$

folglich der Raum, den die Laſt in der Zeit t zurücklegt:

$$x = gpt^2.$$

5) Gegen das Ende des Zuges hört die Beſchleunigung auf, und die Laſt ſteigt alsdann nach, ſich ſelbſt überlaſſen, zu einer Höhe, die ihrer zuletzt erhaltenen Geſchwindigkeit u als Fallhöhe zugehört. Dieſe Höhe iſt $= \frac{u^2}{4g} = gp^2t^2$, und wenn man die Zeit, die darauf verfließt, $= t'$ ſetzt, ſo hat man $gt'^2 = gpt^2$, folglich $t' = pt$.

6) Beyde Räume x und $\frac{u^2}{4g}$ addirt, geben den ganzen Raum, um den die Laſt bey jedem Zuge fortrückt $= gpt^2 + gp^2t^2 = gt^2 . p (1 + p)$, und dieſen durch die Summe der beyden Zeiten t und $t' = (1 + p) t$ dividirt, giebt die mittlere Geſchwindigkeit der Laſt $v = gpt$.

7) Die natürliche Weite, die die Hand des Menſchen während eines Zuges durchläuft, iſt eine an ſich beſtimmte Größe, und kann der Länge ſeines Armes gleich geſchätzt werden. Man ſetze ſie $= b$, ſo wird eben der Raum (6) auch $= \frac{b}{m}$, folglich

$$\frac{b}{m} = gt^2 . p (1 + p).$$

8) Dadurch bekommt man $t = \sqrt{\frac{b}{mgp (1 + p)}}$, und wenn man dieſen Werth für t in v ſubſtituirt:

$$v = \sqrt{\frac{bgp}{m (1 + p)}}, \text{ oder}$$

$$v^2 = \frac{bgp}{m (1 + p)} = \frac{bg}{m} . (1 - \frac{P}{mK}).$$

§. 147.

1. Für $P = mK$ wird $v = 0$; alſo iſt mK die Laſt, die mit der Stärke des Armes im Gleichgewichte ſteht, welches auch ſchon für ſich klar iſt.

2. Man ſetze die Geſchwindigkeit, womit der Menſch das bloße Seil in die Höhe winden kann, wenn keine Laſt daran hängt, $= c$, ſo erhält man für $P = 0$, $c^2 = \frac{bg}{m}$. Dies in die Formel ſubſtituirt, giebt:

$$v^2 = c^2 \left(1 - \frac{P}{mK}\right).$$

3. Hieraus wird gegenſeitig:

$$P = mK \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

§. 148.

Wenn man, wie im §. 134., annimmt, daß der Menſch bey anhaltender Arbeit nur einen Theil W ſeiner ganzen Armkraft K anwendet, und daß dadurch der Ueberreſt $K = W$ in jedem Zeittheilchen dt die Abnahme $= \frac{1}{n}\, W dt$ leidet, ſo erhält man für die Dauer der allmähligen Erſchöpfung $T = \frac{n(K - W)}{W}$. Die Arbeit kann alſo deſto längere Zeit hindurch fortgeſetzt werden, je weniger Kraft darauf verwandt wird; dagegen iſt aber dann die Geſchwindigkeit $v = c\sqrt{\left(1 - \frac{P}{mW}\right)}$ für eine gegebene Laſt P deſto geringer. Hieraus folgt, daß es irgend einen Werth für W geben

müſſe, wobey die Wirkung am größten, oder das Produkt Tv ein Maximum iſt, und man darf nur, um dieſen zu finden, $d.Tv$ oder $dT^2v^2 = 0$ ſetzen. Subſtituirt man nun für T^2 und v^2 ihre Werthe, ſo wird mit Weglaſſung der beſtändigen Faktoren:

$$d\left[\left(1 - \frac{P}{mW}\right)\frac{(K-W)^3}{W^2}\right] = 0.$$

Dies giebt:

$$mW(K-W)^3 - 2W(mW - P)(K-W) = 3(mW - P)(K-W)^2,$$ oder, wenn man mit $K - W$ dividirt

$$mWK - 3mW^2 + 2WP = 3mWK - 3mW^2 - 3PK + 3PW,$$

woraus $W = \dfrac{3KP}{2mK + P}$ wird.

Man ſetze dieſen Werth für W in v, ſo erhält man:

$$v^2 = \tfrac{1}{3}c^2\left(1 - \frac{P}{mK}\right)$$

für die vortheilhafteſte Geſchwindigkeit, womit eine gegebene Laſt P vermittelſt eines Armrades oder Haſpels aufgewunden werden kann, wenn dabey zugleich auf die längſte Dauer der Bewegung Rückſicht genommen wird.

§. 149.

Der abſolute Werth der Arbeit richtet ſich theils nach der Laſt P, die in Bewegung geſetzt wird, theils nach dem Raume s, durch den ſie fortrücken ſoll, und wächſt mit beyden Größen im einfachen Verhältniſſe, oder iſt dem Produkte Ps proportional. Dies Produkt durch die Zeit t dividirt, die während der Arbeit ver-

fließt, giebt ihren Werth für jede Zeitſekunde $= \frac{Ps}{t} =$ Pv, wonach man den Gewinn, der aus der Arbeit entſteht, zu ſchätzen hat. Der Menſch benutzt alſo ſeine Kraft mit mehr oder weniger Vortheil, je nachdem das Produkt Pv aus der Laſt in ihre Geſchwindigkeit größer oder geringer iſt, das man deshalb auch wohl ſein **mechaniſches Moment** zu nennen pflegt.

§. 150.

Um die Laſt P zu finden, wofür Pv ein Maximum wird, multiplicire man die für v^2 erhaltene Formel noch durch P^2, und ſetze das Differenzial von dem Produkte $= 0$, ſo bekommt man $2P - \frac{3P^2}{mK} = 0$, und $P = \frac{2}{3}mK$. Für dieſen Werth von P wird ferner $v^2 = \frac{1}{9}c^2$, oder $v = \frac{1}{3}c$; alſo das größte mechaniſche Moment des Menſchen $= \frac{2}{9}mcK = \frac{2}{9}K\sqrt{mbg}$.

Man ſieht hieraus, daß ein größeres Rad mehr Vortheil gewährt, als ein kleineres, daß aber die Wirkung nur wie die Quadratwurzel aus der Verhältnißzahl m zunimmt. Indeß iſt doch begreiflich, daß die Maſſe des Rades ſelbſt, die hier nicht in Betracht gezogen iſt, in dieſem Geſetze einige Aenderung verurſachen müſſe, wodurch der Vortheil bey einem zu großen Rade wieder aufgehoben, und das Maximum der Wirkung nur auf ein gewiſſes Verhältniß zwiſchen Rad und Welle eingeſchränkt wird.

Exempel. Es ſey $K = 45$ ℔, $b = 2$ Fuß (§. 146. 7.), $m = 4$, ſo wird das Moment $= 10\sqrt{125}$

$= 111{,}8$ ℔, und, wenn wir Laſt und Geſchwindigkeit auf den Umfang des Rades reduciren, die Laſt $= \frac{2}{3}K$ $= 30$ ℔, die Geſchwindigkeit $= \frac{1}{3}\,cm = \frac{1}{3}\sqrt{mbg}$ $= 3{,}73$ Fuß.

§. 151.

Aufgabe. Eine gegebene Laſt P ſoll durch einen Menſchen vermittelſt einer Rolle aufgewunden werden; man fragt, mit welcher Geſchwindigkeit dies geſchehen könne?

Aufl. 1) Der Menſch ergreift bey jedem Zuge das Seil mit ausgeſtrecktem Arme, hängt ſich daran, und läßt dann ſeinen Körper mit beſchleunigter Bewegung herabſinken. Es ſey das Gewicht deſſelben $= G$, die Geſchwindigkeit, nachdem die Beſchleunigung t Sekunden hindurch gedauert hat, $= u$, der durchlaufene Raum $= x$, ſo hat man (§. 116.)

$$u = 2gt\left(\frac{G-P}{G+P}\right), \text{ und}$$

$$x = gt^2 . \left(\frac{G-P}{G+P}\right).$$

2) Zu Ende derſelben ſteigt die Laſt mit der erhaltenen Geſchwindigkeit u noch um $\frac{u^2}{4g}$, wozu x addirt, den ganzen Raum giebt, um den die Laſt bey jedem Zuge fortrückt. Dieſer Raum muß ſo groß ſeyn, daß ihn der Menſch, wenn er die Arme nach entgegengeſetzten Richtungen ausgeſtreckt hat, mit beyden Händen bequem abreichen kann; man ſetze ihn $= h$, ſo wird:

$$h = x + \frac{u^2}{4g},$$

oder, wenn man $\frac{G - P}{G + P} = p$ nennt,

$$h = gt^2 . p(1 + p)$$

folglich $t = \sqrt{\frac{h}{gp(1 + p)}}$.

3) Die Zeit, während der die Laſt ſich ſelbſt überlaſſen iſt $= pt$, alſo die Zeit des ganzen Zuges $= (1 + p) t$. Dieſe in h dividirt, giebt die verlangte Geſchwindigkeit

$$v = gtp = \sqrt{\frac{ghp}{1 + p}} = \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}gh\left(1 - \frac{P}{G}\right)\right]}.$$

§. 152.

1. Hieraus wird die Geſchwindigkeit c, womit der Menſch das bloße Seil, wenn keine Laſt daran hängt, herabziehen kann, $= \sqrt{\tfrac{1}{2}gh}$. Setzt man $h = 4$ Fuß, welches der größte Werth iſt, der ſich dafür annehmen läßt, ſo bekommt man $c = 5{,}59$ Fuß.

2. Die Formel erhält alſo wieder dieſelbe Geſtalt, wie in den vorhergehenden Fällen, nemlich:

$$v^2 = c^2\left(1 - \frac{P}{G}\right)$$

oder gegenſeitig $P = G\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$,

die für das Maximum des Moments Pv, wie vorhin gezeigt iſt, $P = \tfrac{2}{3} G = 93\tfrac{1}{3}$ ℔, und $v = c\sqrt{\tfrac{1}{3}} = 3\tfrac{1}{5}$ Fuß giebt.

3. Eine größere Wirkung kann der Menſch auf

dieſe Art durch die Kraft ſeiner Arme nicht hervorbringen; er kann ſie aber dadurch nach Gefallen vermindern, daß er den untern Theil ſeines Körpers am Boden ruhen, und bloß den obern Theil durch Beugung der Kniee herabſinken läßt, wodurch nicht allein das Gewicht G, ſondern auch der Fallraum h kleiner wird, als vorhin angenommen iſt. Wir wollen G = 60 ℔ und h = 2 Fuß ſetzen, ſo wird für ihn die vortheilhafteſte Laſt P = 40 ℔, und die Geſchwindigkeit, womit er ſie erhebt, $v = 2{,}28$ Fuß.

§. 153.

Wird die Laſt P durch einen Flaſchenzug in die Höhe gewunden, ſo hat man für eine Anzahl von n Rollen in jeder Flaſche $p = \frac{2nG - P}{4nG + P}$ (§. 121. 3.), alſo

$$v = \sqrt{\frac{ghp}{1+p}} = \sqrt{\left[\frac{gh}{2n+1} \cdot \left(1 - \frac{P}{2nG}\right)\right]}$$

Dieſer Ausdruck giebt $P = \frac{4}{3}nG$, und $v = \sqrt{\frac{gh}{6n+3}}$, für die Laſt und ihre Geſchwindigkeit, wobey das Moment Pv am größten wird.

Vom Zuge der Thiere.

§. 154.

Es ſey das Gewicht eines Pferdes, oder irgend eines andern Laſtthieres = G; die größte Laſt, die man ihm auflegen darf = K; ſo wird durch die Summe G + K die ganze Kraft deſſelben ausgedrückt, womit es ſeinen

Körper vertikal in die Höhe heben kann. Man erhält alſo für ſeine Geſchwindigkeit beym Forttragen einer Laſt P, die kleiner als K iſt (§. 131.):

$$v = \sqrt{\frac{b^2 g (K - P)}{h (G + K)}},$$

und für ſeine größte Geſchwindigkeit, wenn es mit keiner fremden Laſt beladen iſt:

$$c = \sqrt{\frac{b^2 g K}{h (G + K)}},$$

wo die Größen b und h in Bezug auf das Thier eben die Bedeutung haben, in der ſie vorhin für den Menſchen genommen wurden. Die Verbindung beyder Formeln giebt dann ferner:

$$v = c\sqrt{\left(1 - \frac{P}{K}\right)}.$$

Was den Werth von K betrift, ſo iſt es bekannt, daß der Körperbau der meiſten Thiere zum Tragen weit weniger als zum Ziehen eingerichtet iſt; daher glaube ich nicht, daß man z. B. für ein Pferd, oder einen Ochſen K größer, als zu 200 ℔ annehmen dürfe. Das körperliche Gewicht dieſer beyden Thiere kann im Mittel = 800 ℔ geſetzt werden.

§. 155.

Um eine Laſt fortzuziehen, gebraucht das Thier nur ſo viel Kraft, als zur Aufhebung des Widerſtandes nöthig iſt, den ihm die Laſt nach der Richtung des Zuges entgegenſetzt. Die Maſſe derſelben käme nur etwa bey ihrer anfänglichen Beſchleunigung in Betracht,

deren Dauer aber allemal ſo gering iſt, daß man ſie völlig außer Acht laſſen kann.

Man ſetze nun, es ſey auf ebenem und horizontalem Boden der Widerſtand der fortrückenden Laſt = R, ihre Geſchwindigkeit, nachdem die Bewegung gleichförmig geworden iſt, = u; ſo muß das Thier, um die Bewegung in dem einmal angenommenen Beharrungszuſtande zu unterhalten, mit eben der Geſchwindigkeit u fortgehen, und zugleich eine Kraft = R nach horizontaler Richtung anwenden. Hierdurch wird ihm begreiflich ein Theil ſeiner Hebekraft G + K entzogen, der deſto mehr beträgt, je größer die Kraft iſt, die auf den horizontalen Zug verwandt wird. Wir wollen ihn W nennen, ſo entſpringt aus der für c gefundenen Formel der geſuchte Werth von u, wenn man darin K — W ſtatt K ſetzt, und man erhält alſo:

$$u = \sqrt{\left[\frac{b^2 g}{h} \cdot \frac{K - W}{G + K - W}\right]}$$

oder, wenn man das Quadrat dieſes Ausdrucks durch das Quadrat von c dividirt:

$$\frac{u^2}{c^2} = \left(1 - \frac{W}{K}\right) : \left(1 - \frac{W}{G + K}\right).$$

§. 156.

Nach welchem Geſetze der Verluſt W, den das Thier an ſeiner vertikalen Kraft leidet, von dem Widerſtande R abhänge, wird ſich ſchwerlich aus ſeinem Körperbaue mit vollkommener Evidenz herleiten laſſen. Am natürlichſten wäre es unſtreitig, ihn dem Widerſtande

proportional zu ſetzen, wofern die Zeiten, worin die beyden Kräfte R und $G + K - W$ in Ausübung kommen, gleich lange dauerten: aber die erſtere wird während der ganzen Zeit T des Schrittes (§. 131.) angewandt, und die letztere iſt dagegen nur zu Anfange deſſelben die Zeit t hindurch, und zu Ende deſſelben eben ſo lange, alſo zuſammen in einer Zeit $= 2t$ wirkſam; daher verhält ſich die Zeit, worin die Kraft R in Thätigkeit geſetzt wird, zu der, worin ſie der Kraft $G + K$ den Theil W raubt, wie $T : 2t = 1 + p : 1 = 1 + \frac{K + W}{G} : 1$, und es kann folglich nur das Produkt TK zum Produkte 2tW, oder $(G + K - W) R$ zu GW ein beſtimmtes Verhältniß haben. Dies Verhältniß läßt ſich nun auf folgende Art ſehr leicht beſtimmen:

Es ſey F der größte Widerſtand, den das Thier aus der Stelle zu bringen vermögend iſt, ſo verliert es bey dieſer Anſtrengung alle Kraft, ſeinen Schwerpunkt zu heben; es wird alſo für $R = F$, $W = K$, und man hat daher nach jener Vorausſetzung

$$(G + K - W) R : GW = F : K, \text{ oder}$$

$$FGW = (G + K - W) KR;$$

woraus $W = \frac{(G + K) KR}{FG + KR}$ wird.

Dieſer Werth für W in obiger Formel ſubſtituirt, giebt:

$$1 - \frac{W}{K} = \frac{G(F - R)}{FG + KR}, \text{ und } 1 - \frac{W}{G + K} = \frac{FG}{FG + KR},$$

alſo

alſo $\frac{u^2}{c^2} = G(F - R) : FG = 1 - \frac{R}{F}$, oder

$$u^2 = c^2 (1 - \frac{R}{F}),$$

eine Formel, wonach die Geſchwindigkeit des Thieres für einen gegebenen Widerſtand gefunden wird.

§. 157.

Durch Umkehrung dieſer Formel erhält man:

$$R = F(1 - \frac{u^2}{c^2})$$

für die Kraft, die das Thier bey einer gegebenen Geſchwindigkeit u auf den horizontalen Zug verwenden kann. Hieraus wird, wie wir vorhin geſehen haben, für den Fall, wo das Produkt Ru ein größtes ſeyn ſoll, $u = c\sqrt{\frac{1}{3}}$, und $R = \frac{2}{3}F$. Den Werth von F könnte man beſtimmen, wenn man das Zugſeil des Thieres nach horizontaler Richtung über eine Rolle gehen ließe, und daran ſo viel Gewicht hängte, als das Thier im Gleichgewichte zu halten im Stande wäre. Für Pferde ſetzt man gewöhnlich F = 400 ℔, und c = 12 Fuß; dies giebt für ihre vortheilhafteſte Geſchwindigkeit u = 6,928 Fuß, wobey ſie eine Laſt fortziehen können, die ihnen den Widerſtand R = 266 ℔ entgegenſetzt.

Siebentes Kapitel.

Vom centralen Stoße der Körper.

§. 158.

Ein Körper, der auf ſeinem Wege mit einem andern zuſammentrift, durch den er gehindert wird, ſeine Bewegung frey fortzuſetzen, übt gegen dieſen ſo lange einen Druck aus, als er ihn vor ſich aus der Stelle zu treiben hat, und bringt dadurch in deſſen Bewegung Aenderungen hervor. Da aber dieſer Druck einen eben ſo großen Gegendruck des andern Körpers auf ihn veranlaßt, ſo leidet hierbey auch ſeine eigene Bewegung von Zeit zu Zeit Aenderungen. Dieſe gegenſeitige Wirkung der beyden Körper auf einander nennt man den Stoß derſelben.

§. 159.

Der Druck, der während des Stoßes zwiſchen den Körpern ſtatt findet, geſchieht zunächſt gegen die Ebene, in der ſie ſich berühren, und zwar nach einer auf ſie ſenkrechten Richtung: denn geſetzt, er hätte irgend eine ſchiefe Richtung gegen dieſelbe, ſo ließe er ſich in einen darauf ſenkrechten, und in einen mit ihr parallelen Theil zerlegen, von denen der erſtere doch nur allein wirkſam ſeyn könnte.

§. 160.

Fig. 17. Wenn die Linie AB, worin die Schwerpunkte

A und B der beyden Körper liegen, auf ihrer Berührungsebene KI ſenkrecht iſt, ſo heißt der Stoß c ntral. Es fällt alsdann die mittlere Richtung des Druckes mit dieſer Linie zuſammen, und geht folglich ſowohl durch den Schwerpunkt des einen als des andern Körpers: denn man zerlege eine jede der Richtungen Aa und Bb, nach denen die Schwerpunkte ſich bewegen, in eine auf die Ebene KI ſenkrechte, AC, BC, und in eine damit parallele, Af, Bg; ſo gleiten die Körper vermöge der leztern Bewegung neben einander hin, ohne auf einander zu wirken, und nur durch die erſtere entſteht von beyden Seiten her auf die Ebene KI ein ſenkrechter Druck, der in C ſeinen Mittelpunkt hat, und folglich vom Punkte A aus nach B, und umgekehrt von B aus nach A gerichtet iſt.

§. 161.

Beym centralen Stoße wirken alſo die Körper gegenſeitig einer auf den Schwerpunkt des andern, und wenn daher ihre Bewegung Anfangs fortrückend iſt, ſo bleibt ſie auch während des Stoßes, und nach demſelben, noch fortrückend. Dieſer Eigenſchaft wegen, die dem centralen Stoße ausſchließend zukommt, werden wir uns auf deſſen Betrachtung im gegenwärtigen Kapitel allein einſchränken, da bisher noch von keiner andern Bewegung, als der fortrückenden, gehandelt iſt.

§. 126.

Bey Kugeln, die aus gleichartigen Materien beſtehen, und ihre Geſtalt durch den Stoß nicht weiter ver-

ändern, als daß ſie ſich an der Stelle, wo ſie zuſammen-treffen, platt drücken, iſt der Stoß ohne weitere Bedingung allemal central. Ihre Berührungsebene KI iſt nemlich jederzeit ein zu beyden gehöriger Parallelkreis, und ein Perpendikel aus dem Mittelpunkte A der einen Kugel darauf gefällt, geht folglich durch deſſen Mittelpunkt C, alſo verlängert, auch durch den Mittelpunkt B der andern Kugel; mithin ſteht die Linie AB, durch die Mittelpunkte der beyden Kugeln gezogen, auf ihrer gemeinſchaftlichen Berührungsebene ſenkrecht.

§. 163.

Wenn die Linie AB zugleich in die Richtung fällt, die die Schwerpunkte der beyden Körper vor dem Stoße haben, ſo wird dieſe durch den Stoß nicht geändert. Man nennt alsdann den Stoß **gerade**; jeden andern centralen Stoß hingegen nennt man ſchief.

Kugeln z. B., deren Richtungen in die Linie fallen, die durch ihre Mittelpunkte geht, ſtoßen einander allemal gerade, ſo wie auch zwey Cylinder, deren Axen in einer und derſelben geraden Linie liegen, und die ſich nach der Richtung ihrer Axen bewegen.

Vom geraden Stoße.

§. 164.

Wenn zwey unvollkommen harte Körper gegen einander ſtoßen, ſo iſt begreiflich, daß dadurch der Zuſammenhang ihrer Theile leiden müſſe. Was zunächſt von beyden Körpern in Berührung kommt, wird ihrem

gegenſeitigen Drucke auszuweichen ſuchen, und der eine Körper wird folglich ſo lange in den andern eindringen, bis die Kraft, die er dazu anwendet, dem Widerſtande der Cohäſion des andern gleich geworden iſt. Hierdurch wird der nachfolgende Körper in ſeiner Bewegung aufgehalten, und der voraufgehende beſchleunigt, ſo daß beyder Geſchwindigkeiten einander immer näher und näher kommen, und folglich zuletzt gleich groß werden müſſen.

§. 165.

Sind die beyden Körper unelaſtiſch, d. h., haben ſie kein Beſtreben, ihre veränderte Form wieder herzuſtellen, ſo iſt der Stoß vollendet, ſobald ihre Geſchwindigkeiten einander gleich geworden ſind: denn da der Eindruck, den ſie in einander hervorgebracht haben, bleibend iſt, ſo kann nun jeder ſeine Bewegung ungehindert fortſetzen. Beyde Körper bilden jetzt gleichſam Theile eines zuſammenhängenden Ganzen, von denen der eine dem andern folgt, ohne durch ihn irgend eine Veränderung ſeines Zuſtandes zu erfahren.

§. 166.

Aufgabe. Zwey unelaſtiſche Körper, deren Maſſen M und M′ ſind, bewegen ſich nach einer gemeinſchaftlichen Richtung mit den Geſchwindigkeiten c und c′. Der erſtere, der dem letztern nachfolgt, ereilt ihn vermöge ſeiner größern Geſchwindigkeit, und übt einen geraden Stoß gegen ihn aus; man ſucht die Geſchwindigkeit beyder zu Ende des Stoßes.

Aufl. 1) Man ſetze, nachdem der Stoß eine Zeit t hindurch gedauert hat, ſey die Geſchwindigkeit der Maſſe $M = v$, die der Maſſe $M' = v'$ geworden; der Druck beyder Maſſen gegen einander ſey in dieſem Augenblicke $= \Pi$.

2) Da dieſer Druck, in ſofern ihn der Körper M leidet, gegen die Richtung deſſelben geſchieht, ſo hat man für die augenblickliche Aenderung ſeiner Geſchwindigkeit

$$dv = -\frac{2g\Pi dt}{M}.$$

3) Beym andern Körper M' hingegen, der eben den Druck nach der Richtung ſeiner Bewegung auszuſtehen hat, iſt:

$$dv' = \frac{2g\Pi dt}{M'}.$$

4) Beyde Gleichungen verbunden, geben demnach:

$$Mdv = -M'dv', \text{ oder}$$

$Mdv + M'dv' = 0$, wovon die Integralgleichung:

$$Mv + M'v' = C \text{ iſt.}$$

5) Zu Anfange des Stoßes, oder für $t = 0$, war $v = c$, und $v' = c'$; man erhält alſo $C = Mc + M'c'$, und folglich:

$$Mv + M'v' = Mc + M'c',$$

eine Gleichung, die das Geſetz ausdrückt, nach welchem die Geſchwindigkeiten v und v' der beyden Körper während des Stoßes von einander abhängen.

6) Es ſey nun für das Ende des Stoßes der Werth von v und v', oder die gemeinſchaftliche Ge-

ſchwindigkeit, die die Körper alsdann bekommen, $= \varkappa$; ſo giebt jene Gleichung, wenn man darin $v = v' = \varkappa$ ſetzt:

$$(M + M')\,\varkappa = Mc + M'c',$$

$$\text{alſo: } \varkappa = \frac{Mc + M'c'}{M + M'}.$$

§. 167.

1. Was der Körper M durch den Stoß an Geſchwindigkeit verloren hat, beträgt $c - \varkappa = \frac{(c-c')\,M'}{M + M'}$, und was der andere Körper M′ durch ihn gewonnen hat: $\varkappa - c' = \frac{(c - c')\,M}{M + M'}$. Es iſt alſo:

$$(c - \varkappa) : (\varkappa - c') = M' : M, \text{ d. h.}$$

die Aenderungen, die zwey unelaſtiſche Körper durch den Stoß in ihren Geſchwindigkeiten erleiden, verhalten ſich verkehrt, wie ihre Maſſen.

2. Iſt der Körper M′ vor dem Stoße in Ruhe, alſo $c' = 0$, ſo wird beyder Geſchwindigkeit nach dem Stoße: $\varkappa = \frac{Mc}{M + M'}$.

3. Wenn die beyden Körper mit ihren Geſchwindigkeiten c, c′ ſich gegen einander bewegen, ſo nehme man die Richtung, die der eine z. B. M hat, als abſolut an; alsdann iſt die Geſchwindigkeit des andern c′ in Bezug auf c negativ, folglich ihre gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit zu Ende des Stoßes $\varkappa = \frac{Mc - M'c'}{M + M,}$.

Je nachdem alſo Mc größer oder kleiner als M'c' iſt, erhält $\varkappa$ einen poſitiven oder negativen Werth, d. h. die Körper bewegen ſich nach dem Stoße gemeinſchaftlich nach der Richtung desjenigen, bey dem das Produkt aus der Maſſe in die Geſchwindigkeit vor dem Stoße am größten war.

§. 168.

Aufgabe. Die Geſchwindigkeiten der beyden Körper M und M' nach dem Stoße zu beſtimmen, wenn ſie vollkommen elaſtiſch ſind, und ſich vor dem Stoße mit den Geſchwindigkeiten c und c' nach einerley Richtung AB bewegen.

Fig. 18. Aufl. 1) Es ſey der Abſtand AB ihrer Schwerpunkte A und B zu Anfange des Stoßes $= a$; nach Verlauf einer Zeit t ſey der erſtere um $AP = x$, der letztere um $BQ = x'$ fortgerückt, und beyder Entfernung PQ alsdann $= a - w$, ſo hat man:

$$PQ = AB + BQ - AP, \text{ oder}$$
$$a - w = a + x' - x, \text{ alſo}$$
$$w = x - x'.$$

2) Ferner ſey in dieſem Augenblicke die Geſchwindigkeit des Körpers $M = v$, die von $M' = v'$ geworden, ſo ſind $\frac{Mdv}{2gdt}$ und $\frac{M'dv'}{2gdt}$ die Kräfte, wodurch die Körper nach der gemeinſchaftlichen Richtung AB getrieben werden, oder: es iſt $-\frac{Mdv}{2gdt}$ die Kraft, die auf den Schwerpunkt P des Körpers M nach der Richtung

PA, und $\frac{M'dv'}{2gdt}$ die Kraft, die auf den Schwerpunkt Q des Körpers M' nach der Richtung BQ jetzt wirken muß.

3) Dieſe Kräfte, nach den entgegengeſetzten Richtungen AP und QB auf dieſelben Punkte P und Q angebracht, müſſen alſo die Körper in der Lage, worin ſie ſich jetzt befinden, im Gleichgewichte halten (§. 115.).

4) Die Theile beyder Körper, die zwiſchen ihren Schwerpunkten P und Q liegen, ſind durch deren Annäherung zuſammengedrückt, und haben alſo jeder ein Beſtreben bekommen, ſich nach beyden Seiten gleich ſtark auszudehnen. Wir wollen dieſe Expanſivkraft für den Körper M $= \Pi$, für M' $= \Pi'$ ſetzen, ſo müſſen beyde ſowohl unter ſich, als mit den äußern Kräften $-\frac{Mdv}{2gdt}$ und $\frac{M'dv'}{2gdt}$ Gleichgewicht hervorbringen; daher bekommt man

$$\Pi = \Pi',\ \Pi = -\frac{Mdv}{2gdt},\ \text{und}\ \Pi' = \frac{M'dv'}{2gdt},\ \text{folglich}$$

$$Mdv + M'dv' = o,$$

wodurch die nemliche Gleichung

$$Mv + M'v' = Mc + M'c'$$

entſteht, wie bey unelaſtiſchen Körpern (§. 166. 5.).

5) Die Kraft Π iſt nach der bekannten Eigenſchaft elaſtiſcher Körper von der Zuſammenpreſſung ihrer Theile abhängig, und da dieſe in gegenwärtigem Falle auf der größern oder geringern Entfernung der Schwerpunkte beyder Körper beruhet, ſo richtet ſie ſich nach

dem Werthe von w, und hat alſo für einerley w eine und dieſelbe Größe.

6) Da $v = \frac{dx}{dt}$, und $v' = \frac{dx'}{dt}$, ſo wird (1)

$$\frac{dw}{dt} = v - v'.$$

So lange alſo die Geſchwindigkeit des nachfolgenden Körpers M größer iſt, als die des vorangehenden M', iſt dw poſitiv, mithin w wachſend, d. h. die Schwerpunkte nähern ſich da noch einander.

7) Für $v = v'$ wird $\frac{dw}{dt} = 0$, alſo w ein Maximum, oder: der Abſtand der Schwerpunkte der beyden Körper iſt dann am kleinſten, wenn ihre Geſchwindigkeiten gleich groß geworden ſind.

8) In dieſem Augenblicke leiden alſo die zwiſchen P und Q befindlichen Theile beyderſeits die ſtärkſte Zuſammenpreſſung, und der Druck Π, den ſie gegen einander ausüben, hat folglich jetzt ſeinen größten Werth erreicht. Es kann daher die Wirkung des Stoßes nicht, wie bey unelaſtiſchen Körpern, mit der Gleichheit ihrer Geſchwindigkeiten aufhören; ſie muß nothwendig noch ſo lange fortdauern, bis beyde Körper wieder ihre vorige Geſtalt bekommen haben, oder $w = 0$ geworden iſt.

9) Die beyden Gleichungen $M dv = -2g\Pi dt$, und $M' dv' = 2g\Pi dt$ (4) noch durch $2v$ und $2v'$ multiplicirt, und dann addirt, geben:

$$2Mv dv + 2M'v' dv' = -4g\Pi (v - v') dt = -4g\Pi dw,$$

wovon die Integralgleichung

$$Mv^2 + M'v'^2 = C - 4g\int \Pi dw \text{ iſt.}$$

10) Zu Anfange des Stoßes war $w = 0$, $\Pi = 0$, mithin auch das Integral $\int \Pi dw = 0$, und außerdem $v = c$, $v' = c'$, alſo

$$Mc^2 + M'c'^2 = C.$$

Dies für C in die Gleichung ſubſtituirt, giebt:

$$Mv^2 + M'v'^2 = Mc^2 + M'c'^2 - 4g\int \Pi dw.$$

11) Da nun für einerley w der Werth von Π, folglich auch der des Integrals $\int \Pi dw$ derſelbe iſt, ſo muß für das Ende des Stoßes, wo w wieder $= 0$ wird (8), auch $\int \Pi dw$ zum zweyten male verſchwinden. Nennt man daher κ und κ' die Geſchwindigkeiten der beyden Körper nach vollendetem Stoße, ſo erhält man:

$$M\kappa^2 + M'\kappa'^2 = Mc^2 + M'c'^2,$$

oder $M(c^2 - \kappa^2) + M'(c'^2 - \kappa'^2) = 0.$

12) Außerdem iſt nun auch:

$$M\kappa + M'\kappa' = Mc + M'c' \; (4), \text{ oder}$$

$$M(c - \kappa) + M'(c' - \kappa') = 0.$$

Dieſe Gleichung noch durch $c + \kappa$ multiplicirt, und dann von der vorhergehenden ſubtrahirt, bleibt:

$$M'(c'^2 - \kappa'^2) - M'(c' - \kappa')(c + \kappa) = 0, \text{ woraus}$$

$$c + \kappa = c' + \kappa', \text{ und folglich}$$

$$\kappa' = c - c' + \kappa \text{ wird.}$$

13) Dies für κ' in letzterer Gleichung ſubſtituirt, giebt endlich:

$$\kappa = \frac{Mc + M'(2c' - c)}{M + M'} = c - \frac{2M'(c - c')}{M + M'}, \text{ und}$$

$$\varkappa = \frac{M'c' + M(2c - c')}{M + M'} = c' - \frac{2M(c - c')}{M + M'}.$$

§. 169.

1. Die Geſchwindigkeit des Körpers M iſt demnach durch den Stoß um $\frac{2M'(c - c')}{M + M}$ vermindert, und die des Körpers M′ um $\frac{2M(c - c')}{M + M'}$ gewachſen; alſo betragen die Aenderungen, die mit den Geſchwindigkeiten der beyden Körper während des Stoßes vorgehen, bey elaſtiſchen Körpern doppelt ſo viel, als bey unelaſtiſchen (§. 167. 1.).

2. Da $c + \varkappa = c' + \varkappa'$ (12.), ſo wird $\varkappa' - \varkappa = c - c'$. Die Unterſchiede zwiſchen den Geſchwindigkeiten zweyer elaſtiſchen Körper ſind daher vor und nach dem Stoße gleich groß, aber von entgegengeſetzter Art; es iſt nemlich zu Ende des Stoßes die Geſchwindigkeit des vorangehenden Körpers M′ größer als die des nachfolgenden M, ſtatt daß ſie anfänglich kleiner als jene war.

3) Sind die Maſſen M und M′ einander gleich, ſo erhält man $\varkappa = c'$, und $\varkappa' = c$. In dieſem Falle tauſchen alſo die Körper beym Stoße ihre Geſchwindigkeiten gegeneinander um, oder: der eine bekommt nach dem Stoße eben die Geſchwindigkeit, die der andere vor demſelben hatte.

4. Wenn ſich die beyden Körper M und M′ vor dem Stoße mit den Geſchwindigkeiten c und c′ begeg-

nen, alſo der letztere M′ die entgegengeſetzte Richtung BA hat, ſo iſt ſeine Geſchwindigkeit c′ gegen die des andern c negativ; alſo wird nach dem Stoße

$$\varkappa = c - \frac{2M'(c+c')}{M+M'}, \text{ und}$$

$$\varkappa' = -c' + \frac{2M(c+c')}{M+M'}.$$

5) Von dieſen Formeln giebt erſtere für $\varkappa$ einen negativen Werth, wofern $M'c' > \frac{1}{2}c(M-M')$, und letztere für $\varkappa'$ einen poſitiven Werth, wofern $Mc > \frac{1}{2}c'$ $(M'-M)$ iſt; in jenem Falle wird alſo M, in dieſem M′ zum Umkehren genöthigt, oder ſeine anfängliche Richtung durch den Stoß in die entgegengeſetzte verwandelt.

§. 170.

Fig. 19. **Aufgabe.** Ein elaſtiſcher Körper M ſtößt mit der Geſchwindigkeit c in ſenkrechter Richtung GO gegen eine unbewegliche Ebene AB; man ſucht die Geſchwindigkeit, womit er von ihr zurückprallt.

Aufl 1) Wenn der Körper die Ebene zuerſt berührt, liege ſein Schwerpunkt in G; nach Verlauf einer Zeit t ſey derſelbe um GP = x fortgerückt, und ſeine Geſchwindigkeit alsdann $= v$.

2) Zu Folge dieſer Geſchwindigkeit muß ihn nach der Richtung ſeiner Bewegung eine Kraft $= \frac{Mdv}{2gdt}$ beſchleunigen, und wenn man alſo nach eben der Richtung die Kraft $-\frac{Mdv}{2gdt}$ auf ihn wirken läßt, muß dadurch

der Körper in ſeinem gegenwärtigen Zuſtande im Gleichgewichte gehalten werden.

3) Der Theil von der ganzen Maſſe des Körpers, der Anfangs zwiſchen G und O lag, iſt jeżt in den engern Raum PO zuſammengedrückt, und hat dadurch eine ausdehnende Kraft bekommen, die von ſeiner Verdichtung, oder vom Raume GP $= x$ abhängig iſt.

4) Dieſe Kraft, die wir $= \Pi$ ſetzen wollen, wirkt nach entgegengeſetzten Seiten ſowohl auf die Ebene AB, als auf den Schwerpunkt des Körpers P. Auf der einen Seite wird ſie durch den Widerſtand der unbeweglichen Ebene aufgehoben, alſo muß auch eben dies auf der andern Seite im Punkte P durch die Kraft $-\frac{Mdv}{2gdt}$ geſchehen; mithin muß $-\frac{Mdv}{2gdt} = \Pi$ ſeyn.

5) Hieraus erhält man $Mdv = - 2g\Pi dt$, alſo einen Werth für dv, der beſtändig negativ iſt, welches anzeigt, daß v fortwährend abnehme. Wenn nun $v = 0$ geworden iſt, ſo iſt x, wegen der Gleichung $v = \frac{dx}{dt}$, am größten, folglich hat alsdann auch die Kraft Π ihr Maximum erreicht, ſo daß alſo v nothwendig noch ferner abnehmen und ins Negative übergehen muß. Dies dauert ſo lange, bis Π zum zweyten male $= 0$, mithin auch $x = 0$ geworden iſt, oder bis der Körper wieder ſeine vorige Geſtalt bekommen hat; womit dann die Wirkung des Stoßes ſich endigt.

6) Die vorige Gleichung (5) noch durch $2v$ multiplicirt, und darin dx für $v$dt geſetzt, giebt:

$$2Mvdv = -4g\Pi dx,$$

wovon das Intrgral:

$$Mv^2 = C - 4g\int\Pi dx \text{ iſt.}$$

7) Nimmt man nun das Integral $\int\Pi dx$ ſo, daß es für $x = 0$ verſchwindet, ſo wird für den Anfang des Stoßes $Mc^2 = C$, und da für das Ende deſſelben wieder $x = 0$, folglich auch $\int\Pi dx = 0$ iſt, ſo erhält man für die Geſchwindigkeit $\varkappa$ des Körpers nach dem Stoße ebenfalls: $M\varkappa^2 = C$, alſo $M\varkappa^2 = Mc^2$, und $\varkappa = \mp c$.

8) Daß hier nur das obere Zeichen für $\varkappa$ gelten könne, iſt nicht allein an ſich klar, ſondern wird auch durch die Betrachtung (5) außer Zweifel geſetzt. Es iſt demnach $\varkappa = -c$, d. h. der Körper wird mit eben der Geſchwindigkeit von der Ebene reflektirt, womit er gegen ſie anſtieß.

§. 171.

Fig. 20. Wenn der Körper mit der Geſchwindigkeit c gegen die Ebene in einer ſchiefen Richtung FG anſtößt, die mit ihr den Winkel FGa = I macht, ſo läßt ſich ſolche in eine mit ihr parallele nach Gg = c Cos I, und in eine auf ſie ſenkrechte nach Gr = c Sin I zerlegen. Vermöge der erſtern gleitet der Körper ohne Hinderniß an der Ebene fort, und behält alſo dieſe Geſchwindigkeit ungeändert bey, während die andere c Sin I, womit er gerade gegen die Ebene anſtößt, nach und nach vermindert, und zuletzt in die entgegengeſetzte — c Sin I

verwandelt wird (§. 170. 8.). Dies geſchieht, wenn ſein Schwerpunkt in g wieder dieſelbe Entfernung von der Ebene bekommen hat, als in G, wo er ſie zuerſt berührte (5.).

Er bewegt ſich alſo dann mit der Geſchwindigkeit c Sin I nach der entgegengeſetzten Richtung gρ, und zugleich mit der Geſchwindigkeit c Cos I parallel der Ebene nach gb, woraus eine zuſammengeſetzte Geſchwindigkeit = c nach einer Richtung gf entſteht, die ebenfalls unter dem Winkel fgb = I gegen die Ebene geneigt iſt; d. h. der Körper wird mit ſeiner anfänglichen Geſchwindigkeit unter demſelben Winkel von der Ebene reflektirt, unter dem er gegen ſie zuerſt anſtieß.

Während des Stoßes bewegt ſich der Schwerpunkt des Körpers in einer Kurve Gog, die ſich in G und g endigt, oder in die geradlinigten Schenkel GF, gf übergeht, und in der Mitte o ihren Scheitel hat. So lange ſeine ſenkrechte Geſchwindigkeit noch poſitiv iſt, beſchreibt er den niederſteigenden Arm derſelben Go, erreicht im Scheitel o ſeinen kürzeſten Abſtand von der Ebene, und entfernt ſich nochmals wieder von ihr in dem aufſteigenden Arme og.

Ueber das Einſinken feſter Körper in weichen Boden.

§. 172.

Wie viel Widerſtand ein feſter Körper von gegebener Form und Maſſe beym Eindringen in weichen Boden

den findet, und zu welcher Tiefe er darin nach Verhältniß ſeiner anfänglichen Geſchwindigkeit, und der Beſchaffenheit des Bodens gelangt, iſt zwar von mehreren Schriftſtellern, aber größtentheils nur ſehr mangelhaft und mit Zuziehung willkührlicher Hypotheſen unterſucht. Das Lehrreichſte und Gründlichſte über dieſen Gegenſtand enthält eine Abhandlung von **Lambert** in den Mem. de l'acad. de Berlin 1772, aus der ich hier das Weſentliche in der Kürze und mit den nöthigen Erläuterungen beybringen will.

§. 173.

Der bekannte Erfahrungsſatz: **daß die Tiefe, zu denen zwey Prismen von gleicher Baſis in einerley Boden von deſſen Oberfläche aus der Ruhe herabſinken, ſich wie ihre Gewichte verhalten**, wird durch folgende von **Lambert** ſelbſt angeſtellten Verſuche außer Zweifel gebracht.

Er ſtellte ein Parallelepipedum, wovon die Baſis 15 Quadratlinien betrug, behutſam und in ſenkrechter Richtung auf durchgeſiebten, feinkörnigen Sand, deſſen Oberfläche vorher genau geebnet war, und ließ es mit einem darauf gelegten Gewichte einſinken. Der Verſuch wurde mit mehreren Gewichten wiederholt, und zuvor jedesmal der Sand durch ſanftes Umſchütteln von neuem locker und eben gemacht. Die Reſultate hiervon kann man aus nachſtehender Tafel erſehen, in der die erſte Kolumne das jedesmalige Gewicht, mit Inbegriff deſſen, was das Parallelepipedum wog, in

halben Unzen, die zweyte die Tiefe des Eindrucks in Linien, und die dritte das Verhältniß zwiſchen beyden angiebt:

Gewicht P	Tiefe x	Verhältnißzahl x : P
6	2	0,33
7	$2\frac{1}{2}$	0,35
8	$2\frac{1}{2}$	0,32
9	3	0,33
10	$3\frac{1}{2}$	0,35
14	5	0,35
18	6	0,33

In dieſer Tafel kommen die Zahlen der letztern Kolumne offenbar einander ſehr nahe, und ſind überdies abwechſelnd bald etwas größer, bald etwas geringer, ſo daß man wohl kein Bedenken tragen darf, ſie für einerley gelten zu laſſen, oder das Verhältniß x : P als unveränderlich anzunehmen.

§. 174.

Man ſetze nun, ein Prisma, deſſen Grundfläche = B iſt, werde durch ſein Gewicht = G in einen Boden von gegebener Materie bis zur Tiefe = f eingedrückt. Ein anderes Prisma, deſſen Grundfläche = S iſt, ſinke in eben den Boden durch ſein Gewicht P bis zur Tiefe = x. Da ſich der Druck von dem Gewichte des Prisma's auf ſeiner Grundfläche gleichförmig vertheilt, ſo iſt deſſen Einheit bey dem letztern $= \frac{P}{S}$; alſo

der Druck, der auf einen Theil ſeiner Grundfläche $= B$ kommt, $= \frac{PB}{S}$, mithin:

$$f : G = x : \frac{PB}{S}, \text{ oder}$$

$$f : x = \frac{G}{B} : \frac{P}{S}.$$

D. h. die Tiefen der Eindrücke, die zwey Prismen mit ungleichen Grundflächen in einerley Boden machen, wenn ſie von deſſen Oberfläche aus der Ruhe herabſinken, verhalten ſich direkt, wie ihre Gewichte, und verkehrt, wie ihre Grundflächen.

Auch hiermit ſtimmten andere von Lambert angeſtellte Verſuche ebenfalls vollkommen überein; er fand nemlich bey einerley Gewicht die Tiefen der Eindrücke im umgekehrten Verhältniſſe der Grundflächen, woraus ſich obige Proportion für verſchiedene Gewichte und Grundflächen von ſelbſt ergiebt.

§. 175.

Die Haltbarkeit eines Bodens läßt ſich am richtigſten darnach beurtheilen, in welcher Tiefe ein Prisma von beſtimmtem Gewichte und gegebener Grundfläche von ihm im Gleichgewichte gehalten wird. Dieſe Tiefe iſt zwar nicht mit der eben betrachteten, zu der das Prisma gelangt, wenn es von der Oberfläche des Bodens herabſinkt, einerley, weil daſſelbe bey jeder Bewegung, ſie ſey noch ſo gering, nothwendig weiter in den

Boden eindringen muß, als das Gleichgewicht es erfordert; indeß wird doch gewiß erſtere der letztern proportional ſeyn, und alſo auch eben ſo vom Gewichte und der Grundfläche des Prisma's, wie jene, abhängen.

§. 176.

Aufgabe. Ein prismatiſcher Körper, deſſen Maſſe $= M$ iſt, ſinkt in einen Boden von der Oberfläche deſſelben mit einer Geſchwindigkeit, die der Fallhöhe H zugehört, vertikal herab. Der Boden iſt von ſolcher Beſchaffenheit, daß er dem Prisma das Gleichgewicht hält, wenn es in ihn bis zur Tiefe b eingeſenkt wird; man ſucht die Bewegung des Prisma's, und die größte Tiefe, zu der es gelangt.

Aufl. 1) Nachdem es bis zur Tiefe x geſunken iſt, ſey die Höhe, der ſeine Geſchwindigkeit zugehört, $= h$; die Kraft, wodurch es getrieben wird, $= P$; ſo hat man:

$$Mdh = Pdx \text{ (§. 51.)}.$$

2) Die Kräfte, die auf das Prisma eigentlich wirken, ſind: das Gewicht deſſelben M, und der Widerſtand, den ihm der Boden entgegenſetzt. Wird alſo zu dieſen noch die Kraft P nach vertikal aufwärts gehender Richtung hinzugefügt, ſo muß ſie ſich mit ihnen aufheben, oder daſſelbe Prisma muß bey dem Gewichte $M - P$ an der Stelle, wo es ſich gegenwärtig befindet, mit dem Boden im Gleichgewichte ſeyn.

3) Dem zufolge iſt

$$M - P : M = x : b,$$

alſo $M - P = \frac{Mx}{b}$, und $P = M(1 - \frac{x}{b})$.

4) Dieſen Werth für P in obiger Gleichung (1) ſubſtituirt, giebt:

$$dh = (1 - \frac{x}{b})\, dx,$$

und davon das Integral genommen:

$$h = C + x - \frac{x^2}{2b}.$$

5) Nun war an der Oberfläche des Bodens, oder für $x = 0$, $h = H$; alſo wird $C = H$, und folglich

$$h = H + x - \frac{x^2}{2b}.$$

6) Die größte Tiefe, die wir p nennen wollen, erreicht das Prisma, nachdem es alle Bewegung verloren hat; es iſt alſo für $x = p$, $h = 0$, mithin

$$0 = H + p - \frac{p^2}{2b}, \text{ woraus}$$

$$p = b + \sqrt{(b^2 + 2bH)} \text{ wird.}$$

§. 177.

Für $H = 0$ giebt dieſe Formel $p = 2b$. Wenn alſo das Prisma in den Boden von der Oberfläche deſſelben aus der Ruhe einſinkt, ſo gelangt es zu einer doppelt ſo großen Tiefe, als diejenige iſt, worin ihm der Boden das Gleichgewicht hält. Dieſer Satz dient zur Beſtätigung deſſen, was §. 175. ſchon zum Voraus angenommen wurde, und gewährt zugleich ein ſehr einfaches Mittel, den Werth von b durch Verſuche zu finden.

Da aber der Eindruck, den das Priſma in den Boden macht, wenn es auf ſeine Oberfläche geſtellt wird, meiſtens nur gering iſt, ſo erhält man hierdurch den Werth von b nicht genau genug. Es iſt daher zu dieſer Abſicht vortheilhafter, das Priſma von irgend einer Höhe auf den Boden herabfallen zu laſſen: denn da alsdann ſeine Geſchwindigkeit an der Oberfläche deſſelben dieſer Höhe zugehört, ſo wird aus der Gleichung (6)

$$b = \frac{p^2}{2(H+b)},$$

wovon Zähler und Nenner deſto beträchtlicher ſind, je größer man die Fallhöhe H angenommen hat.

Lambert ließ das vorhin erwähnte Parallelepipedum von mehreren verſchiedenen Höhen in den Sand herabfallen, und fand die Tiefen der Eindrücke für

H =	0	12	24	36	48	60	72	144 Lin.
p =	0,6	2,5	3,6	4,5	5,3	6,0	6,5	9,0 Lin.

woraus für b folgende Werthe entſpringen:

b =	0,3	0,21	0,24	0,25	0,26	0,27	0,27	0,26 Lin.

Von dieſen ſtimmen die letztern, wie man ſieht, ſehr genau überein, und es iſt alſo wohl keinem Zweifel unterworfen, daß die Abweichungen zwiſchen den vier erſtern bloß den unvermeidlichen Fehlern der Beobachtung zuzuſchreiben ſind.

Noch mehr überzeugt man ſich hiervon durch folgende ſeiner Verſuche, bey denen daſſelbe Parallelepi-

pedum zwar in etwas dichteren Sand, aber von ungleich größern Höhen, als vorhin, herabfiel. Es war nemlich

für H =	144	288	432	576	720‴
p =	7	10	12	14	$15\frac{1}{2}$‴

Dies giebt für b nachſtehende Werthe:

b = 0,162 | 0,167 | 0,162 | 0,166 | 0,163‴,

die ſo genau zuſammentreffen, als es ſich bey Rechnungen dieſer Art nur irgend erwarten läßt. Ein Mittel zwiſchen ihnen genommen iſt b = 0,164; bedient man ſich deſſen in der oben für p gefundenen Formel, ſo erhält man:

für H =	144	288	432	576	720‴
p =	7,04	9,88	12,06	13,91	15,53‴

Von dieſen berechneten Tiefen weichen die beobachteten insgeſammt nicht mehr, als in einigen Hunderttheilen von Linien ab.

§. 178.

Aufgabe. Die Tiefe p zu finden, zu der das Prisma in den Boden einſinkt, wenn es in irgend einer Tiefe x eine Geſchwindigkeit hat, die der Höhe h zugehört.

Aufl 1) Man nenne H die Höhe, der ſeine Geſchwindigkeit an der Oberfläche des Bodens zugehören muß, wenn es die Tiefe x mit der gegebenen Geſchwindigkeit erreichen ſoll, ſo erhält man folgende Gleichungen (§. 173. 5. 6.)

$$h = H + x - \frac{x^2}{2b}, \text{ und}$$

$$o = H + p + \frac{p^2}{2b}.$$

2) Von dieſen giebt erſtere:

$$2bH = x^2 - 2bx + 2bh;$$

letztere: $2bH = p^2 - 2bp$; woraus

$$p^2 - 2bp = x^2 - 2bx + 2bh,$$

und $p = b + \sqrt{[(x-b)^2 + 2bh]}$ folgt.

§. 179.

Die zur Höhe h gehörige Geſchwindigkeit würde das Prisma in der Tiefe x des Bogens bekommen, wenn es von der Höhe $H = \frac{x^2}{2b} - x + h$ herabfiele; ſie kann ihm aber auch auf jede andere Art, z. B. durch den Stoß oder Schlag mitgetheit werden.

Wir wollen ſetzen, das Prisma ſey Anfangs zu ſeiner natürlichen Tiefe, wo ihm der Boden das Gleichgewicht hält, herabgeſunken, und werde nun durch ſucceſſive Schläge, wovon ihm jeder eine der Höhe h zugehörige Geſchwindigkeit ertheilen mag, nach und nach in denſelben weiter eingetrieben, ſo iſt die Tiefe, zu der es gelangt, nach dem erſten Schlage $p' = b + \sqrt{2bh}$, nach dem zweyten $p'' = b + \sqrt{4bh}$, nach dem dritten $p''' = b + \sqrt{6bh}$, und überhaupt, nach dem nten Schlage: $p^{(n)} = b + \sqrt{2nbh}$. Alſo verhält ſich der Raum, um den das Prisma durch wiederhohlte, gleich ſtarke Schläge unter die Tiefe des Gleichgewich-

tes b einſinkt, wie die Quadratwurzel aus der Anzahl der Schläge.

§. 180.

Die Gleichheit der Schläge wird dadurch bewirkt, daß man einerley Gewicht von gleichen Höhen auf das Prisma herabfallen läßt. Es ſey nemlich dies Gewicht $= P$, die Höhe, von der es herabfällt, $= H$, ſo iſt die Geſchwindigkeit, womit es das Prisma erreicht, dieſer Höhe zugehörig, alſo $= 2\sqrt{gH}$, folglich die dem Prisma mitgetheilte Geſchwindigkeit (§. 167. 2.) $= \frac{2P\sqrt{gH}}{P+M}$, wenn deſſen Maſſe, wie vorhin, $= M$ geſetzt wird. Die dazu gehörige Höhe h iſt $= H \left(\frac{P}{P+M}\right)^2$; alſo für einerley P und H ſtets dieſelbe.

Da das Gewicht auf dem Prisma während des Einſinkens liegen bleibt, ſo muß man für b den Werth nehmen, der der ganzen Maſſe $P + M$ entſpricht. **Lambert** bediente ſich zu ſeinen Verſuchen eines Hammers; er ließ ihn zuerſt mit dem Parallelepipedum von der Oberfläche des Sandes herab ſinken, und fand die Tiefe des Eindrucks 4‴; alſo war b = 2‴. Jetzt ſenkte er das Parallelepipedum von neuem um 2‴ in den Boden ein, und ließ den Hammer zu wiederholten malen von 3 Zoll Höhe darauf herabfallen. Die Wirkungen davon, und ihre Vergleichung mit der Theorie, enthält folgende Tafel:

n	$p^{(n)} - b$	Verh.	$\sqrt{n}$
1	3,00	1,00	1,00
2	4,25	1,42	1,41
3	5,33	1,78	1,73
4	6,50	2,17	2,00
5	7,50	2,50	2,23
6	8,25	2,75	2,45
7	8,66	2,89	2,64
8	9,25	3,08	2,83
9	9,75	3,25	3,00
10	10,33	3,44	3,16
11	11,00	3,67	3,31
12	11,50	3,83	3,46

Daß hier die Abweichungen zwiſchen den Verhältnißzahlen in der dritten Kolumne und den dazu gehörigen Werthen von $\sqrt{n}$ mit der Anzahl der Schläge zunehmen, beweißt ganz und gar nicht die Unzulänglichkeit der Formel $p^{(n)} = b + \sqrt{2nbh}$; denn wenn bey jedem Schlage das Eindringen des Prisma's durch irgend einen Nebenumſtand (z. B. dadurch, daß es etwas aus ſeiner vertikalen Stellung kam) nur um ein Geringes fehlerhaft wurde, ſo mußte ſich nothwendig dieſer Fehler nach und nach anhäufen, da jede nächſtgrößere Tiefe auf die vorhergehende Bezug hat. Läge die Unrichtigkeit in der Formel, ſo müßten auch die Aenderungen der Verhältnißzahl von denen des Werthes $\sqrt{n}$ immer mehr und mehr abweichen, welches aber, wie man leicht ſieht, der Fall nicht iſt.

Anwendung auf das Einrammen der Pfähle.

§. 181.

Aufgabe. Ein Pfeiler, deſſen Maſſe $= M$ iſt, ſey in den Boden bereits bis zur Tiefe f eingeſchlagen. Man läßt auf ihn eine Ramme, deren Gewicht P iſt, von der Höhe H herabfallen; wie tief wird er nach dem Schlage geſunken ſeyn?

Aufl. 1) Es ſey die geſuchte Tiefe von der Oberfläche des Bodens angerechnet $= p$; die Höhe, der ſeine Geſchwindigkeit unmittelbar nach dem Schlage zugehört, $= h$; ſo iſt (§. 178.)

$$p = b + \sqrt{[(f - b)^2 + 2bh]}.$$

2) Ferner iſt $h = H \left(\frac{P}{P + M}\right)^2$ (§. 180.), welches für h ſubſtituirt:

$$p = b + \sqrt{\left[(f - b)^2 + 2bH \left(\frac{P}{P + M}\right)^2\right]}$$ giebt.

3) Wären beyde Körper vollkommen elaſtiſch, ſo wäre die dem Pfeiler mitgetheilte Geſchwindigkeit doppelt ſo groß (§. 169. 1.), alſo h das Vierfache von dem hier Angegebenen; da aber das Holz nur in einem gewiſſen Grade elaſtiſch iſt, ſo kann man allgemein $h = \lambda H \left(\frac{P}{P + M}\right)^2$ annehmen, wo λ eine Zahl bedeutet, die zwiſchen 1 und 4 fallen muß.

§. 182.

Bekanntlich wird der Fallblock jedesmal zu der Höhe, wovon er auf den Pfeiler herabfallen ſoll, durch

Arbeiter vermittelſt einer Rolle aufgewunden; es fragt ſich alſo, wie das Verhältniß ſeiner Maſſe zu der des Pfeilers gewählt werden müſſe, damit durch einerley Aufwand von Zeit und Kraft am meiſten bey der Sache ausgerichtet werde. Um dies zu finden, nenne man T die Zeit, die während des Aufwindens verfließt, S die geſammte Kraft, die alle Arbeiter zugleich anwenden, n die Anzahl derſelben;

1) ſo kommt auf jeden Einzelnen von der ganzen Laſt des Fallblocks P der Theil $\frac{1}{n}P$, und man hat daher für die Geſchwindigkeit, womit derſelbe gehoben wird:

$$v = c\sqrt{(1 - \frac{P}{nG})}\ (\S.\ 152.\ 2.)$$

oder, da $nG = S$ iſt,

$$v = c\sqrt{(1 - \frac{P}{S})},\ \text{mithin:}$$

$$H = vT = cT\sqrt{(1 - \frac{P}{S})}.$$

2) Die Koſten der Arbeit ſind theils der Zeit T, theils der Anzahl der Menſchen proportional, und ſtehen alſo mit dem Produkte nT in einem beſtimmten Verhältniſſe. Wofern ſie demnach ungeändert bleiben ſollen, ſo muß nT, oder nGT. d. i. ST eine beſtändige Größe ſeyn. Man ſetze dieſe $= A$, ſo wird $T = \frac{A}{S}$, folglich:

$$H = \frac{cA}{S}\sqrt{(1 - \frac{P}{S})} = cA\sqrt{(\frac{S-P}{S^3})}.$$

3) Dies für H in der für p erhaltenen Formel ſubſtituirt, giebt:

$$p = b + \sqrt{[(f - b)^2 + 2\lambda bcA \left(\frac{P}{P + M}\right)^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{S - P}{S^3}\right)}]},$$

worin die Größen S und P nun ſo beſtimmt werden müſſen, daß dadurch p ein Maximum wird.

4) Da b, f, λ, c und A unveränderlich ſind, ſo darf man nur die Werthe von S und P ſuchen, wofür der Ausdruck $\left(\frac{P}{P + M}\right)^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{S - P}{S^3}\right)}$ ſein Maximum erreicht.

5) Man ſehe zuvörderſt P als ſchon beſtimmt, oder bloß S als unveränderlich an, ſo wird dieſem zufolge: $d.\left(\frac{S - P}{S^3}\right) = 0$, alſo $\frac{1}{S^3} = \frac{3(S - P)}{S^4}$, und $S = \frac{3}{2} P$.

6) Dadurch verwandelt ſich obiger Ausdruck in $\frac{P\sqrt{12}}{9(P + M)^2}$, wovon das Differenzial nach P genommen, und = 0 geſetzt, die Gleichung

$\frac{1}{(P + M)^2} = \frac{2P}{(P + M)^3}$ giebt, aus welcher:

$P = M$ wird, d. h.

es iſt zum Einrammen eines Pfeilers am vortheilhafteſten, einen Fallblock zn nehmen, der mit dem Pfeiler einerley Gewicht hat, wie auch **Lambert** unter einer andern, weniger evidenten Vorausſetzung gefunden hat.

7) Ferner bekommt man $S = \frac{3}{2} M$, alſo $n = \frac{S}{G} = \frac{3M}{2G}$, für die angemeſſenſte Zahl der Arbeiter, wobey jeder Einzelne eine Kraft $= \frac{2}{3} G = 40$ ℔ (§. 152. 3.) anzuwenden hat, welches auch mit Herrn Bugge's Annahme zuſammentrifft. S. phil. tranſact. 1779. Vol 69. P. I. pag. 124.

§. 183.

Die Vorausſetzung, daß $P = M$ genommen werde, giebt:

$$p = b + \sqrt{[(f - b)^2 + \tfrac{1}{2}\lambda bH]},$$

wo b die Tiefe bedeutet, zu der der Pfeiler von der Oberfläche des Bodens durch ſein eigenes Gewicht M herabſinkt (§. 180 und §. 177.). Es iſt daher jedesmal vor dem erſten Schlage $f = b$; alſo nach demſelben $p = b + \sqrt{\tfrac{1}{2}\lambda bH}$, und wenn man die Tiefen des Pfeilers nach dem zweyten, dritten Schlage u. ſ. w. p', p'' u. ſ. w. nennt, ſo wird ferner:

$$p' = b + (p - b)\sqrt{(2 + \frac{p}{H})}$$

$$p'' = b + (p - b)\sqrt{(3 + \frac{p + p'}{H})}, \text{ u. ſ. w.}$$

weil bey jedem neuen Schlage der Fallblock auf den Pfeiler um ſo viel höher herabfällt, als letzterer bereits in den Boden eingeſunken iſt.

§. 184.

Aufgabe. Der Pfeiler ſey in den Boden bis zu einer Tiefe f eingeſchlagen, und werde nun mit einer Laſt

O beſchwert; man ſucht, wie tief er dadurch noch ferner einſinken werde?

Aufl. 1) Es ſey, wie vorhin, b die Tiefe, zu der der Pfeiler von der Oberfläche des Bodens durch ſein eigenes Gewicht M herabſinkt; eben dies bedeute B für das Gewicht M + O; ſo iſt zuvörderſt

$$b : B = M : M + O$$

$$\text{alſo } B = \left(\frac{M + O}{M}\right) b.$$

2) Ferner ſey während des Einſinkens für irgend eine Tiefe x die Höhe, der ſeine Geſchwindigkeit zugehört, = h, ſo hat man (§. 176. 4.)

$$h = C + x - \frac{x^2}{B},$$

weil das dortige b die Tiefe bezeichnet, worin die Laſt M + O vom Boden im Gleichgewichte gehalten wird, und folglich halb ſo groß als B iſt.

3) Nun iſt anfänglich x = f, und h = 0; alſo wird $C = \frac{f^2}{B} - f$, mithin

$$h = x - f - \left(\frac{x^2 - f^2}{B}\right).$$

4) Es heiße p die geſuchte Tiefe, bey der der Pfeiler zu ſinken aufhört, ſo iſt für x = p zum zweyten male h = 0, folglich

$$B\,(p - f) = p^2 - f^2,$$

woraus man p = B − f erhält.

5) Hierin für B ſeinen obigen Werth ſubſtituirt, giebt:

$$p = \frac{(M + O)\,b - Mf}{M}.$$

§. 185.

1) Begreiflich gilt dieſe Formel nur unter der Vorausſetzung, daß 2f < B, oder $O > (\frac{2f}{b} - 1) M$ ſey. Widrigenfalls gäbe ſie nemlich für p einen kleinern Werth als f, der aber weiter nichts anzeigt, als daß der Pfeiler ſchon ſo tief im Boden ſteckt, daß ihn die Laſt O nicht ferner mehr einzutreiben vermag, wenn ſie ihm bloß aufgelegt wird, und nicht von einer Höhe auf ihn herabfällt. In allen den Fällen alſo, wo $O < (\frac{2f}{b} - 1) M$, iſt $p = f$, oder der Pfeiler iſt vor dem fernern Einſinken geſichert.

2) Um die Tiefe f zu finden, zu der der Pfeiler wenigſtens eingeſchlagen werden mußte, damit man ihm eine gegebene Laſt O ohne die Gefahr, daß er durch ſie weiter einſinke, zu tragen geben könne, darf man nur $p = f$ ſetzen. Dies giebt:

$$Mf = (M + O)\, b - Mf, \text{ woraus}$$

$$f = \frac{(M + O)\, b}{2M} \text{ wird.}$$

Vom Einſinken pyramidaliſcher und anderer Körper.

§. 186.

Fig. 21. **Aufgabe.** Die Tiefe zu finden, zu welcher eine gegebene Pyramide, deren Gewicht $= M$ iſt, in einen Boden von beſtimmter Beſchaffenheit eingeſenkt werden muß, damit ſie von ihm getragen werde.

Aufl.

Aufl. 1) Es ſey die Höhe der Pyramide CD $= h$, ihre Grundfläche AB $= B$, die geſuchte Tiefe CO ihrer Spitze C unter der Oberfläche des Bodens HOI $= p$, ein unbeſtimmter Theil derſelben CP $= z$, der durch P gehende Querſchnitt MN $= S$, ſo iſt zuvörderſt $B : S = h^2 : z^2$, alſo

$$S = \frac{Bz^2}{h^2}.$$

2) Man ſetze nun, ein Prisma, deſſen Grundfläche $= c^2$, Gewicht $= G$ iſt, werde vom Boden in einer Tiefe $= f$ getragen; für ein anderes Prisma ſeyen eben dieſe Größen der Reihe nach w^2, P, u; ſo hatten wir (§. 174.):

$$f : u = \frac{G}{c^2} : \frac{P}{w^2}, \text{ oder}$$

$$c^2 f : w^2 u = G : P \text{ . d. i.}$$

der vertikale Widerſtand des Bodens verhält ſich wie das Produkt aus dem horizontalen Flächenſtücke deſſelben, das die Laſt unterſtützt, in deſſen Tiefe unter der Oberfläche.

3) Hiernach leidet alſo das Pyramidenſtück zwiſchen den beyden unendlich nahen Querſchnitten MN und mn, da es von einem Erdringe $= dS$ in einer Tiefe PO $= p - z$ getragen wird, den vertikalen Widerſtand

$$d\Pi = \frac{G(p - z)\,dS}{c^2 f} = \frac{2GB(p - z)\,z\,dz}{c^2 h^2 f},$$

wovon das Integral $\Pi = \frac{GB}{c^2 h^2 f} \cdot (pz^2 - \frac{2}{3} z^3)$ iſt.

4) Darin $z = p$ geſetzt, giebt den geſammten vertikalen Widerſtand des Bodens gegen die Pyramide $= \frac{GBp^3}{2c\,h\,f}$. Weil nun dieſer ihr Gewicht M aufheben muß, wofern ſie nicht tiefer einſinken ſoll, ſo erhält man

$$M = \frac{GBp^3}{3c^2h^2f}, \text{ folglich}$$

$$p = \sqrt[3]{\left[\frac{3Mc^2h^2f}{GB}\right]}.$$

§. 187.

Es ſey für das Gewicht G eben derſelben Pyramide $p = b$, ſo wird:

$$b = \sqrt[3]{\left(\frac{3c^2h^2f}{B}\right)}, \text{ alſo}$$

$$p = b\left(\frac{M}{G}\right)^{\frac{1}{3}}, \text{ oder}$$

$$b : p = G^{\frac{1}{3}} : M^{\frac{1}{3}}, \text{ d. i.}$$

die Tiefe, worin eine Pyramide von gegebener Form vom Boden im Gleichgewichte gehalten wird, verhält ſich, wie die Kubikwurzel aus ihrem Gewichte.

§. 188.

Aufgabe. Wenn die Pyramide mit ihrer Spitze die Oberfläche des Bodens berührt, gehöre ihre Geſchwindigkeit der Höhe H zu. Ihr Gewicht ſey $= G$; die Tiefe, in der ſie vom Boden getragen wird, $= b$; man ſucht, wie tief ſie in denſelben eindringen werde.

Aufl. 1) Man ſetze die Kraft, wodurch ſie getrieben wird, wenn ſie bereits zu einer Tiefe x gelangt

iſt, $= P$; die Höhe, der ihre Geſchwindigkeit an dieſer Stelle zugehört, $= h$; ſo hat man:

$$Gdh = Pdx.$$

2) Wird nun die Kraft P gegen die Richtung der Bewegung auf ihren Schwerpunkt angebracht, ſo muß zwiſchen den dreyen Kräften G, P und dem Widerſtande des Bodens Gleichgewicht entſtehen, d. h. die Pyramide muß bey dem Gewichte $G = P$ in der Tiefe x von dem Boden getragen werden; es wird daher:

$$b : x = G^{\frac{1}{3}} : (G - P)^{\frac{1}{3}},$$

oder $G - P = \frac{Gx^3}{b^3}$, woraus man

$$P = G\left(1 - \frac{x^3}{b^3}\right) \text{ erhält.}$$

3) Dies in obiger Gleichung für P ſubſtituirt, giebt:

$$dh = \left(1 - \frac{x^3}{b^3}\right) dx$$

$$\text{alſo } h = C + x - \frac{x^4}{4b^3}.$$

4) Zu Anfange war $x = 0$, und $h = H$, alſo wird $C = H$, mithin:

$$h = H + x - \frac{x^4}{4b^3}.$$

5) Es ſey endlich p die größte Tiefe des Einſinkens, ſo iſt für $x = p$, $h = 0$; daher bekommt man für dieſe folgende Gleichung:

$$p^4 - 4b^3p = 4b^3H.$$

6) Fällt die Pyramide von der Oberfläche des

Bodens aus der Ruhe herab, ſo iſt H = o, alſo p $= b\sqrt[3]{4} = 1{,}5874\,b$.

§. 189.

Wir wollen ſetzen, der pyramidenförmige Keil befinde ſich Anfangs ſchon in einer Tiefe des Bodens = f, und bekomme nun daſelbſt eine der Höhe H zugehörige Geſchwindigkeit; ſo iſt in der allgemeinen Gleichung (3):

$$h = C + x - \frac{x^4}{4b^3},$$

für $x = f$, $h = H$, folglich:

$$H = C + f - \frac{f^4}{4b^3}, \text{ oder}$$

$$C = H - f + \frac{f^4}{4b^3}.$$

Dies für C ſubſtituirt, giebt:

$$4b^3h = f^4 + 4b^3(H - f) + 4b^3x - x^4.$$

Heißt nun, wie vorhin, p die Tiefe, zu der die Spitze des Keiles nach dem gänzlichen Verluſte ſeiner Bewegung gelangt, ſo erhält man für dieſe die Gleichung:

$$p^4 - 4b^3p = f^4 + 4b^3(H - f).$$

§. 190.

Die der Höhe H zugehörige Geſchwindigkeit kann dem Keile in jeder Tiefe durch den Stoß mitgetheilt werden, indem man auf ſeinen Rücken ein Gewicht von einer beliebigen Höhe herabfallen läßt; alſo laſſen ſich bey ihm, eben ſo wie beym Prisma, die Tiefen beſtimmen, zu denen derſelbe durch mehrere aufeinander fol-

gende gleich ſtarke Schläge nach und nach einſinken muß.

Es ſey vor dem erſten Schlage $f = b\sqrt[3]{4}$, oder das Gewicht ſey ihm Anfangs bloß aufgelegt, und mit ihm von der Oberfläche des Bodens herabgeſunken, ſo wird nach demſelben: $p^4 - f^3 p = f^3 H$. Hieraus erhält man für ſeine Tiefe $p^{(2)}$ nach dem zweyten Schlage:

$$p^{(2)4} - f^3 p^{(2)} = p^4 + f^3 (H - p) = 2f^3 H;$$

nach dem dritten

$$p^{(3)4} - f^3 p^{(3)} = p^{(2)4} + f^3 (H - p^{(2)}) = 3f^3 H;$$

und allgemein, für ſeine Tiefe $p^{(n)}$ nach dem nten Schlage:

$$p^{(n)4} - f^3 p^{(n)} = nf^3 H = n (p^4 - f^3 p).$$

Hat man alſo die Tiefe des Keiles p, zu der ihn der erſte Schlag eintreibt, gemeſſen, ſo kann man daraus leicht die folgenden Tiefen durch Auflöſung der biquadratiſchen Gleichung herleiten.

Zur Erläuterung dieſer Formel, und zugleich zum Beweiſe für die Richtigkeit derſelben mögen folgende von Lambert angeſtellte Verſuche dienen:

Er ließ eine Pyramide aus Holz von 2 Zoll Höhe, und einer rechtwinklichten Baſis von 7‴ Länge und $4\frac{5}{7}$‴ Breite verfertigen. Sie wurde mit dem vorigen Hammer beſchwert, und ſank damit in den Sand bis zu einer Tiefe von $8\frac{1}{2}$‴ herab. Das Eindringen nach dem erſten Schlage betrug ferner $4\frac{1}{2}$‴; alſo war $f = 8\frac{1}{2}$, $p = 13$, $p^4 - f^3 p = 20577\frac{3}{8}$, welches für die Tiefe $p^{(n)}$ nach dem nten Schlage folgende Gleichung giebt:

$$p^{(n)4} - 614\frac{1}{8} p^{(n)} = 20577\frac{3}{8} . n.$$

Hieraus bekommt man für

n = 1	2	3	4	6
$p^{(n)}$ = 13,00	14,98	16,38	17,46	19,18

die beobachteten Tieſen waren dagegen

$p^{(n)}$ = 13	15	16	$17\frac{1}{2}$	19

die offenbar von den berechneten nur um ſehr geringe Unterſchiede abweichen.

§. 191.

Fig. 22. Aufgabe. Von einem cylindriſchen Körper iſt das Gewicht = M, der Halbmeſſer ſeines Querſchnittes CB = a, und ſeine Länge = b gegeben; man fragt, wie tief derſelbe in einen Boden von beſtimmter Feſtigkeit horizontal (ſo daß nemlich ſeine Axe der Oberfläche des Bodens parallel bleibt) eingelegt werden müſſe, damit er von ihm im Gleichgewichte gehalten werde.

Aufl. 1) Man ſetze die geſuchte Tiefe BD = p; einen unbeſtimmten Theil derſelben BP = x; die dazu gehörige Ordinate PM = y; ferner ſey, wie im §. 186. 2) das Gewicht eines Prisma's, das bey einer Grundfläche = c^2 in einer Tiefe des Bodens = f ruhen bleibt, = G; ſo leidet das Element Mm der Cylinderfläche, da es von einem Erdſtreiſe = bdy in der Tiefe PD = p — x getragen wird, den vertikalen Widerſtand:

$$d\Pi = \frac{Gb(p - x)\,dy}{c^2 f}$$

2) Wofern man nun annimmt, daß die ganze Tiefe BD gegen den Halbmeſſer BC nur gering iſt, ſo

kann in der Gleichung $y^2 = 2ax - x^2$ ohne Nachtheil das letztere Glied x^2 weggelaſſen, und bloß $y^2 = 2ax$ geſetzt werden. Dadurch wird $x = \frac{y^2}{2a}$, alſo

$$d\Pi = \frac{Gb\,(2ap - y^2)\,dy}{2ac^2f}.$$

und folglich der Widerſtand, den der Boden gegen das zwiſchen B und M liegende Flächenſtück ausübt:

$$\Pi = \frac{Gb\,(2ap - \frac{1}{3}y^2)\,y}{2ac^2f}.$$

3) Hierin $x = p$, oder $y = \sqrt{2ap}$ geſetzt, giebt den Widerſtand auf die halbe Fläche des eingeſenkten Theiles $= \frac{2Gbp\sqrt{2ap}}{3c^2f}$, wovon das Doppelte dem Gewichte des Cylinders gleich ſeyn muß. Man erhält alſo:

$$\frac{4Gbp\sqrt{2ap}}{3c^2f} = M$$

woraus $p = \sqrt[3]{\left(\frac{9M^2c^4f^2}{32G^2b^2a}\right)}$ wird.

4) Für einerley Boden iſt $\frac{c^2f}{G}$ ein unveränderlicher Quotient; daher verhält ſich bey dieſer Vorausſetzung p direkt, wie $M^{\frac{2}{3}}$, und verkehrt, wie $\sqrt[3]{b^2a}$.

§. 192.

Hieraus läßt ſich ferner die Tiefe, zu welcher der Cylinder von der Oberfläche des Bodens aus der Ruhe herabſinken muß, auf folgende Art beſtimmen:

Man nehme die Größen x, h und P hier wieder

in eben der Bedeutung, wie im §. 176.; ſo hat man nach vorhergehendem Satze (4) die Proportion:

$$p : x = M^{\frac{2}{3}} : (M - P)^{\frac{2}{3}},$$

woraus $P = M\left[1 - \left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$ folgt.

Dies für P in die Gleichung $Mdh = Pdx$ geſetzt, giebt

$$dh = \left[1 - \left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}\right] dx,$$

alſo $h = x - \frac{2}{5}\sqrt{\left(\frac{x^5}{p^3}\right)}$,

wozu hier keine Konſtante addirt wird, weil für $x = o$, auch $h = o$ ſeyn ſoll. Nennt man nun die geſuchte größte Tiefe das Einſinkens $= g$, ſo iſt für $x = q$, zum zweytenmale $h = o$; alſo erhält man dafür die Gleichung:

$$o = q - \frac{2}{5}\sqrt{\left(\frac{q^5}{p^3}\right)},$$

mithin $q = p\sqrt[3]{\frac{25}{4}}$, oder $= \sqrt[3]{\left(\frac{225 M^2 c^4 f^2}{128 G^2 b^2 a}\right)}$.

§. 193.

Man ſetze, der Cylinder werde in dieſer eingeſenkten Lage, die er durch ſein eigenes Gewicht M bekommen hat, nach horizontaler Richtung, oder parallel mit der Oberfläche des Bodens EF fortgezogen, ſo iſt klar

1) daß ſeine Tiefe in demſelben unverändert dieſelbe, alſo ſtets $= q$ bleiben müſſe, weil dieſe allein von ſeinem Gewichte abhängt, das aber durch den gedachten Zug weder vermehrt noch vermindert wird;

2) daß, wenn ſeine Bewegung bereits gleichför-

mig geworden iſt, zur Unterhaltung derſelben nicht mehr Kraft erfordert werde, als zur Ueberwindung des Widerſtandes nöthig iſt, den ihm der Boden nach der horizontalen Richtung entgegen ſetzt.

Um nun dieſen Widerſtand, den wir R nennen wollen, in Rechnung zu bringen, nehme man in §. 191. BD = q, und zerlege den vertikalen Druck $d\Pi = \frac{Gb\,(2aq - y^2)\,dy}{2ac^2f}$, der auf das Element Mm kommt, in einen längs dem Halbmeſſer MC = $d\Pi$ Cos BCM $d\Pi\,(1 - \frac{x}{a})$, und in einen darauf ſenkrechten nach der Tangente an M = $d\Pi$ Sin BCM.

Erſterer, der hier nur allein wirkſam iſt, geht durch C, den Schwerpunkt des Cylinders nach der Richtung Cw, und zerfällt noch daſelbſt in einen Theil nach der Vertikale Cv, und in einen nach der Horizontale Cu. Letzterer iſt

$$dR = d\Pi\,(1 - \frac{x}{a})\,\text{Sin vCw} = d\Pi\,(1 - \frac{x}{a}).\frac{y}{a}$$

$$= \frac{Gb}{2a^2c^2f}(2aqy - y^3)\,(1 - \frac{y^2}{2a^2})\,dy,$$

wovon das Integral

$$R = \frac{Gb}{2a^2c^2f}[aqy^2 - \tfrac{1}{4}y^4\,(1 + \frac{q}{a}) + \frac{y^6}{12a^2}] \text{ iſt.}$$

Hierin x = q, oder $y^2 = 2aq$ geſetzt, giebt endlich den geſammten horizontalen Widerſtand, den der Cylinder beym Fortrollen leidet:

$$K = \frac{Gb}{2a^2c^2f}(a^2q^2 - \tfrac{1}{3}aq^3) = \frac{Gbq^2}{2ac^2f}(a - \tfrac{1}{3}q)$$

oder, wenn man den beſtändigen Faktor $\frac{G}{c^2f} = \lambda$ nennt,

$$R = \frac{\lambda b q^2}{2a}(a - \tfrac{1}{3}q), \text{ worin}$$

$$q = \sqrt[3]{\left(\frac{225\,M^2}{128\,\lambda^2 b^2 a}\right)} \text{ iſt (§. 192.).}$$

Da in den meiſten Fällen $\frac{1}{3}q$ gegen a nur gering iſt, ſo folgt, daß ſich der Widerſtand beynahe wie bq^2, d. i. direkt wie $M^{\frac{4}{3}}$, und verkehrt wie $\sqrt[3]{a^2b}$ verhalte.

§. 194.

Man ſieht ohne mein Erinnern leicht, daß ſich hiervon eine Anwendung auf die Berechnung des Widerſtandes machen laſſe, der bey Fuhrwerken jeder Art überwunden werden muß, ſobald das Rad in den Boden einſinkt.

Ein anderes Verfahren, dieſes Hinderniß zu beſtimmen, deſſen ſich Herr Prof. Suß in ſeiner Abhandlung über das Fuhrweſen *) bedient, gründet ſich darauf, daß man die Erde als eine vollkommen flüßige Subſtanz anſehen könne, was ſich doch aber gewiß nur beyläufig, in Ermangelung ſicherer Vorausſetzungen annehmen läßt. Da in ſeiner Formel Winkel vorkommen, die vorher erſt beſonders berechnet werden müſſen, ſo kann ich nicht allgemein angeben, in wie fern ſie von

*) Verſuch einer Theorie des Widerſtandes zwey und vierrädriger Fuhrwerke auf Fahrwegen jeder Art. Kopenhagen 1798.

der meinigen abweicht; ich ſchränke mich daher bloß auf folgendes von ihm gegebene Exempel ein:

In feuchtem grobkörnigen Sande trat eine eiſerne Stange von 5 ℔ Gewicht, und 1 Quadratzoll Baſis in einer Tiefe von $\frac{5}{12}$ Zoll mit demſelben ins Gleichgewicht; dies giebt alſo $\lambda = \frac{G}{c^2 f} = 12$. Nun ſey der Theil, der von der ganzen Laſt des Wagens auf ein einzelnes Rad kommt, = 450 ℔; das Gewicht des Rades ſelbſt = 84 ℔, alſo M = 534 ℔; ferner der Halbmeſſer des Rades $a = 15\frac{3}{4}''$, ſeine Breite $b = 3''$; ſo erhält man $\log q = 0{,}4633899$, $q = 2{,}90663''$, $a - \frac{1}{3}q = 14{,}78112$

$$\log (a - \tfrac{1}{3}q) = 1{,}1697074$$

$$\log \frac{\lambda b q^2}{2a} = 0{,}9847718$$

$$\log R = 2{,}1544792$$

$$R = 142{,}718 \text{ ℔}.$$

Nach Herrn Fuß Rechnung beträgt R = 136,878 ℔; ſo daß alſo in dieſem Falle deſſen Formel mit der meinigen ziemlich gut übereinſtimmt.

Achtes Kapitel.

Von der Umdrehung der Körper um feſte Axen.

§. 195.

Wenn bey der Bewegung eines feſten Körpers zwey ſeiner Punkte A und B in Ruhe bleiben, ſo gilt dies auch von allen übrigen Punkten deſſelben, die in der geraden Linie AB liegen: denn es kann keiner dieſer Punkte ſeinen Ort ſo verändern, daß er dabey ſowohl von A als B ſeine vorige Entfernung behielte, wie doch nach dem Begriffe der Feſtigkeit des Körpers durchaus erforderlich iſt.

Eine ſolche Linie AB nennt man eine **feſte Axe** des Körpers, und die Bewegung deſſelben, ſeine **Umdrehung** um dieſe Axe.

§. 196.

Indem der Körper ſich um die feſte Axe AB dreht, bewegt ſich

Fig. 23. I. jeder ſeiner Punkte F in einer auf AB ſenkrechten Ebene FCf, und beſchreibt darin um den Punkt C, worin die Axe von gedachter Ebene geſchnitten wird, einen Kreis.

II. Während der Punkt F durch den Bogen Ff fortrückt, durchläuft jeder andere Punkt des Körpers Z ein ähnliches Bogenſtück Zz; dem nemlich ein eben ſo

großer Winkel ZOz = FCf an ſeinem Mittelpunkte O zugehört.

Beweis I. Es ſey f der Ort, wohin der Punkt F nach Verlauf einer beliebigen Zeit gelangt iſt. Man fälle aus F auf die Axe AB das Perpendikel FC, und ziehe die Linie Cf, ſo iſt, vermöge der Feſtigkeit des Körpers, und wegen der unveränderlichen Lage, worin A und C während der Bewegung des Punktes F geblieben ſind, fA = FA, und fC = FC; alſo ſind die Dreyecke AfC und AFC kongruent, und es iſt folglich auch ACf = 90°, mithin die Ebene FCf auf AC ſenkrecht.

II. Indem F und Ff fortrückt, beſchreibt auch der Punkt Z einen Bogen Zz, der in einer, ebenfalls auf AB ſenkrechten, Ebene ZOI liegt. Man laſſe dieſe von der Ebene FCB in OI ſchneiden, ſo iſt auch OI auf AB ſenkrecht, alſo mit CF parallel, und wenn man daher OI = CF macht, läuft auch FI mit CO parallel, und iſt = CO, oder = dem ſenkrechten Abſtande der beyden parallelen Ebenen FCf und IOZ, den wir = p nennen wollen.

Nun habe während der Zeit, da F in f kommt, I den Weg Ii gemacht, ſo iſt der jetzige Abſtand fi der beyden Punkte f und i noch = dem vorigen FI = p; alſo fi auf IOZ gleichfalls ſenkrecht, und folglich mit CO parallel. Demnach liegen Cf und Oi in einer Ebene, und ſind wegen der rechten Winkel, die ſie beyde mit CO machen, ebenfalls parallel; woraus zuvörderſt die Gleichheit der Winkel FCf und IOi folgt.

Ferner iſt in den Dreyecken ZOI und zOi, IO =

io, ZO = zO, und ZI = zi, alſo der Winkel zOi = ZOI; hierzu beyderſeits noch den Winkel Zoi addirt, giebt endlich ZOz = IOi = FCf.

§. 197.

1. Wenn daher einer der Punkte im Körper, z. B. F, ſich gleichförmig in ſeinem Kreiſe bewegt, ſo gilt ſolches auch von jedem andern Punkte Z deſſelben: denn alsdann iſt der Bogen Ff, und mit ihm der dazu gehörige Winkel FCf, der Zeit proportional, worin er zurückgelegt wird; folglich auch, da FCf = ZOz iſt, der Bogen Zz, den der Punkt Z beſchreibt.

2. Man ſagt in dieſem Falle vom ganzen Körper, er drehe ſich um ſeine Axe AB **gleichförmig**, und nennt den Winkel, der von jedem Radius, wie FC und ZO, in einer Sekunde beſchrieben wird, oder auch den dazu gehörigen Bogen für den Halbmeſſer = 1, die **Winkelgeſchwindigkeit** dieſer gleichförmigen Umdrehung.

3. Es ſey dieſe = γ; die Geſchwindigkeit des Punktes F in ſeiner Bahn, oder der Raum, den derſelbe in einer Sekunde durchläuft, = c; die des Punktes Z = u; ſo iſt $c = \gamma . FC$, und $u = \gamma . ZO$; alſo $c : u = FC : ZO$. d. h. die Geſchwindigkeiten zweyer Punkte des Körpers in ihren Kreisbahnen verhalten ſich, wie ihre ſenkrechten Entfernungen von der Umdrehungsaxe.

4. Wir haben §. 60. geſehen, daß ein materieller Punkt, der in einem Kreiſe, oder irgend einer andern vorgeſchriebenen Kurve ſich bewegt, ſeine Geſchwindig-

keit in derſelben ohne Einwirkung einer Kraft nicht ändere. Hieraus folgt offenbar, daß eben dies Geſetz der Trägheit auch bey der Umdrehung eines Körpers, oder ganzen Syſtems ſolcher einzelnen Theilchen um eine feſte Axe ſtatt finden müſſe; daß nemlich der Körper ſo lange fortfahre, mit der einmal erhaltenen Winkelgeſchwindigkeit ſich gleichförmig um die Axe zu drehen, bis durch irgend eine Kraft die Umdrehung beſchleunigt oder verzögert wird.

§. 198.

Wenn der Winkel FCf $= \Phi$, um den ſich der Körper in einer gegebenen Zeit t gedrehet hat, dieſer Zeit nicht proportional, ſondern irgend eine zuſammengeſetztere Funktion davon iſt, ſo heißt die Umdrehung des Körpers ungleichförmig. Seine Winkelgeſchwindigkeit iſt alsdann eine veränderliche Größe, die aus dem Geſetze, nach welchem φ von t abhängt, auf folgende Art beſtimmt wird.

1) Man nenne den Bogen, den der Punkt F während der Zeit t beſchrieben hat, $= s$, ſeine Geſchwindigkeit zu Ende derſelben $= v$, den Halbmeſſer des Kreiſes, worin er ſich bewegt, FC $=$ f, ſo hat man (§. 58. 11.) $v = \frac{ds}{dt}$; ferner $s = f\varphi$, alſo $\frac{ds}{dt} = f \cdot \frac{d\Phi}{dt}$, und folglich $v = f \cdot \frac{d\Phi}{dt}$.

2) Und wenn z, u, r eben dieſe Stücke für den Punkt Z bedeuten, ſo iſt $u = \frac{dz}{dt}$, $z = r\varphi$, $\frac{dz}{dt} = r$.

$\frac{d\varphi}{dt} = u$; mithin $v : u = f : r$. Daher verhalten ſich auch noch bey ungleichförmiger Umdrehung des Körpers die gleichzeitigen Geſchwindigkeiten einzelner Punkte in ihm, wie die Halbmeſſer ihrer Kreisbahnen.

3) Nennt man demnach für eben den Zeitpunkt die Winkelgeſchwindigkeit des Körpers, oder die Umlaufsgeſchwindigkeit eines ſeiner Punkte, der ſich in der Entfernung $= 1$ von der Axe AB befindet, $= \gamma$, ſo wird

$$1 : r = \gamma : u, \text{ folglich}$$

$$\gamma = \frac{u}{r} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

§. 199.

Aufgabe. Ein Körper von gegebener Form und Maſſe $= M$ ſey um die feſte Axe AB beweglich. Auf einen ſeiner Punkte F wirke fortdauernd eine Kraft V in der Umdrehungsebene dieſes Punktes ſenkrecht auf ſeine Entfernung $FC = f$ von der Axe. Man ſucht die Winkelgeſchwindigkeit des Körpers, nachdem ſeine Umdrehung eine gegebene Zeit t hindurch von der Kraft beſchleunigt iſt.

Aufl 1) Es ſey dieſe für die angenommene Zeit $= \gamma$, die Aenderung, die ſie durch die Kraft V im nächſten Zeittheilchen dt leidet, $= d\gamma$; ferner ſey für eben die Zeit die Geſchwindigkeit eines Theilchens dM der ganzen Maſſe M, das bey Z in der Entfernung $ZO = r$ von der Axe liegt, $= v$, ſo iſt (§. 198. 3.) $v = r\gamma$, und folglich $dv = rd\gamma$.

2) Man

2) Man ſetze, dieſe Aenderung in der Geſchwindigkeit des Elementes dM hervorzubringen, ſey eine Kraft $= p$, ſenkrecht auf ZO, oder nach der Tangente des Bogens, den der Punkt Z in dem Zeittheile dt beſchreibt, erforderlich, ſo wird (§. 62. 3.) $\frac{dv}{dt} = \frac{2gp}{dM}$, alſo $p = \frac{dM}{2g} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{rdM}{2g} \cdot \frac{d\text{ȣ}}{dt}$, und das Moment die dieſer Kraft gegen die Axe $AB = pr = \frac{r^2 dM}{2g} \cdot \frac{d\text{ȣ}}{dt}$.

3) Wenn nun zu gleicher Zeit auf jedes andere Theilchen dM des Körpers eine ſolche Kraft p wirkte, ſo würde eines jeden Geſchwindigkeit v eben die Aenderung $dv = rd\text{ȣ}$ leiden, als dadurch wirklich geſchieht, daß der ganze Körper ſeine Winkelgeſchwindigkeit aus ȣ in $\text{ȣ} + d\text{ȣ}$ umändert. Daher ſind dieſe Elementarkräfte in Verbindung der Kraft V während des Zeittheils dt äquipollent, und müſſen alſo, auf die ihnen zugehörigen Stellen nach entgegengeſetzter Richtung angebracht, der Kraft V an der Axe AB das Gleichgewicht halten.

4) Dem zufolge muß die Summe ihrer einzelnen Momente, oder das Integral $\int \frac{r^2 dM}{2g} \cdot \frac{d\text{ȣ}}{dt}$, durch den ganzen Körper genommen, dem Momente Vf der Kraft V gleich ſeyn.

Da nun für den gegebenen Zeitpunkt der Werth von ȣ beſtimmt, alſo $\frac{d\text{ȣ}}{dt}$ in dem Differenzialausdrucke ein unveränderlicher Faktor iſt, ſo erhält man

$$Vf = \frac{d\gamma}{2gdt} . \int r^2 dM, \text{ und daraus}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2gfV}{\int r^2 dM},$$

für die Zunahme $d\gamma$ der Winkelgeſchwindigkeit des Körpers, die in jedem Zeittheile dt durch die Kraft V hervorgebracht wird.

Vom Momente der Trägheit.

§. 200.

Das Integral $\int r^2 dM$, oder die Summe von den Produkten aller Elemente des Körpers in die Quadrate ihrer Entfernungen von der Axe AB, hat für jeden gegebenen Körper, der ſich um eine beſtimmte Axe dreht, einen unveränderlichen Werth, der zuvor berechnet werden muß, ehe man von der gefundenen Formel Gebrauch machen kann. Man nennt dieſe Größe das **Moment der Trägheit** des Körpers in Bezug auf ſeine Umdrehungsaxe.

Da daſſelbe, als Summe von Größen der fünften Dimenſion, ſelbſt dieſe Dimenſion haben muß, ſo iſt begreiflich, daß man es unter der Form Mh^2 darſtellen, oder als ein Produkt aus der ganzen Maſſe M des Körpers in das Quadrat einer beſtimmten Entfernung h von der Axe betrachten könne, die nach vollendeter Integration ſich leicht angeben läßt. Dies vorausgeſetzt, wird:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2gfV}{Mh^2}, \text{ alſo}$$

$$\upsilon = \gamma + \frac{2gf}{Mh^2}\int V dt,$$

und in dem Falle, wenn V unveränderlich iſt:

$$\upsilon = \gamma + \frac{2gfVt}{Mh^2};$$

in welchen beyden Formeln der beſtändige Theil γ die anfängliche Winkelgeſchwindigkeit des Körpers bezeichnet.

§. 201.

Fig. 5. **Aufgabe.** Das Moment der Trägheit eines gleichartigen Körpers, der von einer ſtetigen Oberfläche begrenzt wird, in Beziehung auf irgend eine, durch ihn gehende, Axe OA zu beſtimmen.

Aufl. 1) Man lege durch dieſe Axe, in der man irgend einen Punkt O zum Anfangspunkte der Abſciſſen angenommen hat, nach Gefallen eine Ebene BOA, fälle darauf aus einem beliebigen Punkte m des Körpers das Perpendikel mq, und aus q auf die Axe noch ein zweytes qp; ſo daß die Lage des Punktes m durch die drey rechtwinklichten Koordinaten Op $=$ x, pq $=$ y, und qm $=$ z beſtimmt wird.

2) Man laſſe dieſe Koordinaten um willkührliche Differenziale pp′ $=$ dx, oq′ $=$ dy, rm′ $=$ dz wachſen, wodurch der Endpunkt der letztern Ordinate qm aus m an einen andern, unendlich nahe liegenden, Ort m′ verſetzt werden mag.

3) Zwiſchen den beyden Punkten m und m′ ergänze man das rechtwinklichte Parallelepipedum mm′, indem man durch m drey, den Koordinaten parallele,

Linien zieht, und auf dieſen die Stücke dx, dy, dz abnimmt; ſo iſt der Inhalt von deſſen Grundfläche = dxdy, und ſeine Höhe = dz; alſo ſein körperlicher Inhalt = dxdydz, und wenn man die Dichte des Körpers = $\varkappa$ ſetzt, ſeine Maſſe dM = $\varkappa$dxdydz.

4) Dabey iſt ſeine Entfernung mp von der Axe, die (§. 199. 1.) r genannt wurde, $= \surd (y^2 + z^2)$; alſo das Produkt

$$r^2 dM = (y^2 + z^2)\, dM = \varkappa dzdydz\, (y^2 + z^2).$$

5) Dies Produkt von allen Elementen des Körpers, die längs mq liegen, zuſammengenommen, oder ſolchergeſtalt integrirt, daß dabey nur z als veränderlich angeſehen wird, giebt das Moment der Trägheit der ganzen Säule, die bey eben der Grundfläche des zuvor betrachteten Parallelepipedums (3) die Höhe mq = z hat, $= \varkappa dxdy\, (y^2 z + \frac{1}{3} z^3)$.

6) Das Differenzial $(y^2 + z^2)\, dM$ iſt jederzeit poſitiv, und vergrößert folglich ſein Integral, auch wenn die Ordinate mq unterhalb q fortgeſetzt wird. Um alſo letzteres vollſtändig zu haben, muß darin z beyden Theilen der ganzen Ordinate, die von q bis zur Oberfläche gehen, gleich geſetzt, und was daraus entſpringt, addirt werden.

7) Begreiflich können dieſe Werthe von z nur allein von x und y abhängen, und wenn man alſo den Ausdruck, worin ſich $y^2 z + \frac{1}{3} z^3$ durch die Subſtitution verwandelt, = Y ſetzt, ſo ſind x und y die einzigen veränderlichen Größen, die in dieſem Y noch vorkommen.

8) Man nehme nun ferner von $\varkappa dxdy \,.\, Y$, in-

dem man bloß y als veränderlich betrachtet, das Integral $= \varkappa dx \int Ydy$, und ſetze darin für y die beyden Theile der Ordinate pq, die auf verſchiedenen Seiten der Axe von p aus bis zum Umfange der Ebene BOA hinlaufen.

9) Die beyden Werthe von $\int Ydy$, die hieraus entſtehen, addire man, und nenne die Summe $= X$, ſo erhält man $\varkappa Xdx$ für das Moment der Trägheit von dem Schnitte des Körpers, der zwiſchen den beyden unendlich nahe liegenden parallelen Ebenen pqm, p′q′m′ enthalten iſt.

10) Dies nochmals nach x integrirt, und dann x = den beyden Theilen der ganzen Axe OA' genommen, ſo weit dieſelbe von O aus innerhalb dem Raume des Körpers nach entgegengeſetzten Seiten fortläuft, und, was herauskommt, addirt, giebt endlich für dieſe Axe das verlangte Moment der Trägheit des ganzen Körpers.

§. 202.

Fig. 24. **Exempel I.** Der Körper ſey ein rechtwinklichtes Parallelepipedum AI, und die eine Seitenlinie AB ſeiner Grundfläche CAB die Axe, wofür man ſein Moment der Trägheit zu beſtimmen ſucht.

Man ſetze dieſe = a; die andere Seite AC der Grundfläche = b, die Höhe AD = c; ſo iſt zuvörderſt, wenn die Grundfläche zur Ebene der beyden Ordinaten x und y angenommen wird, der eine Werth von z, den man in $y^2z + \frac{1}{3}z^3$ zu ſubſtituiren hat, = c, der andere = o; alſo:

$$Y = y^2c + \frac{1}{3}c^3, \text{ mithin}$$

$$\int Ydy = \frac{1}{3}y^3c + \frac{1}{3}c^3y.$$

Hierin $y = b$ geſetzt, erhält man ferner:

$$X = \frac{1}{3}b^3c + \frac{1}{3}c^3b,$$

$$\int Xdx = \frac{1}{3}x\,(b^3c + c^3b),$$

und folglich, wenn man $x = a$ nimmt, das Moment der Trägheit des Parallelepipedums gegen die Axe AB $= \frac{1}{3}\varkappa a\,(b^3c + c^3b) = \frac{1}{3}\varkappa abc\,(b^2 + c^2)$, oder durch ſeine Maſſe $M = \varkappa abc$ ausgedrückt, $= \frac{1}{3}M\,(b^2 + c^2) = \frac{1}{3}M \,.\, BI^2$.

§. 203.

Fig. 25. **Exempel II.** Das Moment der Trägheit eines geraden Prisma's AF, deſſen Grundfläche ein rechtwinklichtes Dreyeck ACD iſt, in Beziehung auf die Seitenlinie AB einer der ſpitzen Kanten zu finden.

Es ſey die Länge der Axe AB, oder die Höhe des Prisma's, $= a$; der daranliegende Kathet AC der Grundfläche $= b$, der andere Kathet CD $= c$; ferner ſey pol ein unbeſtimmter Querſchnitt des Prisma's, parallel der Grundfläche, und in demſelben mq ſenkrecht auf po, alſo auch ſenkrecht auf der Seitenfläche CAB, die wir zur Ebene der Koordinaten x und y annehmen wollen, ſo hat man:

$$pq : qm = po : ol,$$

oder, da po $=$ AC, und ol $=$ CD iſt:

$$y : z = b : c,$$

$$\text{alſo } z = \frac{cy}{b}.$$

Dieſer Werth für Z in $y^2z + \frac{1}{3}z^3$ ſubſtituirt, giebt:

$$Y = \frac{cy^3}{b} + \frac{c^3y^3}{3b^2} = \frac{cy^3}{b}\left(1 + \frac{c^2}{3b^2}\right),$$

$$\int Ydy = \frac{cy^4}{4b}\left(1 + \frac{c^2}{3b^2}\right),$$

und darin $y = po = b$ geſetzt:

$$X = \tfrac{1}{4}cb^3\left(1 + \frac{c^2}{3b^2}\right) = \tfrac{1}{4}bc\left(b^2 + \tfrac{1}{3}c^2\right).$$

Demnach wird $\int Xdx$, für $x = a$, $= \frac{1}{4}abc(b^2 + \frac{1}{3}c^2)$; mithin das Moment der Trägheit des Priſma's in Bezug auf die Seitenlinie $AB = \frac{1}{4}\varkappa abc\,(b^2 + \frac{1}{3}c^2)$, oder durch deſſen Maſſe $M = \frac{1}{2}\varkappa abc$ ausgedrückt, $= \frac{1}{2}M\,(b^2 + \frac{1}{3}c^2)$.

§. 204.

1. Hieraus läßt ſich leicht das Moment der Trägheit eines geraden Priſma's, deſſen Grundfläche ein gleichſchenklichtes Dreyeck iſt, wovon Höhe und Grundlinie b und c heißen mögen, in Anſehung derjenigen Seitenlinie beſtimmen, die durch die Spitze der Grundfläche geht. Man ſetze nemlich daſſelbe $= Mh^2$, und theile das Priſma mit einer durch die Axe gelegten Ebene in zwey andere, gleiche große Priſmen, deren Grundflächen alſo rechtwinklichte Dreyecke ſind; ſo iſt das Moment der Trägheit eines jeden derſelben gegen die gemeinſchaftliche Axe $= \frac{1}{2}Mh^2$, die Maſſe $= \frac{1}{2}M$, der Kathet der Grundfläche, der an der Axe liegt, $= b$, der andere $= \frac{1}{2}c$; folglich, wenn man dieſe Größen für M, b und c in voriger Formel ſubſtituirt:

$$\frac{1}{2}Mh^2 = \frac{1}{4}M(b^2 + \frac{1}{12}c^2),$$

$$\text{alſo } Mh^2 = \frac{1}{2}M(b^2 + \frac{1}{12}c^2).$$

2. Eben dies iſt auch zugleich das Moment der Trägheit eines geraden vielſeitigen Prisma's mit regulärer Grundfläche, wovon jede Seite $= c$, und ihr Abſtand vom Mittelpunkte $= b$ iſt, in Anſehung derjenigen Axe, die, parallel mit den Seitenlinien des Prisma's, durch deſſen Schwerpunkt geht. Um aber die Formel für dieſen Fall noch bequemer einzurichten, ſetze man die Anzahl der Seitenflächen $= n$, ſo iſt der Winkel am Mittelpunkte der Grundfläche, der den einzelnen Seiten zugehört, $= \frac{360^\circ}{n}$, alſo $b = \frac{1}{2}c \cdot \text{Cot}\,\frac{180^\circ}{n}$; mithin das Moment der Trägheit des nſeitigen Prisma's für die centrale Axe $= \frac{1}{24}Mc^2(1 + 3\,\text{Cot}^2\,\frac{180^\circ}{n})$.

§. 205.

Fig. 26. **Exempel III.** Es ſey OABC eine dreyſeitige Pyramide, wovon die eine Seitenlinie OA auf der Grundfläche ACB, die bey B rechtwinklicht iſt, ſenkrecht ſteht; man ſucht, in Bezug auf dieſe Seitenlinie, ihr Moment der Trägheit.

Man ſetze die Länge der Axe OA, oder die Höhe der Pyramide $= a$, den daran liegenden Katheten AB der Grundfläche $= b$, den gegenüber liegenden BC $= c$, und verfahre in der Konſtruktion, wie vorhin beym Prisma, ſo erhält man dadurch für die Oberfläche der Pyramide die drey rechtwinklichten Koordinaten $Op = x$, $pq = y$, $qm = z$.

Nun iſt zuvörderſt wegen der Aehnlichkeit der Δpmq, pol, und ACB:

$$pq : qm = AB : BC, \text{ oder}$$

$$y : z = b : c, \text{ alſo}$$

$$z = \frac{cy}{b},$$

wodurch, wie zuvor $\int Ydy = \frac{cy^4}{4b}\left(1 + \frac{c^2}{3b^2}\right)$ wird.

Ferner iſt OA : Op = AB : po', oder

$$a : x = b : po, \text{ alſo}$$

$$po = \frac{bx}{a},$$

und da dies der Werth iſt, den man für y in $\int Ydy$ zu ſubſtituiren hat, ſo erhält man

$$X = \frac{bcx^4}{4a^4}(b^2 + \tfrac{1}{3}c^2)$$

$$\int Xdx = \frac{bcx^5}{20a^4}(b^2 + \tfrac{1}{3}c^2).$$

Darin endlich x = a geſetzt, giebt das geſuchte Moment der Trägheit der Pyramide für die Axe OA $= \frac{1}{20}\varkappa abc(b^2 + \frac{1}{3}c^2)$, oder, mit Zuziehung ſeiner Maſſe $M = \frac{1}{6}\varkappa abc$, $= \frac{3}{10}M(b^2 + \frac{1}{3}c^2)$.

Hieraus ergiebt ſich ferner, nach dem im §. 204. gezeigten Verfahren, das Moment der Trägheit einer nſeitigen Pyramide mit regulärer Grundfläche, wovon jede Seite = c iſt, in Anſehung ihrer geometriſchen Axe $= \frac{1}{40}Mc^2\left(1 + 3\,\mathrm{Cot}^2\frac{180^\circ}{n}\right)$.

§. 206.

Exempel IV. Das Moment der Trägheit eines geraden Cylinders für einen Durchmeſſer ſeiner Grundfläche zu finden.

1) Es ſey ſeine Höhe $= a$, der Halbmeſſer ſeiner Grundfläche, die wir zur Ebene der Koordinaten x und y annehmen wollen, $= b$, ſo iſt für die Oberfläche $z = a$, mithin

$$Y = y^2 a + \tfrac{1}{3} a^3$$

$$\int Y dy = \tfrac{1}{3} y^3 a + \tfrac{1}{3} a^3 y.$$

2) Und wenn man den Anfangspunkt der Abſciſſen in den Mittelpunkt der Grundfläche ſetzt, und zuerſt nur die Rechnung für den Quadranten anſtellt, hat man für deſſen Umfang $y^2 = b^2 - x^2$; unter welcher Bedeutung von y alſo

$$\int X dx = \tfrac{1}{3} a\,(\int y^3 dx + a^2 \int y dx) \text{ wird.}$$

3) Nun iſt nach der bekannten Formel $\int p dq = pq - \int q dp$, wenn man darin $p = y^3$ und $q = x$ ſetzt,

$$\int y^3 dx = y^3 x - 3\int x y^2 dy,$$

oder, da $y dy = - x dx$,

$$\int y^3 dx = y^3 x + 3\int x^2 y dx.$$

4) Ferner bekommt man auch, indem man bloß für y^2 ſeinen Werth $b^2 - x^2$ ſetzt,

$$\int y^3 dx = b^2 \int y dx - \int x^2 y dx.$$

5) Letztere Gleichung durch 3 multiplicirt, und dann zu erſterer (3) addirt, giebt:

$$4\int y\ dx = y^3 x + 3b^2 \int y dx, \text{ alſo:}$$

$$\int X dx = \tfrac{1}{3} a\,(\tfrac{1}{4} y^3 x + (a^2 + \tfrac{3}{4} b^2) \int y dx),$$

deſſen Werth für $x = b$, $= \frac{1}{12} \pi a b^2 (a^2 + \frac{3}{4} b^2)$ iſt,

weil alsdann der erſte Theil verſchwindet, und im letztern das Integral $\int y dx$ bekanntlich $= \frac{1}{4}\pi b^2$ wird.

6) Hiervon das Vierfache genommen, erhält man den Werth von $\int X dx$ für den ganzen Kreis $= \frac{1}{3}\pi a b^2 (a^2 + \frac{3}{4} b^2)$; alſo das Moment der Trägheit des Cylinders für den Durchmeſſer ſeiner Grundfläche $= \varkappa \int X dx = \pi \varkappa a b^2 (\frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{4} b^2)$, oder durch ſeine Maſſe M $= \pi \varkappa a b^2$ ausgedrückt, $= M (\frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{4} b^2)$.

§. 207.

Bey Körpern, deren Oberflächen durch Gleichungen vom zweyten, oder einen noch höhern Grade beſtimmt werden, iſt doch die Entwickelung des doppelten Integrals $\iint Y dx dy$ mit zu vielen Schwierigkeiten verknüpft, als daß man nicht lieber in ſolchen Fällen den allgemeinen Weg verlaſſen, und nach Beſchaffenheit der Umſtände beſondere Hülfsmittel zur Vereinfachung des Kalkuls aufſuchen ſollte, wie uns dergleichen z. B. die runden Körper darbieten. Ehe wir aber zu dieſen übergehen, muß ich noch etwas über den merkwürdigen Zuſammenhang zwiſchen den Momenten der Trägheit eines Körpers in Anſehung paralleler Axen ſagen, worauf man durch die bisherige Methode folgendermaßen geleitet wird:

Fig. 27. 1) Es ſey das Moment der Trägheit eines gegebenen Körpers, deſſen Maſſe $= M$ iſt, in Beziehung auf irgend eine Axe OA . . . . $= Mh^2$; in Anſehung einer andern ihr parallelen Axe oa $= Mh'^2$; die ſenkrechte Entfernung Oo zwiſchen beyden $= e$.

2) Man lege die Ebene BOA (§. 201. 1.) ſo, daß ſie zugleich durch oa geht, und ſetze, wie dort, als Koordinaten eines beliebigen Punktes m im Körper: $Op = x$, $pq = y$, $qm = z$; ſo war zuvörderſt (ebendaſ. 4.)

$$Mh^2 = \int (y^2 + z^2)\, dM,$$

wo $dM = \varkappa dx dy dz$ angenommen wurde.

3) Man verlängere ferner die Ordinate qp bis ſie die andere Axe oa in π ſchneidet, und nenne als Koordinaten deſſelben Punktes m für dieſe letztere Axe: $o\pi = x'$, $\pi q = y'$, $qm = z'$, ſo erhält man auf gleiche Art:

$$Mh'^2 = \int (y'^2 + z'^2)\, dM,$$

und außerdem $x' = x$, $y' = y + e$, $z' = z$, alſo:

$$dx' = dx,\ dy' = dy,\ dz' = dz,$$

daher das Element dM hier eben die Bedeutung hat, wie vorhin (2.)

4) Durch die Subſtitution der beyden Werthe $y + e$ und z für y' und z' verwandelt ſich nun das letztere Integral in folgendes:

$$Mh'^2 = \int [(y + e)^2 + z^2]\, dM = \int (y^2 + z^2)\, dM + 2e \int y dM + e^2 \int dm:$$

5) Von dieſen dreyen Theilen iſt der erſtere $\int (y^2 + z^2)\, dM = Mh^2$ (2); ferner $\int dM$, durch den ganzen Körper genommen, $= M$, und wenn man aus deſſen Schwerpunkte g die Koordinaten $gf = c$, $fe = b$, und $eo = a$ zieht, ſo hat man zu deren Beſtimmung (Statik §. 74. die Gleichungen:

$$a = \frac{\int x dM}{M},\ b = \frac{\int y dM}{M},\ c = \frac{\int z dM}{M},$$

mithin $\int y dM = bM$

6) Demnach wird endlich

$$Mh'^2 = Mh^2 + 2ebM + e^2M = M \cdot (h^2 + 2be + e^2).$$

§. 208.

1. Man ſetze noch die Entfernung des Schwerpunktes g von der erſteren Axe OA = D, von der letztern oa = d, ſo iſt

$$D^2 = ge^2 = ef^2 + fg^2 = b^2 + c^2,$$

und eben ſo: $d^2 = (b + e)^2 + c^2$, folglich

$$d^2 - D^2 = (b + e)^2 - b^2 = 2be + e^2,$$

wodurch $Mh'^2 = M(h^2 + d^2 - D^2)$ wird.

2. Es iſt daher jedesmal $Mh'^2 > Mh^2$, wofern $d > D$ iſt, d. h. je weiter die Axe des Körpers in paralleler Lage von ſeinem Schwerpunkte wegrückt, deſto größer wird ſein Moment der Trägheit für dieſelbe. Am kleinſten iſt es alſo, wenn die Axe in den Schwerpunkt hineinfällt.

3. Es ſey jetzt OA eine ſolche durch den Schwerpunkt gehende Axe; das Moment der Trägheit für dieſelbe $= Mh^2$, ſo iſt hier $D = o$, mithin

$$Mh'^2 = M(h^2 + d^2)$$

Weiß man demnach das Moment der Trägheit des Körpers für irgend eine durch ſeinen Schwerpunkt gehende Axe, ſo findet man daraus ſein Moment der Trägheit für jede andere ihr parallele Axe, wenn man zu ſelbigem das Produkt Md^2 aus der Maſſe des Körpers in das Quadrat ihrer Entfernung vom Schwerpunkte hinzufügt.

§. 209.

Fig. 24. **Exempel** 1. Es ſey vom rechtwinklichten Parallelepipedum AI die eine Seite AB der Grundfläche $= a$, die andere AC $= b$, die Höhe $= c$, ſeine Maſſe $= M$; alſo ſein Moment der Trägheit in Beziehung auf AB $= \frac{1}{3}M(b^2 + c^2)$ (§. 202.). Man ziehe durch ſeinen Schwerpunkt eine mit AB parallele Linie, die die Seitenfläche BI in G treffen mag, und ſetze ſein Moment der Trägheit für dieſe $= Mh^2$; ferner ſey noch GF auf BH ſenkrecht, ſo iſt BF $= \frac{1}{2}b$, GF $= \frac{1}{2}c$, mithin $BG^2 = d^2 = \frac{1}{4}(b^2 + c^2)$, und daher:

$$\frac{1}{3}M(b^2 + c^2) = M[h^2 + \frac{1}{4}(b^2 + c^2)],$$

$$h^2 = \frac{1}{12}(b^2 + c^2),$$

alſo das Moment der Trägheit des Parallepd. in Anſehung der durch ſeinen Schwerpunkt gehenden, mit AB parallelen, Axe $\frac{1}{12}M(b^2 + c^2) = \frac{1}{3}M . BG^2$.

Und in Bezug auf die Axe EF, die, parallel mit AB, durch die Mitte der Grundfläche geht, $= M(h^2 + \frac{1}{4}c^2) = \frac{1}{3}M(c^2 + \frac{1}{4}b)$.

2. Für den Durchmeſſer der Grundfläche eines ſenkrechten Cylinders, deſſen Höhe $= a$, Halbmeſſer $= b$, war das Moment der Trägheit $M(\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{4}b^2)$ (§. 206.). Man ſetze daſſelbe für einen, durch ſeinen Schwerpunkt gehenden Durchmeſſer $= Mh^2$, ſo hat man

$$M(\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{4}b^2) = M(h^2 + \frac{1}{4}a^2), \text{ mithin}$$

$$Mh^2 = \frac{1}{4}M(b^2 + \frac{1}{3}a).$$

§. 210.

Fig. 6. **Aufgabe.** Das Moment der Trägheit eines runden Körpers, der durch Umdrehung einer ebenen Fi-

gur AMDB um ihre Axe AB entſtanden iſt, in Beziehung auf dieſe Axe zu beſtimmen.

Aufl 1) Es ſey die Abſciſſe AP der Kurve AMD, wodurch die Figur ADB begrenzt wird, $= x$; die dazu gehörige Ordinate PM $= y$; das unendlich kleine Stück Pp der Axe, oder das Differenzial der Abſciſſe $= dx$; ſo iſt der Inhalt von dem Segmente des Körpers, das zwiſchen den beyden durch P und p gehenden, auf AB ſenkrechten, Querſchnitten liegt, $= \pi y^2 dx$, und wenn wir die Dichte des Körpers $= \varkappa$ ſetzen, ſeine Maſſe $= \pi \varkappa y^2 dx$.

2) Alſo die Maſſe des ganzen Körpers $M = \pi \varkappa \int y^2 dx$, worin $x =$ AB geſetzt werden muß.

3) Man theile noch ferner das eben betrachtete Segment (1) in lauter unendlich ſchmale und koncentriſche Ringe, und ſetze den innern Halbmeſſer eines ſolchen Ringes, oder ſeine Entfernung von P, $= r$, ſeine Breite $= dr$; ſo iſt deſſen Maſſe $dM = 2\pi\varkappa r dr dx$, und da alle ſeine Theile einerley Entfernung von der Axe haben, ſein Moment der Trägheit gegen dieſelbe: $r^2 dM = 2\pi\varkappa r^3 dr dx$.

4) Hiervon das Integral nach r genommen, und darin $r = y$ geſetzt, giebt das Moment der Trägheit des gedachten Segmentes $= \frac{1}{2}\pi\varkappa y^4 dx$, und dieſes nochmals noch x integrirt, das des ganzen Körpers $Mh^2 = \frac{1}{2}\pi\varkappa \int y^4 dx$, nachdem in dieſem Integrale $x =$ der Länge der ganzen Axe AB genommen iſt.

5) Subſtituirt man nun für M den vorhin erhal-

tenen Werth $\pi\mu\int y^2 dx$, und dividirt die Gleichung damit, ſo erhält man:

$$h^2 = \frac{\int y^4 dx}{2\int y^2 dx},$$

ſo daß das geſuchte Moment der Trägheit des Körpers in Bezug auf die Axe AB, durch ſeine Maſſe M ausgedrückt, $= \frac{M\int y^4 dx}{2\int y^2 dx}$ wird.

§. 211.

1. Beym geraden Cylinder iſt y der Halbmeſſer eines Querſchnittes, der von der Grundfläche um die Weite $= x$ entfernt liegt, und folglich mit dem Halbmeſſer der Grundfläche einerley. Setzt man alſo dieſen $= b$, ſo wird

$$\int y^4 dx = b^4 x, \text{ und } \int y^2 dx = b^2 x,$$

mithin das Moment der Trägheit des geraden Cylinders in Anſehung ſeiner geometriſchen Axe $= \frac{Mb^4 x}{2b^2 x} = \frac{1}{2} Mb^2$.

2. Beym geraden Kegel ſey die Höhe AB $= a$, der Halbmeſſer der Grundfläche BD $= b$, ſo hat man:

$$x : y = a : b, \text{ oder } y = \frac{bx}{a},$$

$$\text{folglich } \int y^4 dx = \frac{b^4 x^5}{5a^4}, \int y^2 dx = \frac{b^2 x^3}{3a^2},$$

und der Werth des Quotienten $\frac{\int y^4 dx}{\int y^2 dx}$, für $x = a$, $= \frac{3}{5} b^2$, alſo das Moment der Trägheit des Kegels in Beziehung auf ſeine geometriſche Axe $= \frac{3}{10} Mb^2$.

3) Um

3) Um das Moment der Trägheit des abgekürzten Kegels für eben die Axe zu finden, ſetze man die Maſſe deſſelben $= M$; die des fehlenden Stückes, das ihn zum vollſtändigen Kegel ergänzen würde, $= F$; die des ganzen Kegels $= G$; außerdem ſey der Halbmeſſer der obern Grundfläche $= c$, der untern $= b$; ſo iſt

das Moment der Trägheit des obern

Kegels . . . . $= \frac{3}{10} Fc^2$

des ganzen $= \frac{3}{10} Gb^2$,

folglich das des abgekürzten Kegels $= \frac{3}{10}(Gb^2 - Fc^2)$

Ferner iſt $M = G - F$, und $F = \frac{c^3}{b^3} . G$, alſo $M = (1 - \frac{c^3}{b^3}) G$; und daher $G = \frac{b^3 M}{b^3 - c^3}$. Dieſe Werthe für F und G nach einander in der vorhergehenden Formel ſubſtituirt, geben das geſuchte Moment der Trägheit des abgekürzten Kegels, durch ſeine Maſſe ausgedrückt, $= \frac{3}{10} M \left(\frac{b^5 - c^5}{b^3 - c^3}\right)$.

§. 212.

1. Für die Kugel, oder ein Segment derſelben, iſt AMD ein Bogen ihres größten Kreiſes; folglich, wenn man ihren Halbmeſſer $= a$ nennt, $y^2 = 2ax - x^2$. Dadurch wird $\int y^4 dx = \frac{4}{3}a^2x^3 - ax^4 + \frac{1}{5}x^5$, $\int y^2 dx = ax^2 - \frac{1}{3}x^3$; mithin das Moment der Trägheit eines Kugelſegments von der Höhe $= x$, durch ſeine Maſſe beſtimmt, $= \frac{M \int y^4 dx}{2\int y^2 dx} = M . \frac{20a^2x - 15ax^2 + 3x^3}{30a - 10x}$.

2. Setzt man hierin $x = 2a$, ſo erhält man das Moment der Trägheit der ganzen Kugel in Bezug auf ihren Durchmeſſer $= \frac{2}{5} Ma^2$.

3. Von einem elliptiſchen Sphäroid ſey die halbe Polaraxe $= a$, der Halbmeſſer des Aequators $= b$, die Maſſe, wie vorhin, $= M$. Man beſchreibe über der gedachten Axe einen Halbkreis mit dem Halbmeſſer $= a$, und ſetze für die Abſciſſe $AP = x$, deſſen Ordinate $= Y$, ſo hat man bekanntlich:

$$Y : y = a : b, \text{ oder } y = \frac{bY}{a}, \text{ alſo:}$$

$$\int y^4 dx = \frac{b^4}{a^4} \int Y dx, \quad \int y^2 dx = \frac{b}{a^2} \int Y^2 dx, \text{ und } \frac{\int y^4 dx}{2 \int y^2 dx}$$

$$= \frac{b^2}{a^2} \frac{\int Y^4 dx}{2 \int Y^2 dx}.$$

Da nun (1) $\frac{\int y^4 dx}{2 \int Y^2 dx} = \frac{2}{5} a^2$, ſo wird $\frac{\int y^4 dx}{2 \int y^2 dx}$ $= \frac{2}{5} b^2$, und folglich das Moment der Trägheit des Sphäroids in Bezug auf ſeine Polaraxe $= {}_5 Mb^2$.

§. 213.

Aufgabe. Das Moment der Trägheit des runden Körpers für eine durch ſeinen Scheitel A auf die Axe AB ſenkrecht gezogene Linie zu finden.

Aufl. 1) Wenn man in der Formel (§. 209. 2.) ſtatt M, b, a, hier $\pi \lambda y^2 dx$, y und dx ſetzt, ſo erhält man das Moment der Trägheit des cylindriſchen Segmentes (§. 210. 1.) für den, durch ſeinen Schwerpunkt gehenden, mit gedachtem Perpendikel parallelen

Durchmeſſer $= \frac{1}{4}\pi\varkappa y^4 dx$; alſo wird daſſelbe in Bezug auf das Perpendikel ſelbſt, wovon ſein Schwerpunkt um x entfernt liegt $= \pi\varkappa y^2 dx\ (\frac{1}{4}y^2 + x^2)$; mithin das Moment der Trägheit des ganzen Körpers für dieſe Axe $= \pi\varkappa\ (\frac{1}{4}\int y^4 dx + \int y^2 x^2 dx)$, oder durch ſeine Maſſe $M = \pi\varkappa\int y^2 dx$ ausgedrückt, $= \frac{1}{4}M \frac{\int y^4 dx}{\int y^2 dx} + M \cdot \frac{\int y^2 x^2 dx}{\int y^2 dx}$, worin nach geſchehener Integration $x = AB$ geſetzt werden muß.

2) Der erſte Theil hiervon iſt die Hälfte von dem Moment der Trägheit des Körpers in Anſehung ſeiner geometriſchen Axe; nennen wir alſo dies $= Mh^2$, ſo wird endlich ſein Moment der Trägheit für die durch A gehende, auf AB ſenkrechte, Axe $= \frac{1}{2}Mh^2 + M \cdot \frac{\int y^2 x^2 dx}{\int y^2 dx}$.

§. 214.

1. Für den geraden Cylinder, deſſen Höhe $= a$, Halbmeſſer der Grundfläche $= b$, iſt $y = b$; daher $\int y^2 x^2 dx = \frac{1}{3}b^2 x^3$, $\int y^2 dx = b^2 x$, und der Werth des Quotienten $\frac{\int y^2 x^2 dx}{\int y^2 dx}$, für $x = a$, $= \frac{1}{3}a^2$. Ferner iſt $h^2 = \frac{1}{2}b^2$, mithin das Moment der Trägheit des Cylinders für den Durchmeſſer ſeiner Grundfläche $= M\ (\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{3}a^2)$, wie im §. 206. ſchon gefunden iſt.

2. Beym geraden Kegel, deſſen Höhe ebenfalls $= a$, Halbmeſſer der Grundfläche $= b$, war $y = \frac{bx}{a}$;

alſo wird $\int y^2x^2dx = \frac{b^2x^5}{5a^2}$, $\int y^2dx = \frac{b^2x^3}{3a^2}$; mithin der Werth von $\frac{\int y^2x^2dx}{\int y^2d4}$, für $x = a$, $= \frac{3}{5}a^2$, und da hier $h^2 = \frac{3}{10}b^2$ iſt, das Moment der Trägheit des Kegels für eine, durch deſſen Spitze auf ſeine centrale Axe ſenkrecht gezogene, Linie $= \frac{3}{5}M(a^2 + \frac{1}{4}b^2)$.

3. Da der Schwerpunkt des Kegels von der Spitze um $\frac{3}{4}a$ entfernt liegt, ſo erhält man ferner ſein Moment der Trägheit für eine durch den Schwerpunkt gehende, auf AB ſenkrechte, Axe $= \frac{3}{5}M(a^2 + \frac{1}{4}b^2) - \frac{9}{16}Ma^2$ $= \frac{3}{20}M(b^2 + \frac{1}{4}a^2)$.

4. Beym elliptiſchen Sphäroid (§. 212. 3.) iſt $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ alſo $\int y^2x^2dx = \frac{b^2}{a^2}(\frac{1}{2}ax^4 - \frac{1}{5}x^5)$, $\int y^2dx = \frac{b^2}{a^2}(ax^2 - \frac{1}{3}x^3)$, folglich $\frac{\int y^2x^2dx}{\int y^2dx}$ $= \frac{(15a - bx)x^2}{30a - 10x}$, und deſſen Werth, für $x = 2a$, $= \frac{6}{5}a^2$; alſo das Moment der Trägheit des Sphäroids für die durch ſeinen Pol gehende Tangente $= \frac{1}{5}Mb^2 + \frac{6}{5}Ma^2$; und für den Durchmeſſer ſeines Aequators $= \frac{1}{5}M(a^2 + b^2)$.

Von der Schwingung der Körper um feſte Axen.

§. 215.

Man nennt im Allgemeinen jede Bewegung wiederkehrend, die innerhalb gewiſſer Grenzen nur eine

Zeitlang auf einerley Art fortdauert, und alsdann plötzlich in die entgegengeſetzte übergeht, ſo daß ein Körper, der einer ſolchen Bewegung unterworfen iſt, nach Verlauf einer beſtimmten Zeit allemal wieder an ſeinen vorigen Ort, und in ſeine anfängliche Lage zurückkommt. Bey feſten Körpern giebt es nur drey Arten derſelben: die **fortrückende**, wobey der Körper einerley Weg wechſelsweiſe vor und rückwärts macht; die **drehende**, wobey er um eine feſte Axe einerley Winkel hin und her beſchreibt; und endlich die **zuſammengeſetzte**, die aus fortrückender und drehender Bewegung zugleich beſteht.

Letztere beyden Arten führen auch gemeinſchaftlich den Namen **Schwingungen**, weil ſie ſich größtentheils nach einerley Geſetze richten, wiewohl ſie ſonſt, ihrem Weſen nach, ganz verſchieden von einander ſind; wie z. B. die rollende Schwingung eines Cylinders, der ſich innerhalb einer hohlen Kurve hin und her wälzt, und das Schwanken deſſelben um eine feſte Axe. Noch mehr unterſcheiden ſich von dieſen die Schwingungen der biegſamen und elaſtiſchen Körper, bey denen zugleich eine Aenderung ihrer Form ſtatt findet: da aber die Bewegung dieſer Körper überhaupt auf ganz eigenthümlichen Gründen beruhet, ſo werde ich alles dahin gehörige ganz zuletzt in ein beſonderes Kapitel zuſammenfaſſen.

Gegenwärtige Betrachtung betrifft nur allein die drehende Schwingung eines feſten Körpers, und zwar in ſofern ſie durch ſein eigenes Gewicht hervorgebracht

wird. Sie findet unſtreitig hier ihren ſchicklichſten Platz, da ſie ſich unmittelbar auf die vorhergehende Theorie gründet, und als eine nützliche Anwendung derſelben zugleich zu ihrer nähern Erläuterung dienen kann.

§. 216.

Ein Körper, der an einer unbeweglichen horizontalen Axe frey aufgehängt wird, und Anfangs in Ruhe iſt, kann darin nur beharren, wenn ſein Schwerpunkt in die, durch die Axe gehende, vertikale Ebene fällt. In jeder andern Lage muß er nothwendig, da ſein Schwerpunkt alsdann nicht unterſtützt iſt, vermöge ſeines Gewichtes herabſinken, und dadurch um die feſte Axe in eine drehende Bewegung geſetzt werden. Um nun dieſe zu beſtimmen, ſey

Fig. 28. 1) G der anfängliche Ort des Schwerpunktes; C der Punkt der Axe, worin ſie von einer, durch G gehenden, auf ſie ſenkrechten Ebene geſchnitten wird; die Entfernung CG $= f$, und die Abweichung dieſer Linie von der Vertikale CI $= \eta$.

2) Nachdem die Bewegung eine Zeit t gedauert hat, ſey der Schwerpunkt durch den Bogen GM fortgerückt; ſein jetziger Abſtand MCI von der Vertikale $= \varphi$, und die Winkelgeſchwindigkeit des Körpers in dieſem Augenblicke $= \gamma$; ſo iſt der Winkel GCM, um den ſich der Körper gedrehet hat, $= \eta - \varphi$, alſo (§. 198.)

$$\gamma = \frac{d(\eta - \varphi)}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}, \text{ und } \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

3) Man nenne ferner das Gewicht des Körpers,

das von ſeinem Schwerpunkte aus nach der Vertikale Mv wirkt, = M, und um den Theil davon zu erhalten, der zur Umdrehung des Körpers allein wirkſam iſt, zerlege man es in eine Kraft nach Mr, der Verlängerung von CM, und in eine, darauf ſenkrechte, nach Mu. Erſtere, = M Cos φ, übt nach der Richtung CM einen Druck auf den Punkt C der Axe aus, und wird dadurch aufgehoben; letztere hingegen, = M Sin φ wird ganz auf die Umdrehung des Körpers verwandt, und hat gegen die Axe das Moment = Mf Sin φ.

4) Es bleibt jetzt noch übrig, das Moment der Trägheit des Körpers für die Umdrehungsaxe zu wiſſen. Zu dem Ende ſey daſſelbe in Anſehung der durch ſeinen Schwerpunkt gehenden, mit jener parallelen, Axe = Mh^2, das ſich aus der gegebenen Geſtalt des Körpes auf irgend eine Art wird beſtimmen laſſen; ſo iſt das geſuchte = $M(f^2+h^2)$ (§. 208. 3.).

5) Demnach erhält man (§. 200.)

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2gMf \operatorname{Sin}\varphi}{M(f^2+h^2)} = \frac{2gf \operatorname{Sin}\varphi}{f^2+h^2},$$

woraus die Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{2gf \operatorname{Sin}\varphi}{f^2+h^2} \text{ entſpringt.}$$

6) Dieſe mit $2d\varphi$ multiplicirt, und dann integrirt, giebt:

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \gamma^2 = C + \frac{4gf \operatorname{Cos}\varphi}{f^2+h^2},$$

und da zu Anfange der Bewegung, oder für $\gamma = 0$, $\varphi = \eta$ war, ſo wird zur Beſtimmung der Konſtante

$$o = C + \frac{4gf \operatorname{Cos} \eta}{f^2 + h^2},$$

alſo $C = -\frac{4gf \operatorname{Cos} \eta}{f^2 + h^2}$; und folglich:

$$\gamma^2 = \frac{4gf}{f^2 + h^2} \cdot (\operatorname{Cos} \varphi - \operatorname{Cos} \eta).$$

§. 217.

1. So lange alſo der Winkel φ poſitiv bleibt, oder M noch dieſſeits der Vertikale CI ſich befindet, wächſt die Winkelgeſchwindigkeit des Körpers, wie ſein Schwerpunkt der Vertikale nach und nach näher rückt.

2. Wenn er in ſie hinein zu liegen kommt, iſt $\varphi = o$, folglich

$$\gamma = \sqrt{\left[\frac{4gf}{f^2 + h^2}(1 - \operatorname{Cos} \eta)\right]}.$$

Dies iſt offenbar der größte Werth, den γ erreichen kann, weil für jeden andern Winkel φ, er ſey poſitiv oder negativ, allemal $\operatorname{Cos} \varphi < 1$ iſt. Der Körper dreht ſich alſo in der Lage, worin er von der Axe gänzlich unterſtützt wird, gerade am ſchnellſten.

3. Von dieſem Augenblicke an tritt nun der Schwerpunkt auf die andere Seite der Vertikale, und entfernt ſich von ihr, indem er durch den andern Bogen Ig aufwärts ſteigt. Daher wird jetzt der Winkel φ negativ, und nimmt an abſoluter Größe wieder zu.

4. Da $\operatorname{Cos} - \varphi = \operatorname{Cos} \varphi$ iſt, ſo hat der Körper bey einerley Abweichung ſeines Schwerpunktes von der Vertikale einerley Winkelgeſchwindigkeit. Sie nimmt

folglich ab, indem Φ wächſt, und wird zum zweytenmale $= 0$, wenn $\Phi = -\eta$ wird, oder der Schwerpunkt in g eben den Winkelabſtand gCI von der Vertikale erreicht hat, den er Anfangs auf der andern Seite in G hatte.

5. Weiter kann alſo derſelbe von CI ſich nicht entfernen; wie auch ſchon aus der Formel (§. 216. 6.) erhellet, die für ϑ einen unmöglichen Werth giebt, wenn man darin $\Phi > \eta$ annimmt.

6. Da alles ſich jetzt verhält, wie zu Anfange der Bewegung auf der andern Seite von CI, ſo folgt nothwendig, daß ſich der Körper nun rückwärts drehen, und in jeder Lage aufs neue dieſelbe Geſchwindigkeit bekommen müſſe, die er darin zuvor nach entgegengeſetzter Richtung hatte.

7. Demnach ſchwingt derſelbe innerhalb dem Winkelraume GCg unaufhörlich fort, oder beſchreibt dieſen Winkel um ſeine Axe in gleichen Zeitabtheilungen wechſelsweiſe bald nach der einen, bald nach der andern Seite.

§. 218.

Aufgabe. Die Zeit T zu beſtimmen, in welcher der Körper den Winkel GCI an der Axe zurücklegt, oder deſſen Schwerpunkt aus ſeinem anfänglichen Orte G bis zu ſeinem tiefſten Orte I herabſinkt.

Aufl. 1) Wenn man für ϑ^2 ſeinen Werth $\frac{d\Phi^2}{dt^2}$ wieder ſubſtituirt, und der Kürze wegen $\frac{2gf}{f^2+h^2} = \frac{1}{\varkappa^2}$ ſetzt, ſo giebt die Formel (§. 216. 6.):

$$\varkappa^2 . \frac{d\phi^2}{dt^2} = 2 \operatorname{Cos} \phi - 2 \operatorname{Cos} \eta,$$

woraus man: $dt = \frac{-\varkappa d\phi}{\sqrt{(2 \operatorname{Cos} \phi - 2 \operatorname{Cos} \eta)}}$ erhält. Es muß hier nemlich von den beyden Wurzeln deshalb die negative genommen werden, weil der Winkel ϕ abnimmt, indem t wächſt; alſo $d\phi$ und dt einander entgegen geſetzt ſind.

2) Nun iſt $\operatorname{Cos} \phi - \operatorname{Cos} \eta = 1 - \operatorname{Cos} \eta - (1 - \operatorname{Cos} \phi) = 2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\eta^2 - 2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\phi^2$; folglich $\sqrt{(2 \operatorname{Cos} \phi - 2 \operatorname{Cos} \eta)} = 2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\eta \sqrt{\left(1 - \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}\phi^2}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}\eta^2}\right)}$. Setzt man daher $\frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}\phi}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}\eta} = \operatorname{Sin} \psi$, und noch zur Abkürzung $\operatorname{Sin} \frac{1}{2}\eta = i$, ſo wird

$$\sqrt{(2 \operatorname{Cos} \phi - 2 \operatorname{Cos} \eta)} = 2i\sqrt{(1 - \operatorname{Sin} \psi^2)} = 2i \operatorname{Cos} \psi.$$

3) Ferner bekommt man aus der Gleichung $\operatorname{Sin} \frac{1}{2}\phi = i \operatorname{Sin} \psi$ durchs Differenziiren $\frac{1}{2} \operatorname{Cos} \frac{1}{2}\phi d\phi = i \operatorname{Cos} \psi d\psi$, alſo:

$$d\phi = \frac{2i \operatorname{Cos} \psi d\psi}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}\phi} = \frac{2i \operatorname{Cos} \psi d\psi}{\sqrt{(1 - i^2 \operatorname{Sin} \psi^2)}}.$$

4) Dieſe Werthe in den Zähler und Nenner von dt ſubſtituirt, geben: $dt = \frac{-\varkappa d\psi}{\sqrt{(1 - i^2 \operatorname{Sin} \psi^2)}}$, oder, wenn man die Wurzelgröße in eine Reihe auflößt:

$$dt = -\varkappa d\psi \left(1 + \tfrac{1}{2} i^2 \operatorname{Sin} \psi^2 + \tfrac{3}{8} i^4 \operatorname{Sin} \psi^4 + \tfrac{5}{16} i^6 \operatorname{Sin} \psi^6 + ..\right) \text{ mithin:}$$

$$t = C - \varkappa \left[\psi + \tfrac{1}{2} i^2 \int \operatorname{Sin} \psi^2 d\psi + \tfrac{3}{8} i^4 \int \operatorname{Sin} \psi^4 d\psi + \ldots\right].$$

5) Für $t = o$ iſt $\varphi = \eta$, alſo $\text{Sin}\,\psi = 1$, oder $\psi = \frac{1}{2}\pi$, oder für $t = T$, $\varphi = o$, folglich auch $\psi = o$. Man braucht alſo hier nur von den in der Reihe vorkommenden Integralen die beſonderen Werthe für $\psi = o$ und $\psi = \frac{1}{2}\pi$ zu wiſſen, zu denen man folgendermaßen gelangt:

6) Es iſt $d\,.\,\text{Sin}\,\psi^m\,\text{Cos}\,\psi = m\,\text{Sin}\,\psi^{m-1}\,\text{Cos}\,\psi^2 d\psi - \text{Sin}\,\psi^{m+1}\,d\psi$, und dies $= m\,\text{Sin}\,\psi^{m-1}\,d\psi - (m+1)\,\text{Sin}\,\psi^{m+1}\,d\psi$, indem man für $\text{Cos}\,\psi^2$ ſeinen Werth $1 - \text{Sin}\,\psi^2$ ſetzt. Wird nun auf beyden Seiten wiederum integrirt, ſo erhält man:

$$\text{Sin}\,\psi^m\,\text{Cos}\,\psi = m\int \text{Sin}\,\psi^{m-1} d\psi - (m+1) \int \text{Sin}\,\psi^{m+1}\,d\psi,$$

alſo: $$\int \text{Sin}\,\psi^{m+1} d\psi = \frac{m}{m+1}\,.\int \text{Sin}\,\psi^{m-1}\,d\psi - \frac{\text{Sin}\,\psi^m\,\text{Cos}\,\psi}{m+1},$$ oder $m - 1 = 2n$ geſetzt:

$$\int \text{Sin}\,\psi^{2n+2}\,d\psi = \frac{2n+1}{2n+2} \int \text{Sin}\,\psi^{2n}\,d\psi - \frac{\text{Sin}\,\psi^{2n+1}\,\text{Cos}\,\psi}{2n+2}$$

Daher hat man ſowohl für $\psi = o$, als auch für $\psi = \frac{1}{2}\pi$

$$\int \text{Sin}\,\psi^{2n+2}\,d\psi = \frac{2n+1}{2n+2} \int \text{Sin}\,\psi^{2n}\,d\psi.$$

7) In dem einfachſten Falle $n = o$ iſt nun $\text{Sin}\,\psi^o d\psi = \int d\psi = \psi$, alſo wird dies Integral $= o$, wenn man darin $\psi = o$ ſetzt; mithin verſchwinden für $\psi = o$ auch alle die übrigen Integrale $\int \text{Sin}\,\psi^2 d\psi$, $\int \text{Sin}\,\psi^4 d\psi$ u. ſ. w.

8) Dagegen iſt für $\psi = \frac{1}{2}\pi$

$$\int \mathrm{Sin}\,\psi^0 d\psi = \tfrac{1}{2}\pi,$$

folglich $\int \mathrm{Sin}\,\psi^2 d\psi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\pi,$

$$\int \mathrm{Sin}\,\psi^4 d\psi = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{2}\pi,$$

und überhaupt $\int \mathrm{Sin}\,\psi^{2n} d\psi = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot\cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{2}\pi,$

9) Für $\psi = 0$ erhält man demnach (4.) $T = C$, und für $\psi = \frac{1}{2}\pi$:

$$0 = C - \tfrac{1}{2}\pi\varkappa\,(1 + \tfrac{1}{4}i^2 + \tfrac{9}{16}i^4 + \tfrac{225}{256}i^6 \ldots + (\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot\cdot \frac{2n-1}{2n})^2 i^{2n} + .)$$

Daher endlich:

$$T = \tfrac{1}{2}\pi\varkappa\,(1 + \tfrac{1}{4}\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\eta^2 + \tfrac{9}{16}\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\eta^4 + \tfrac{225}{256}\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\eta^6 + \ldots),$$

worin $\varkappa = \sqrt{(\frac{f^2 + h^2}{2gf})}$ iſt.

§. 219.

Da der Schwerpunkt des Körpers in gleichen Abweichungen von der Vertikale einerley Geſchwindigkeit hat, alſo einerley Zeit gebraucht, um gleiche Elemente ſeines Weges, die auf beyden Seiten der Vertikale gleich weit von ihr entfernt ſind, zurückzulegen, ſo erhellet, daß auch die ganze Zeit, worin er durch den folgenden Bogen Ig aufwärts ſteigt, mit der gefundenen Zeit T ſeines Niederganges durch GI einerley ſeyn müſſe. Demnach iſt die Zeit, worin er den ganzen Bogen GIg beſchreibt, $= 2T$ (wie auch die allgemeine Formel (4) giebt, wenn man darin $\varphi = -\eta$, oder $\psi = -\frac{1}{2}\pi$ ſetzt), und endlich die Dauer einer ganzen Schwingung,

oder die Zeit eines Hinganges durch Gg und Herganges durch gG zuſammengenommen, $= 4T$.

§. 220.

Bey unendlicher Abnahme des Schwingungsbogens nähert ſich die Zeit T unendlich der Grenze $= \frac{1}{2}\pi\kappa = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\left(\frac{f^2 + h^2}{2gf}\right)}$. Für einen Schwingungsbogen von gegebener Größe iſt daher T jederzeit um etwas größer, als $\frac{1}{2}\pi\kappa$; woſern aber derſelbe nur einigermaßen gering iſt, beträgt der Ueberſchuß doch ſo wenig, daß man ihn ohne Nachtheil der Genauigkeit in den meiſten Fällen wird außer Acht laſſen können. Wir wollen z. B. ſetzen, der Körper ſchwinge in einem Bogen $2\eta = 12°$, und für unendlich kleine Schwingungen deſſelben ſey die Zeit $\pi\kappa$ ſeines Hinganges durch Gg $= 1$ Sec., ſo wird

$$\frac{1}{4} \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}\eta^2 = 0{,}00068476$$
$$\frac{9}{16} \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}\eta^4 = \ldots\ldots 422$$
$$2T = 1{,}00068898'',$$

ſo daß erſt zwiſchen den Zeiten von 726 unendlich kleinen Schwingungen des Körpers, und ſolchen, die in einem Bogen von 12° geſchehen, ein Unterſchied von einer ganzen Sekunde entſteht.

§. 221.

Dieſe genaue Uebereinſtimmung in der Zeit der Schwingungen für kleine Bogen derſelben leitet auf eine ſehr leichte und einfache Methode, das Moment der

Trägheit eines Körpers für irgend eine durch ſeinen
Fig. 29. Schwerpunkt G gehenden Axe AB durch Verſuche zu beſtimmen. Man hänge nemlich den Körper an einer horizontalen Axe EF ſolchergeſtalt auf, daß die Linie AB ihr parallel zu liegen kommt, und meſſe die ſenkrechte Entfernung GC ſeines Schwerpunktes von dieſer Axe; welche $= f$ heißen mag. Hierauf bringe man den Körper unmerklich aus ſeinem Gleichgewichte, ſo daß er um die Axe EF ſehr kleine Schwingungen macht, und beſtimme ihre Dauer mit möglichſter Genauigkeit, wozu man ein Mittel aus einer beträchtlichen Anzahl derſelben nehmen muß. Es ſey nun die beobachtete Zeit einer halben Schwingung $= t$, ſo hat man

$$t^2 = \pi^2 \varkappa^2 = \frac{\pi^2 (f^2 + h^2)}{2gf}, \text{ alſo } h^2 = \frac{2gft^2}{\pi^2} - f^2,$$

und das geſuchte Moment der Trägheit des Körpers für die Axe AB:

$$Mh^2 = M\left(\frac{2gt^2f}{\pi^2} - f^2\right).$$

Vom einfachen und zuſammengeſetzten Pendel.

§. 222.

Da die Dauer der kleinern Schwingungen eines Körpers von der Größe des Schwingungsbogens unabhängig iſt, und daher als unveränderlich angenommen werden kann, ſo hat ſie alle Erforderniſſe eines genauen und richtigen Zeitmaßes. Man nennt jeden Körper, der zu dieſer Abſicht an einer horizontalen Axe frey auf-

gehängt wird, ein **Pendel**, und die halbe Schwingung deſſelben, oder ſeine Umdrehung innerhalb des Winkel- Fig. 28. raumes GCg einen **Pendelſchlag**. Beym Sekundenpendel, deſſen man ſich im gemeinen Leben und zum aſtronomiſchen Gebrauche am häufigſten bedient, dauert der Schlag genau eine Sekunde mittlerer Zeit.

§. 223.

Man nehme für das Pendel die Größen f und h^2 in der vorigen Bedeutung, und ſetze die Dauer ſeines Schlags $= t$, ſo hat man für kleine Ausweichungen deſſelben:

$$t^2 = \frac{\pi^2 (f^2 + h^2)}{2gf} = \frac{\pi^2}{2g}\left(f + \frac{h^2}{f}\right).$$

Das Pendel mag daher eine ſo geringe körperliche Ausdehnung haben, oder ſein Moment der Trägheit Mh^2 ſo klein ſeyn, als man will, ſo kann man doch immer bewirken, daß es ſeine Schläge in einer gegebenen Zeit verrichten muß, wofern man nur ſeinen Schwerpunkt in die dazu nöthige Entfernung von der Axe bringt.

§. 224.

Die bequemſte und vortheilhafteſte Geſtalt eines Pendels iſt ohne Zweifel diejenige, wobey es, ſeiner Maſſe unbeſchadet, den möglichſt kleinſten Raum einnimmt, und der Luft, wegen ihres Widerſtandes, die wenigſte Fläche darbietet. Aus dieſem Grunde nimmt man dazu gewöhnlich kleine Körperchen, die verhältnißmäßig bey geringer Ausdehnung viel Maſſe enthalten,

als z. B. Kugeln von beträchtlichem ſpecifiſchen Gewichte, und verbindet ſolche mit der Umdrehungsaxe durch eine ſehr dünne, auf ſie ſenkrecht befeſtigte, Stange. Wäre es möglich, irgend ein Gewicht in einem einzigen Fig. 29. Punkte O zuſammen zu bringen, und dieſen Punkt an einem Faden CO aufzuhängen, der gar keine Dicke hätte, und in C angeheftet wäre, ſo entſtände daraus ein ganz unkörperliches oder einfaches Pendel, und man könnte dem Faden jederzeit eine ſolche Länge geben, daß der gedachte Punkt ſeine Schwingungen in einer beſtimmten Zeit vollendete.

§. 225.

Aufgabe. Das einfache Pendel ſoll mit einem körperlichen oder zuſammengeſetzten Pendel, wofür f und h gegeben ſind, gleichzeitige Schläge thun; man ſucht ſeine Länge OC = l.

Aufl. Es ſey die gemeinſchaftliche Dauer ihres Schlags = t, ſo iſt für das zuſammengeſetzte Pendel $t^2 = \frac{\pi^2}{2g}\left(f + \frac{h^2}{f}\right)$, und für das einfache, weil da $h^2 = 0$, $f = l$ iſt, $t^2 = \frac{\pi^2 l}{2g}$; mithin $l = f + \frac{h^2}{f}$.

§. 226.

Es giebt alſo in jedem Körper, der an einer horizontalen Axe frey aufgehängt iſt, einen Punkt O, deſſen Schwingungen um dieſe Axe mit denen des Körpers einerley Dauer haben würden, wenn er die ganze Maſſe deſſelben in ſich vereinigte. Man erhält ihn nemlich,

wenn

wenn man aus dem Schwerpunkte G auf die Axe das Perpendikel GC zieht, und darauf CO = der Länge des einfachen Pendels nimmt, das mit dem Körper gleichzeitige Schwingungen macht. Dieſer Punkt heißt der **Schwingungspunkt** oder **Mittelpunkt der Schwingung** des Körpers.

§. 227.

1. Der Schwingungspunkt des Körpers liegt jederzeit in der Linie CG über den Schwerpunkt hinaus, und zwar in einer Entfernung von demſelben $GO = l - f = \frac{h^2}{f}$. Daher läßt ſich ſein Ort leicht beſtimmen, wofern man das Moment der Trägheit des Körpers für die, durch ſeinen Schwerpunkt gehende, mit der Umdrehungsaxe parallele Linie anzugeben weiß.

2. Hat man auf ſolche Art von einem zuſammengeſetzten Pendel den Mittelpunkt der Schwingung, oder die Entfernung $OC = l$ bereits gefunden, ſo erhält man daraus unmittelbar die Zeit ſeines Schlages $t = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$ (§. 223.); wodurch alſo die Beſtimmung des Pendelſchlags auf die des Schwingungspunktes zurückgeführt wird.

§. 228.

Aufgabe. Es ſey das Pendel aus mehreren einfachen Stücken zuſammengeſetzt, deren Schwerpunkte gemeinſchaftlich in einer, auf die Umdrehungsaxe ſenkrechten, geraden Linie liegen; man ſucht ſeinen Schwingungspunkt.

Aufl. Man ſetze die Maſ-
ſen dieſer einzelnen Stücke $= m,\ m',\ m''$ u. ſ. w.
die Entfernungen ihrer
Schwerpunkte von der Axe $= x,\ x',\ x''$ u. ſ. w.
ihre Momente der Trägheit
für die, durch ihre Schwer-
punkte gehenden, mit der
Axe parallelen, Linien $= mu^2, m'u'^2, m''u''^2$ u. ſ. w.,
ſo iſt

1) die Entfernung ihres gemeinſchaftlichen Schwerpunktes von der Axe

$$f = \frac{mx + m'x' + m''x'' + \ldots}{m + m' + m'' + \ldots},$$

oder, wenn wir die ganze Maſſe des Pendels M nennen,

$$Mf = mx + m'x' + m''x'' + \ldots.$$

2) Ferner ſind die einzelnen Momente der Trägheit dieſer Maſſen in Bezug auf die Schwingungsaxe $= m\,(x^2 + u^2),\ m'\,(x'^2 + u'^2),\ m''\,(x''^2 + u''^2)$ u. ſ. w. Daher iſt das Moment der Trägheit des ganzen Pendels für dieſe Axe:

$$M\,(f^2 + h^2) = m\,(x^2 + u^2) + m'\,(x'^2 + u'^2) + m'\,(x''^2 + u''^2)$$

und folglich der Abſtand eines Schwingungspunktes von derſelben

$$l = \frac{M\,(f^2 + h^2)}{Mf} = \frac{m(x^2 + u^2) + m'(x'^2 + u'^2) + m''(x''^2 + u''^2) + \ldots}{mx + m'x' + m''x'' + \ldots}$$

§. 229.

Exempel I. Das Pendel beſtehe aus einer cylindriſchen Ruthe, und in einer, an ihrem Endpunkte befeſtigten, Kugel. Das Gewicht der Ruthe ſey $= m$,

ihre Länge $= a$, ihre halbe Dicke $= i$; das Gewicht der Kugel $= M$, ihr Halbmeſſer $= e$; ſo hat man für erſtere $x = \frac{1}{2}a$, $u^2 = \frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{4}i^2$ (§. 209. 2.), $x^2 + u^2 = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{4}i^2$, und für letztere $m' = M$, $x' = a + e$, $u'^2 = \frac{2}{5}e^2$ (§. 212. 2.), alſo:

$$l = \frac{M[(a+e)^2 + \frac{2}{5}e^2) + \frac{1}{3}m(a^2 + \frac{3}{4}i^2)}{M(a+e) + \frac{1}{2}ma}.$$

§. 230.

Exempel II. Die Pendelſtange ſey ein rechtwinklichtes Parallelepipedum; ihre Maſſe $= m$, Länge $= a$, Breite $= i$; das darangebrachte Gewicht M eine Linſe, die aus zweyen gleichen und ähnlichen Kugelſegmenten beſteht; die Dicke derſelben $= 2e$, ihre Breite oder Durchmeſſer $= 2b$, ſo erhält man

1) für den Halbmeſſer der zu den Seiten der Linſe gehörigen Kugel, welcher c heißen mag: $(c - e)^2 + b^2 = c^2$, alſo $c = \frac{b^2 + e^2}{2e}$.

2) Der Schwerpunkt der Linſe fällt in die gemeinſchaftliche Grundfläche ihrer beyden Hälften, und zugleich in die centrale Axe derſelben, folglich in den Mittelpunkt der gedachten Fläche; daher wird $x' = a + b$.

3) Das Moment der Trägheit der Linſe für ihre geometriſche Axe, die auf der Schwingungsfläche ſenkrecht, alſo mit der Umdrehungsaxe parallel iſt, wird durch eben die Formel (§. 212. 1.) ausgedrückt, die ſich auf das einfache Kugelſegment bezieht; denn es iſt

doppelt ſo groß, als das Moment der Trägheit des letztern, aber dagegen auch die Maſſe der Linſe doppelt ſo groß, als die des einfachen Segmentes. Setzt man daher in jener Formel $a = \frac{b^2 + e^2}{2e}$, $x = e$, ſo bekommt man

$$u'^2 = \frac{10b^4 + 5b^2e^2 + e^4}{30b^2 + 10e^2}.$$

4) Für die Pendelſtange iſt endlich $x = \frac{1}{2}a$, $u^2 = \frac{1}{12}(a^2 + i^2)$ (§. 209. 1.) $u^2 + x^2 = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{12}i^2$; mithin wird

$$l = \frac{M\left[(a+b)^2 + \frac{10b^4 + 5b^2e^2 + e^4}{30b^2 + 10e^2}\right] + \frac{1}{3}m(a^2 + \frac{1}{4}i^2)}{M(a+b) + \frac{1}{2}ma}.$$

Anmerk. Beſtehen die beyden Stücke des Pendels nicht aus einerley Materie, ſo kommt noch in Betracht, daß ein Theil der Pendelſtange in der Linſe enthalten iſt. Dieſen Fall betrachtet Herr Bohnenberger in ſeiner Anleitung zur geographiſchen Ortsbeſtimmung §. 100.

§. 231.

Exempel III. An einer cylindriſchen Ruthe, deren Maſſe = m, Länge = a, und halbe Dicke = i iſt, ſey ein doppeltes Kegelſegment ſenkrecht befeſtigt, ſo daß deſſen centrale Axe in die Verlängerung der Ruthe hineinfällt. Sein Gewicht ſey = M, der Halbmeſſer ſeines mittlern Querſchnittes = b, der Halbmeſſer der obern oder untern Grundfläche = c, und ſeine Höhe = 2e; man ſucht den Schwingungspunkt dieſes Pendels.

1) Da der Schwerpunkt des doppelten Kegelſegments in den Mittelpunkt ſeines mittlern Querſchnittes

fällt, ſo hat man für deſſen Entfernung von der Schwingungsaxe $x' = a + e$.

2) Um ferner ſein Moment der Trägheit für den Durchmeſſer dieſes Querſchnittes zu finden, darf man nur daſſelbe von dem einfachen Kegelſegmente ſuchen, und für deſſen Maſſe das ganze Gewicht ſubſtituiren. Zu dem Ende ſey die Maſſe des dazu gehörigen vollſtändigen Kegels $= G$, die des abgeſchnittenen Stückes $= F$; die Höhe des erſtern $= g$, des letztern $= f$; ſo iſt das Moment der Trägheit des ganzen Kegels für die durch ſeinen Schwerpunkt gehende Queraxe $= \frac{3}{20} G (b^2 + \frac{1}{4} g^2)$ (§. 214. 3.). Dazu $\frac{1}{10} Gg^2$ addirt, giebt daſſelbe für den Durchmeſſer der Grundfläche $= \frac{1}{20} G (3 b^2 + 2 g^2)$.

3) Auf gleiche Weiſe iſt das Moment der Trägheit des fehlenden Kegels für die durch ſeinen Schwerpunkt gehende Axe $= \frac{3}{20} F (c^2 + \frac{1}{4} f^2)$, und folglich für den Durchmeſſer der eben gedachten Querfläche, indem man noch $F (\frac{1}{4} f + e)^2$ hinzufügt, $= \frac{1}{20} F (3c^2 + 2f^2) + \frac{1}{2} F (ef + 2e^2)$, oder, da $F = \frac{c^3}{b^3} . G$, und $f = \frac{cg}{b}$ iſt,

$$= \frac{c^5 G}{20 b^5} (3b^2 + 2g^2) + \tfrac{1}{2} F (ef + 2e^2).$$

4) Dies von dem erſtern ſubtrahirt, bleibt das Moment der Trägheit des abgekürzten Kegels für eben die Axe

$$= \tfrac{1}{20} G \left(1 - \frac{c^5}{b^5}\right) (3b^2 + 2g^2) - \tfrac{1}{2} F (ef + 2e^2)$$

und wenn wir jeßt unter F und G das Doppelte derſelben verſtehen, ſo drückt dieſe Formel zugleich das Moment der Trägheit des doppelten Kegelſegments für die durch ſeinen Schwerpunkt gehende Zwergaxe aus.

5) Dies vorausgeſeßt, iſt $M = G - F = G (1 - \frac{c^3}{b^3})$, alſo $G = \frac{b^3 M}{b^3 - c^3}$, $F = \frac{c^3 M}{b^3 - c^3}$; ferner

$$e = g - f = (1 - \frac{c}{b}) g, \quad g = \frac{be}{b - c}, \quad f = \frac{ce}{b - c};$$

wodurch ſich die Formel in folgende verwandelt:

$$\tfrac{1}{20} M \frac{(b^5 - c^5).}{b^3 - c^3} . [3 + \frac{2e^2}{(b - c)^2}] - \tfrac{1}{2} M \frac{c^3 e^2}{b^3 - c^3} . (\frac{2b - c}{b - c}).$$

6) Werden noch darin die beyden leßtern Theile vom erſtern getrennt, und in eins zuſammengezogen, ſo erhält man endlich:

$$u'^2 = \frac{3(b^5 - c^5)}{20(b^3 - c^3)} + \frac{b^2 e^2 (b + 2c)}{10(b^3 - c^3)} + \frac{3c^2 e^2 (b - 2c)}{10(b^3 - c^3)}.$$

7) Für die cylindriſche Ruthe iſt $x = \frac{1}{2} a$, $x^2 + u^2 = \frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{4} i^2$; mithin wird:

$$l = \frac{M [(a + e)^2 + u'^2] + \frac{1}{3} m (a^2 + \frac{3}{4} i^2)}{M (a + e) + \frac{1}{2} ma}.$$

§. 232.

Aus der Formel $t = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$, für die Dauer der halben Schwingung eines einfachen Pendels, deſſen Länge $= l$ iſt (§. 227. 2.), wird gegenſeitig

$$l = \frac{2gt^2}{\pi^2}.$$

Nennt man nun die Länge des einfachen Pendels, das Sekunden ſchlägt $= L$, ſo erhält man für $t = 1$

$$L = \frac{2g}{\pi^2}.$$

Dies ſtatt $\frac{2g}{\pi^2}$ in die vorige Formel geſetzt, giebt $l = t^2 L$;

woraus $t = \sqrt{\frac{l}{L}}$ wird.

Weiß man alſo die Länge des einfachen Sekundenpendels, ſo findet man daraus für jedes zuſammengeſetzte Pendel die Zeit ſeines Schlages in Sekunden, wenn man die Entfernung ſeines Schwingungspunktes von der Axe durch jene Länge dividirt, und aus dem Quotienten die Quadratwurzel zieht.

§. 233.

Zu den Verſuchen, die Länge des einfachen Sekundenpendels zu beſtimmen, bedient man ſich gewöhnlich kleiner Gewichte, die entweder die Geſtalt einer Kugel, oder eines doppelten Kegelſegmentes haben, und nimmt ſtatt der Pendelſtange einen ſehr dünnen Faden, woran man ſie in kleinen Bogen ſchwingen läßt. Hat man nun beobachtet, wie viel Schläge ein ſolches Pendel in einer geraumen Zeit verrichtet, ſo kann man daraus mit vieler Genauigkeit einen mittleren Werth t für die Dauer eines einzelnen Schlages beſtimmen; und wird alsdann noch aus den gegebenen Abmeſſungen des Pendels nach obigen Formeln (§. 228. u. f.) der Abſtand ſeines Schwingungspunktes vom Aufhängepunkte

= l hergeleitet, ſo ergiebt ſich aus den beyden Größen t und l die Länge des einfachen Sekundenpendels $L = \frac{l}{t^2}$ (§. 231.).

§. 234.

Da ein ſolches Pendel in ſeiner Form dem einfachen ziemlich nahe kommt, ſo iſt leicht vorauszuſehen, daß der Abſtand zwiſchen dem Schwerpunkte des Gewichtes und dem Aufhängepunkte, den wir f nennen wollen, von der zu findenden Länge l ſehr wenig verſchieden ſeyn müſſe, und folglich, um letztere daraus zu erhalten, nur einer geringen Korrektion bedürfe. Daher läßt ſich die Formel §. 229. für gegenwärtigen Fall noch weit einfacher, und zum Gebrauche bequemer einrichten, ohne daß die erforderliche Genauigkeit dadurch verletzt wird. Zuvörderſt erhält man nemlich, wenn man $a + e = f$ ſetzt, und die halbe Dicke des Fadens als unbedeutend wegläßt:

$$l = \frac{M(f^2 + \frac{2}{5}e^2) + \frac{1}{3}m(f-e)^2}{Mf + \frac{1}{2}m(f-e)},$$

und da auch gewiß m und e allemal ſo gering ſind, daß man m^2 gegen M^2, und em gegen fM vernachläßigen kann, ſo wird ferner:

$$l = \left[f + \frac{2e^2}{5f} + \frac{m(f-e)^2}{3Mf}\right]\left[1 - \frac{m(f-e)}{2Mf}\right]$$

$$= f + \frac{2e^2}{5f} - \frac{m(f+e)}{6M}.$$

Man nenne noch das Gewicht des Fadens für 1 Fuß

Länge $= K$; dies giebt $m = K(f - e)$; oder, wenn f und e in Linien beſtimmt werden, wie das hierbey gewöhnlich geſchieht, $m = \frac{K(f - e)}{144}$; alſo wird das letzte Glied $= \frac{K(f^2 - e^2)}{864M}$, worin man e^2 gegen f^2 weglaſſen kann; mithin:

$$l = f + \frac{2e^2}{5f} - \frac{Kf^2}{864M}.$$

§. 235.

Wir wollen von dieſer Formel auf die erſtern drey von Herrn **Mairans** bekannten Verſuche *), zu denen allein die nöthigen Data angeführt ſind, eine Anwendung machen. Für den Aloefaden (file de pite), deſſen er ſich dabey bediente, finde ich $K = 0{,}11$ Gran. Das Uebrige iſt aus nachfolgender Tafel zu erſehen:

Rad. der Kugel e in Linien.	Gew. M in Gran.	Länge f	Zeit der Beob. in Sekund.	Anzahl der Schl.
3,42	400	860,16	1397	1000
6,13	1707	439,97	2840	2842
6,13	1707	442,40	6810	6796

Zur Vermeidung aller Weitläuftigkeit will ich die Rechnung bloß für den dritten Verſuch, der nach ſeinem Zeugniſſe von allen der genaueſte iſt, herſetzen:

$$\log 4e^2 = 2{,}1769810$$
$$\text{davon } \log 10f = 3{,}6458151$$
$$\text{bleibt } 0{,}5311659 - 2$$

*) Mem. de l'acad. 1735 pag. 183 u. f.

$$\frac{4e^2}{10f} = 0{,}033975$$

$$\log Kf^2 = 4{,}3330229$$

$$\log 864M = 6{,}1687472$$

bleibt $0{,}1642757 - 2$

$$\frac{Kf^2}{864M} = 0{,}014597$$

Korrektion $= 0{,}019378$

$$l = 442{,}419378$$

Ferner $\log l = 2{,}6458342$

$$\log t^2 = 0{,}0017874$$

$$\log L = 2{,}6440468$$

$L = 440{,}602$ Lin.

Auf gleiche Art giebt der erſte Verſuch $l = 859{,}93$, $t = 1{,}397''$, alſo

$$L = 440{,}626'''$$

der zweyte $l = 439{,}9897$, $t = 0{,}9993$, alſo

$$L = 440{,}606'''.$$

Der erſte Verſuch möchte wohl wegen der kürzeren Dauer der Beobachtung der unſicherſte ſeyn, zumal da der Beobachter erſt nachher auf eine ſichere und bequeme Methode verfiel, eine beträchtliche Anzahl von Schlägen mit denen ſeiner Pendeluhr zu vergleichen. Es würde alſo nicht zweckmäßig ſeyn, dieſen Verſuch mit den andern beyden, die ſehr genau mit einander übereinſtimmen, zu vermengen, und daraus ein Mittel für L herzunehmen.

§. 236.

Noch muß ich eines Verſuches erwähnen, der vom P. Liesganig zu Wien mit einem doppelten Kegelſegmente, und zwar nach dem Zeugniſſe des Hrn. Scherffer *) auf das ſorgfältigſte und genaueſte, angeſtellt worden iſt. Seine Angaben von dieſem Pendel ſind folgende:

Das Gewicht des doppelten Kegelſegmentes $M = 540$ Gran, ſeine Höhe $2e = 11,962$ Lin. Wiener Maaß, der Halbmeſſer des mittlern Querſchnittes $b = 4,26$ Lin., der Grundfläche $c = 2,28$ Lin. Der Abſtand ſeines Schwerpunktes vom Aufhängepunkte $= 437,922$ Lin., das Gewicht des Fadens $m = \frac{1}{3}$ Gran, die Anzahl der Schläge innerhalb $86409,4'' = 87861$, alſo die Dauer eines einzelnen Schlages $t = 0,9835''$.

Will man in der Berechnung von l ſich einer ähnlichen Abkürzung hier bedienen, wie bey der Kugel, ſo erhellet leicht, daß man nur in der Formel (§. 234.) ſtatt des Momentes der Trägheit $\frac{2}{5}Me^2$ der Kugel das Moment der Trägheit des Gewichtes M überhaupt zu ſetzen habe, es mag daſſelbe geſtaltet ſeyn, wie man will, wofern es nur klein iſt. Nennt man alſo dies Moment der Trägheit Mh^2, ſo bekommt man allgemein:

$$l = f + \frac{h^2}{f} - \frac{m(f+e)}{6M},$$

und für gegenwärtigen Fall (§. 231. 6.)

*) S. die Beyträge zu verſchiedenen Wiſſenſchaften von einigen öſtereichiſchen Gelehrten, Wien 1775. S. 84.

$$h^2 = \frac{1}{20\,(b^3 - c^3)}\,[3\,(b^5 - c^5) + 2b^2e^2\,(b + 2c) + 6c^2e^2\,(b - 2c)]$$

wonach die Rechnung folgendermaßen ſich führen läßt:

$$\log\,(b + 2c) = 0{,}9454686$$
$$\log\ 2b^2e^2 = 3{,}1133968$$
$$\overline{4{,}0588654}$$
$$2b^2e^2\,(b + 2c) = 11451{,}58.$$
$$\log\,(2c - b) = 0{,}4771212 - 1$$
$$\log\ 6c^2e^2 = 3{,}0475685$$
$$\overline{2{,}5246897}$$
$$6c^2e^2\,(2c - b) = 334{,}726$$
$$3\,(b^5 - c^5) = 4024{,}065$$
$$\overline{}$$

Zähler von $h^2 = 15140{,}92$

Nenner $20\,(b^3 - c^3) = 1309{,}13$

$$h^2 = 11{,}5656$$
$$\log\ h^2 = 1{,}0631695$$

davon $\log\ f = 2{,}6413968$

bleibt $0{,}4217727 - 2$

$$\frac{h^2}{f} = 0{,}02641$$
$$\frac{m\,(f + e)}{6M} = 0{,}04567$$

Korrektion $= - 0{,}01926$

$$f = 437{,}922$$
$$\overline{}$$
$$l = 437{,}903$$

Dies durch das Quadrat der oben angeführten Zeit t

dividirt, giebt die Länge des einfachen Sekundenpendels $L = 452,739$ Linien Wienermaaß, oder $= 440,562$ Pariſer Linien.

§. 237.

Da $L = \frac{2g}{\pi^2}$ (§. 232.), ſo erhält man nunmehr gegenſeitig aus der eben beſtimmten Länge des Sekundenpendels den Fallraum der Körper in einer Sekunde $g = \frac{1}{2}\pi^2 L$. Nun iſt nach dem letztern Verſuche

$$\begin{array}{rrl} & \log L = & 2,6440071 \\ \text{ferner} \ldots & \log \pi^2 = & 0,9942997 \\ \hline & & 3,6383068 \\ & & 0,3010300 \\ \hline & \log g = & 3,3372768 \end{array}$$

alſo $g = 2174,0865$ Par. Linien $= 15,0978$ Par. Fuß, oder, wenn man die Anzahl der Linien durch $139,13$ dividirt, bekommt man in Rheinl. Maaße $g = 15,6263$ Fuß.

Schwingung des Körpers bey inklinirter Lage ſeiner Axe.

§. 238.

Fig. 30. **Aufgabe.** Die Axe AB eines gegebenen Körpers ſey gegen die Horizontale unter einem Winkel $= I$ geneigt; man ſucht die Zeit ſeiner Schwingung.

Aufl. 1) Man fälle aus ſeinem Schwerpunkte M auf die Axe AB das Perpendikel MC, ziehe durch C

die Vertikale CD, und in der dadurch entſtehenden vertikalen Ebene ACD die Linie CI ebenfalls auf AB ſenkrecht; ſo iſt die ganze Ebene MCI auf AB ſenkrecht, und es liegt alſo in ihr der Bogen, den der Schwerpunkt bey der Umdrehung des Körpers um C beſchreibt.

2) Man zerlege ſein Gewicht M, das aus M nach der Vertikale Mv wirkt, in eine Kraft nach Mp, parallel CI, und in eine darauf ſenkrechte, deren Richtung alſo mit der Axe AB parallel iſt. Von erſterer, $= M \text{ Cos } pMv = M \text{ Cos } DCI = M \text{ Cos } I$, fällt die Richtung in die Umdrehungsebene; von letzterer hingegen, $= M \text{ Sin } I$, ſteht ſie auf jener Ebene ſenkrecht, woraus erhellet, daß dieſe Kraft zur Umdrehung des Körpers nichts beytragen könne.

3) Man zerlege noch die Kraft M Cos I in eine nach der Verlängerung von CM, und in eine auf CM ſenkrechte. Erſtere, $= M \text{ Cos } I \text{ Cos } MCI$ verwandelt ſich ebenfalls in einen bloßen Druck, weil ihre Richtung durch die Axe geht; letztere, $= M \text{ Cos } I \text{ Sin } MCI$ wird dagegen ganz auf die Beſchleunigung der Rotation des Körpers verwandt.

4) Nennt man daher, wie im §. 216., die Entfernung $CM = f$, die Abweichung dieſer Linie von der vertikalen Ebene, oder von CI, in der jetzigen Lage des Schwerpunktes $= \varphi$, ihren anfänglichen Abſtand von derſelben $= \eta$, die Winkelgeſchwindigkeit des Körpers in gegenwärtigem Augenblicke $= \gamma$, ſein Moment der Trägheit für die durch M gehende, mit AB parallele, Axe $= Mh^2$, ſo erhält man

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{2gfM \operatorname{Cos} I \operatorname{Sin} \phi}{M(f^2 + h^2)} = \frac{2gf \operatorname{Cos} I \operatorname{Sin} \phi}{f^2 + h^2},$$

oder $\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{-2gf \operatorname{Cos} I \operatorname{Sin} \phi}{f^2 + h^2}$.

5) Dieſe Gleichung, wie im §. 216. behandelt, und $\frac{2gf}{f^2 + h^2} = \frac{1}{\varkappa^2}$ geſetzt, giebt:

$$dt = \frac{-\varkappa \operatorname{Sec} I \,.\, d\phi}{\sqrt{(2 \operatorname{Cos} \phi - 2 \operatorname{Cos} \eta)}}.$$

6) Für den Fall, wo die Axe horizontal, oder $I = 0$ iſt, verwandelt ſich die Formel in die gewöhnliche: $dt = -\frac{\varkappa d\phi}{\sqrt{(2 \operatorname{Cos} \phi - 2 \operatorname{Cos} \eta)}}$. Nennt man alſo die Zeit, worin der Körper den Winkel $\eta - \phi$ an der horizontalen Axe zurücklegen würde, $= T$, ſo wird:

$$dt : dT = \operatorname{Sec} I : 1 \text{ oder}$$
$$dt = dT \,.\, \operatorname{Sec} I$$
$$\text{alſo } t = T \operatorname{Sec} I,$$

wozu keine Konſtante addirt wird, wenn man beyde Zeiten von dem gemeinſchaftlichen Augenblicke anrechnet, wo die Linie CM um den anfänglichen Winkel η von der Vertikale entfernt liegt.

7) Demnach iſt die Zeit einer halben Schwingung des Körpers $= \pi\varkappa \operatorname{Sec} I = \pi \operatorname{Sec} I \sqrt{\left(\frac{f^2 + h^2}{2gf}\right)}$.

§. 239.

Ein Pendel ſchwingt alſo langſamer, wenn ſeine

Axe aus der horizontalen Lage in irgend eine inclinirte gebracht wird, und zwar verhält ſich die Zeit ſeines Schlages verkehrt wie der Koſinus des Neigungswinkels ſeiner Axe gegen den Horizont. Man ſieht hieraus, daß zum richtigen Gange einer Pendeluhr durchaus erſorderlich ſey, daß die Axe des Pendels beſtändig horizontaler Lage, oder die Uhr ſelbſt in vertikaler Stellung bleibe; daher eine ſolche Uhr auf beweglichem Boden, z. B. auf dem Schiffe, nicht gebraucht werden kann.

Betrachtung einer zuſammengeſetzten Maſchine, die eine oder mehrere feſte Axen hat.

§. 240.

Wenn die Maſſe M zwar an ſich um eine feſte Axe beweglich iſt, aber dabey noch mit andern Maſſen in einer ſolchen Verbindung ſteht, daß dieſe durch ihre Umdrehung zugleich mit in eine drehende oder auch fortrückende Bewegung geſetzt werden, ſo iſt die einfache Formel (§. 200.) zur Beſtimmung ihrer Winkelgeſchwindigkeit allein nicht hinreichend, weil alsdann ein Theil der Kraft, die ſie zu drehen ſtrebt, auf die Bewegung der übrigen Maſſen verwandt werden muß. Indeß läßt ſich der Gebrauch der gedachten Formel doch auch auf dieſen zuſammengeſetzteren Fall ausdehnen, wofern man nur nach der im fünften Kapitel vorgetragenen Methode das Geſetz der ganzen Bewegung auf das Gleichgewicht zurückzuführen ſucht.

Man ſetze zu dem Ende das Moment der Trägheit der

der Maſſe M in Anſehung ihrer Umdrehungsaxe = Mh^2; ihre noch unbekannte Winkelgeſchwindigkeit für eine gegebene Zeit t = γ; das ſtatiſche Moment der Kraft, die ihr dieſe Geſchwindigkeit während der Zeit t ertheilt haben würde, wenn ſie mit den andern Maſſen in keiner Verbindung ſtände, = Vf, ſo hat man:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2gfV}{Mh^2}, \text{ alſo}$$

$$Vf = \frac{Mh^2}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}.$$

Wenn man nun auf gleiche Art für jede der übrigen Maſſen die Kraft zu beſtimmen ſucht, wodurch ihr, wenn ſie allein vorhanden wäre, eben die Bewegung ertheilt würde, die ſie in jetzigem Zuſammenhange mit den andern Maſſen wirklich bekommt, ſo müſſen alle dieſe einzelnen virtuellen Kräfte an ihren Stellen den gegebenen Kräften, die das ganze Syſtem von Maſſen eigentlich in Bewegung ſetzen, in einerley Zeitpunkte äquipollent ſeyn, und folglich, nach entgegengeſetzter Richtung angebracht, ihnen das Gleichgewicht halten.

Ich will dieſen Satz, der an ſich klar iſt, aber in der Anwendung dem angehenden Mechaniker Schwierigkeiten machen könnte, durch einige beſondere Fälle erläutern.

§. 241.

Aufgabe. Um eine cylindriſche Welle ſchlingt ſich ein Seil, wovon das eine Ende auf ihrem Umfange befeſtigt, das andere von ihm herabgeleitet iſt, mehrere

male herum. An letzteres Ende wird ein Gewicht P gehängt, das alſo, indem es niederſinkt, das Seil von der Welle abwickelt, und ſie dadurch im Umlauf bringt. Man ſucht ſowohl das Fortrücken der Laſt, als das Drehen der Welle.

Aufl. Es ſey der Halbmeſſer des Cylinders $= a$, ſeine Maſſe $= M$; alſo ſein Moment der Trägheit für ſeine Axe $= \frac{1}{2} Ma^2$. Ferner ſey nach Verlauf einer Zeit t ſeine Winkelgeſchwindigkeit $= \gamma$, ihre Aenderung im nächſten $dt = d\gamma$; ſo iſt

1) das Moment der Kraft, die eben die Aenderung in der Umdrehung des Cylinders hervorbrächte, wenn er mit der Laſt P nicht behängt wäre, $= \frac{Ma^2}{4g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$.

2) Da die Laſt P um ſo viel herabſinkt, als das Stück des Seiles beträgt, das ſich in eben der Zeit von der Welle abwickelt, ſo iſt ihre Geſchwindigkeit $v = a\gamma$, nemlich ſo groß, als die eines Punktes in dem Umfange der Welle; und ihr augenblicklicher Zuwachs $dv = a\,d\gamma$.

3) Daher die Kraft, die die Maſſe P eben ſo beſchleunigen würde, wenn ſie frey wäre, $= \frac{P dv}{2g dt} = \frac{Pa}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$, und ihr Moment gegen die Axe der Welle $= \frac{Pa^2}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$.

4) Die beyden Kräfte (1 und 3) wirken in Verbindung eben ſo auf Welle und Laſt, als das Gewicht

der letztern, das allein die ganze Bewegung verurſacht, und ſind ihm alſo in jedem Zeitpunkte der Bewegung äquipollent. Folglich müſſen ſie, nach entgegengeſetzter Richtung angebracht, ihm an der Axe das Gleichgewicht halten; wodurch zwiſchen den Momenten dieſer drey Kräfte folgende Gleichung entſteht:

$$\frac{Ma^2}{4g} \cdot \frac{d\gamma}{dt} + \frac{Pa^2}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt} = Pa.$$

5) Demnach wird $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{4gP}{(2P+M)a}$, und

$$v = \frac{4gPt}{2P+M}.$$

Die Laſt ſinkt alſo mit gleichförmig beſchleunigter Bewegung herab; nur langſamer, als in dem Falle, wenn die Trägheit der Welle nicht in Betracht käme.

§. 242.

Zu eben dem Reſultate wird man auch noch durch folgende Betrachtung geleitet:

Wäre die Bewegung der Maſſe P gleichförmig, ſo drehete ſich auch der Cylinder gleichförmig, und es gehörte folglich keine Kraft dazu, ihn in dieſer gleichförmigen Umdrehung zu unterhalten. Da aber ihre Geſchwindigkeit v im folgenden Zeittheile dt den Zuwachs dv bekommt, ſo entſteht dadurch auch in der Winkelgeſchwindigkeit des Cylinders eine Aenderung $\frac{dv}{a} = d\gamma$, und dieſe muß nothwendig die Maſſe P

durch einen Theil ihres Gewichtes bewirken. Es ſey dieſer $= W$, ſo hat man:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2gWa}{\frac{1}{2}Ma^2} = \frac{4gW}{Ma}, \text{ mithin}$$

$$W = \frac{Mad\gamma}{4gdt} = \frac{Mdv}{4gdt}.$$

Die Maſſe P wird alſo nur noch durch den übrigen Theil $P - W$ ihres Gewichtes beſchleunigt, und es iſt daher:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2g(P-W)}{P}, \text{ oder } \frac{Pdv}{2gdt} = P - W = P - \frac{Mdv}{4gdt},$$

$$\text{folglich } \frac{dv}{dt} = \frac{4gP}{2P+M},\ v = \frac{4gPt}{2P+M}, \text{ wie vorhin.}$$

§. 243.

1. Das Seil ſpannt ſich offenbar mit eben der Kraft, die zur Beſchleunigung der Rotation des Cylinders verwandt wird, oder ſeine Spannung iſt $= W = P\left(1 - \frac{dv}{2gdt}\right)$.

2) Dieſe Kraft, und das Gewicht M des Cylinders, bewirken alſo gemeinſchaftlich einen vertikalen Druck der Zapfen auf ihre Lager $= W + M$, wodurch an dem Umfange derſelben die Friktion $= \lambda (W + M)$ entſteht, die, wenn wir den Halbmeſſer der Zapfen $= e$ nennen, gegen die Axe das Moment $= \lambda e (W + M)$ hat.

3. Soll demnach bey dieſer Bewegung die Friktion zugleich mit in Betracht gezogen werden, ſo kommt letzteres Moment noch zu den übrigen, in der Gleichung

(§. 241. 4.) linkerhand befindlichen, Momenten hinzu, und es wird daher:

$$\frac{adv}{4gdt}(2P+M)+\lambda e[M+P(1-\frac{dv}{2gdt})]=Pa,$$

woraus $\frac{dv}{dt}=\frac{4g\,[Pa-\lambda e\,(P+M)]}{(2a+\lambda e)\,P+Ma}$ folgt.

§. 244.

Aufgabe. An den Umfängen eines Rades und ſeiner Welle hängen die Maſſen P und Q, die dieſe Maſchine nach entgegengeſetzten Richtungen umzudrehen ſtreben. Erſtere Maſſe, an dem Rade, hat das Uebergewicht, und zieht die letztere aufwärts; man fragt nach der Bewegung, die beyde dadurch bekommen.

Fig. 14. **Aufl.** Es ſey der Halbmeſſer des Rades AC $=a$, der Welle Bc $=b$; das Moment der Trägheit der Maſchine in Anſehung der Umdrehungsaxe $=Mh^2$; ihre Winkelgeſchwindigkeit für eine gegebene Zeit t $=\gamma$; die Aenderung derſelben im nächſten dt $=d\gamma$; ſo iſt

1) das Moment der Kraft, die in eben dem Zeittheile dt dieſe Aenderung hervorbringen würde, wenn die Maſchine frey wäre $=\frac{Mh^2}{2g}\cdot\frac{d\gamma}{dt}$,

2) Die Geſchwindigkeit v der Maſſe P nach der Richtung AM iſt $=a\gamma$; alſo die Kraft, wodurch ſie im nächſten dt um dv wachſen würde, wenn ſich die Maſſe im abgeſonderten Zuſtande befände, $=\frac{Pdv}{2gdt}$

$= \frac{Pa}{2g} \cdot \frac{d♉}{dt}$, und ihr Moment gegen die Axe $=$ $\frac{Pa^2}{2g} \cdot \frac{d♉}{dt}$.

3) Die Geſchwindigkeit u der Maſſe Q nach der Richtung NB iſt $= b♉$, mithin die erforderliche Kraft, ſie um $du = bd♉$ zu vermehren $= \frac{Qdu}{2gdt} = \frac{Qb}{2g} \cdot \frac{d♉}{dt}$, und ihr Moment $= \frac{Qb^2}{2g} \cdot \frac{d♉}{dt}$.

4) Dieſe drey Kräfte bringen alſo in Verbindung eben die Wirkungen hervor, als die Gewichte P und Q, und müſſen alſo, nach entgegengeſetzten Richtungen, oder nach der gemeinſchaftlichen Richtung MA, auf die Maſchine angebracht, dieſen das Gleichgewicht halten. Dem zufolge entſteht zwiſchen ihren Momenten die Gleichung:

$$Pa = Qb + \frac{d♉}{2gdt}(Pa^2 + Qb^2 + Mh^2),$$

mithin wird: $\frac{d♉}{dt} = \frac{2g\,(Pa - Qb)}{Pa^2 + Qb^2 + Mh^2}$,

woraus ſich die Geſchwindigkeiten v und u der beyden Maſſen P und Q unmittelbar ergeben.

§. 245.

1. Die Maſſe P wird durch ihr Gewicht, das ebenfalls $= P$ iſt, herabwärts getrieben: ſinkt aber nur mit einer Kraft $= \frac{Pdv}{2gdt}$, und wird alſo durch die Kraft

$P\left(1 - \frac{dv}{2gdt}\right)$ zurückgehalten; folglich das Seil, woran ſie befeſtigt iſt, mit eben der Stärke geſpannt.

2. Die Maſſe Q ſteigt dagegen mit einer Kraft $= \frac{Qdu}{2gdt}$ aufwärts. Alſo hat das Seil, woran ſie hängt, nicht allein ihr ganzes Gewicht zu tragen, ſondern auch noch die Maſſe ſelbſt mit jener Kraft hinaufzuziehen, und ſeine Spannung iſt daher $= Q\left(1 + \frac{du}{2gdt}\right)$.

3. Durch die beyden Spannkräfte, ſo wie durch das Gewicht M der Maſchine, entſteht alſo ein vertikaler Druck der Zapfen gegen ihre Lager $= M + P + Q - \frac{d\gamma}{2gdt}(Pa - Qb)$, und daraus ein Widerſtand der Reibung, der gegen die Axe das Moment

$$\lambda e\left[P + Q + M - \frac{d\gamma}{2gdt}(Pa - Qb)\right]$$

hat, wenn wiederum der Halbmeſſer des Zapfen e genannt wird.

4. Man bekommt alſo jetzt ſtatt der Gleichung §. 244. 4. folgende:

$$Pa = Qb + \lambda e(P + Q + M) + \frac{d\gamma}{2gdt}[Pa^2 + Qb^2 + Mh^2 - \lambda e(Pa - Qb)]$$

und daraus

$$\frac{d\gamma}{2gdt} = \frac{Pa - Qb - \lambda e(P + Q + M)}{Pa^2 + Qb^2 + Mh^2 - \lambda e(Pa - Qb)}$$

§. 246.

Hängen die beyden Maſſen P und Q an einem gemeinſchaftlichen Seile, das über eine Rolle geht, ſo hat man b = a, und für beyder Geſchwindigkeit $v = a\gamma$. Daher wird in dieſem Falle

$$v = \frac{2gt.[(P-Q)a - \lambda e(P+Q+M)]}{(P+Q+\frac{1}{2}M)a - \lambda e(P-Q)}$$

und, wenn man den Raum, durch den die Maſſe P in der Zeit t herabſinkt, oder Q heraufſteigt, = x nennt:

$$x = \tfrac{1}{2}vt.$$

Da die Friktion, wie jeder andere Widerſtand, kein Gleichgewicht aufhebt, ſondern vielmehr die Grenzen, zwiſchen denen es ohne ſie ſtatt finden würde, weiter ausdehnt; ſo folgt von ſelbſt, daß ſich die Formel nur anwenden laſſe, wofern die Bewegung möglich, alſo $P - Q > \frac{\lambda e}{a}(P+Q+M)$ iſt. Widrigenfalls würde man die Friktion als aktive Kraft anſehen, wo ſie bloß verhindert, daß die Bewegung wirklich erfolge.

Iſt nun aber $P - Q > \frac{\lambda e}{a}.(P+Q+M)$, ſo hat ſie offenbar einen deſto beträchtlichern Einfluß auf die Bewegung, je größer jede der beyden Maſſen P und Q an ſich, und je kleiner ihr Unterſchied iſt; woraus erhellet, daß ſich ihr Koefficient λ durch Verſuche mit Gewichten, die dazu vortheilhaft gewählt ſind, mit vieler Genauigkeit beſtimmen laſſen müſſe. Zu dem Ende er-

hält man aus vorhergehender Formel, wenn man darin den Fallraum x als gegeben anſieht:

$$\lambda = \frac{a}{e} \cdot \frac{gt^2 (P - Q) - x (P + Q + \frac{1}{2} M)}{gt^2 (P + Q + M) - x (P - Q)}.$$

§. 247.

Exempel. Bey den Verſuchen, die uns Herr **Schober** in ſeiner Theorie der Ueberwucht mitgetheilt hat, war der vorgezeichnete Fallraum x = 54 pariſ. Fuß; die Rolle hatte $2\frac{1}{6}$ Zoll im Durchmeſſer, und wog ſammt ihrer ſtählernen Axe, die auf geröſtetem Horn lief, und $\frac{1}{12}$ Zoll dick war, $1\frac{3}{8}$ Loth. Die beyden Gewichte hingen an einer Schnur ohne Ende, 8 Loth ſchwer, wovon ſich alſo auf verſchiedenen Seiten der Rolle beſtändig gleiche Hälften befanden. Das kleinere Gewicht betrug 64 Loth; dazu das Gewicht der halben Schnur addirt, giebt Q = 68 Loth. Das Uebrige erſieht man aus folgender Tafel:

Gewicht P in Loth	$= 69\frac{1}{2}$	70	$70\frac{1}{2}$	71	$71\frac{1}{2}$	72
Beob. Zeit t in Sec.	= 31	23	18	15	14	13

Was den erſten Verſuch betrift, ſo wird:

$$\log . gt^2 = 4{,}1616372$$
$$\log . (P + Q + M) = 2{,}1426242$$
$$\log . gt^2 (P + Q + M) = 6{,}3042614$$
$$gt^2 (P + Q + M) = 2014935$$
$$x (P - Q) = 81$$
$$\text{Nenner} = 2014854$$
$$\text{deſſen Log.} = 6{,}3042436$$

Ferner $\log . gt^2 = 4{,}1616372$

$\log . (P - Q) = 0{,}1760913$

$\log . gt^2 (P - Q) = 4{,}3377285$

$gt^2 (P - Q) = 21763{,}479$

$x (P + Q + \frac{1}{2} M) = 7462{,}125$

Zähler $= 14301{,}354$

deſſen Log. $= 4{,}1553772$

dazu $\log . \frac{a}{e} = 1{,}4149738$

addirt, giebt . . $5{,}5703505$

und hiervon . . $6{,}3042436$

ſubtr. bleibt $\log \lambda = 0{,}2661069 - 1$

alſo . . . . . $\lambda = 0{,}18454$

Eben ſo giebt der zweyte Verſuch $\lambda = 0{,}19514$

der dritte . . . $\lambda = 0{,}17913$

der vierte . . . $\lambda = 0{,}14470$

der fünfte . . . $\lambda = 0{,}17390$

der ſechſte . . . $\lambda = 0{,}18816$

und wenn man aus dieſen Werthen, mit Weglaſſung des vierten, der von den übrigen zu ſehr abweicht, ein Mittel nimmt, bekommt man $\lambda = 0{,}184$.

Herr Schober bemerkt a. a. O. daß zur bloßen Aufhebung der Friktion eine Ueberwucht von 1 Loth erforderlich war. Setzt man nun dieſem zufolge in der Formel fürs Gleichgewicht:

$$P - Q = \frac{\lambda e}{a} . (P + Q + M)$$

$P = 69$ Loth, $Q = 68$ Loth, und wie vorhin $M = 1\frac{1}{8}$

Loth, $\frac{e}{a} = \frac{1}{26}$, ſo erhält man dadurch $\lambda = 0{,}188$. Hieraus beſtätigt ſich, was wir ſchon in der Statik bey Betrachtung der Friktionsgeſetze erinnert haben, daß bey Axen, die in Lagern ſich drehen, die Friktion der Ruhe und der Bewegung ziemlich genau mit einander übereinkommen.

§. 248.

Stat. Fig. 49. **Aufgabe.** Ein Tretrad, an deſſen Welle die Laſt P hängt, ſoll durch einen Menſchen, der ſich innerhalb deſſelben befindet, in Bewegung geſetzt werden. Sein körperliches Gewicht $= G$, und die Winkeldiſtanz $oCB = \eta$ ſeiner mittlern Stelle o von der Vertikale ACB, ſind gegeben; man ſucht die Umdrehung des Rades und das Fortrücken der Laſt.

Aufl. 1) Man nenne den Halbmeſſer des Rades $= a$, den der Welle $= b$, das Moment der Trägheit der ganzen Maſchine in Bezug auf ihre Axe $= Mh^2$, ihre Winkelgeſchwindigkeit für eine gegebene Zeit $t = \gamma$, die Aenderung derſelben im nächſten Zeittheilchen $dt = d\gamma$.

2) Wäre die Maſchine im freyen Zuſtande, ſo würde ihre Beſchleunigung eben ſo durch eine Kraft erfolgen, die gegen ihre Axe das Moment $= \frac{Mh^2}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$ hätte.

3) Die Geſchwindigkeit der Laſt iſt $= b\gamma$ nach aufwärts gehender vertikaler Richtung, und der Zuwachs derſelben im nächſten $dt = bd\gamma$. Stände alſo

die Laſt mit dem Rade in keiner Verbindung, und wäre bloß als träge Maſſe anzuſehen, ſo gehörte zu ihrer Bewegung eine Kraft $= \frac{Pb}{2g} . \frac{d\gamma}{dt}$, und dieſe hätte gegen die Axe das Moment $= \frac{Pb^2}{2g} . \frac{d\gamma}{dt}$.

4) Da die Stelle des Menſchen unveränderlich dieſelbe bleibt, ſo bedürfte es, um ſeine körperliche Maſſe daſelbſt in Ruhe zu laſſen, gar keiner Kraft; daher iſt zu ihrer Bewegung, wenn wir ſie nus als frey und ohne Gewicht denken, die erforderliche Kraft = o.

5) Die Kräfte, die das Rad wirklich in Bewegung ſetzen, ſind: Das Gewicht des Menſchen = G, und die Laſt P; ihre Momente gegen die Axe = Ga Sin η, und Pb. Werden nun zu dieſen Kräften die erſtern beyden (2. 3.) nach entgegengeſetzten Richtungen hinzugefügt, und die Momente derer, die das Rad nach einerley Seite zu drehen ſtreben, zuſammenaddirt, ſo entſteht die Gleichung:

$$Ga \operatorname{Sin} \eta = Pb + \frac{d\gamma}{2gdt}(Pb^2 + Mh^2).$$

6) Dieſe giebt: $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2g\,(Ga \operatorname{Sin} \eta - Pb)}{Pb^2 + Mh^2}$, woraus dann das Uebrige leicht gefunden wird.

§. 249.

Will man hierbey zugleich die Friktion in Rechnung bringen, ſo geſchieht dies folgendermaßen:

1) Die Spannung des Seiles, woran die Laſt

hängt, iſt $= (1 + \frac{bd\gamma}{2gdt}) P$. Durch den Theil P derſelben wird nemlich die Geſchwindigkeit der Laſt $v = b\gamma$ bloß erhalten; durch den andern Theil $\frac{Pbd\gamma}{2gdt}$ hingegen, wird ſie in jedem folgenden Augenblicke um $dv = bd\gamma$ **vermehrt.**

2) Dieſe Spannung, nebſt den Gewichten G und M des Menſchen und der Maſchine, bewirken zuſammen einen vertikalen Druck der Zapfen gegen die Lager $= P (1 + \frac{bd\gamma}{2gdt}) + G + M$, welcher mit dem Reibungskoefficienten λ multiplicirt, die daraus entſtehende Friktion giebt.

3) Da ſie am Umfange des Zapfen geſchieht, ſo iſt ihr Moment gegen die Axe, wenn man den Halbmeſſer des Zapfen e nennt, $= \lambda e [P (1 + \frac{bd\gamma}{2gdt}) + G + M)$. Dies zu den übrigen Momenten auf der rechten Seite der Gleichung (§. 242. 5.) noch hinzu gefügt, giebt nunmehr:

$$Ga \,\mathrm{Sin}\, \eta = Pb + \lambda e (G + P + M) + \frac{d\gamma}{2gdt} (Pb^2 + Mh^2 + \lambda Peb)$$

woraus

$$\frac{d\gamma}{2gdt} = \frac{Ga \,\mathrm{Sin}\, \eta - Pb - \lambda e (G + P + M)}{Pb^2 + Mh^2 + \lambda Peb} \text{ wird.}$$

§. 250.

Stat. Fig. 52. **Aufgabe.** In das Getriebe aeO eines Rades AEF greift ein anderes Rad OGB ein, woran eine Welle gb befindlich iſt. Um dieſe iſt ein Seil gewunden, an deſſen herabwärts gehendes Ende ein Gewicht P gehängt wird. Man fragt, wie daſſelbe nach und nach ſinken, und die Räder in Umlauf ſetzen werde.

Aufl. Es ſey der Halbmeſſer des erſten Rades AC = a, der ſeines Getriebes CO = e, das Moment der Trägheit beyder für ihre Axe = Mh^2; der Halbmeſſer des letztern Rades DB = b, der ſeiner Welle Db = f, ihr gemeinſchaftliches Moment der Trägheit in Anſehung ihrer Axe = Nl^2. Endlich ſey noch die Geſchwindigkeit des Gewichtes P für eine gegebene Zeit t = v, ihre Aenderung im nächſten dt = dv, ſo iſt

1) die zu dieſer Beſchleunigung erforderliche Kraft nach vertikal herabwärts gehender Richtung $= \frac{Pdv}{2gdt}$.

2) Ferner die Winkelgeſchwindigkeit ω des nächſten Rades $= \frac{v}{f}$, und ihr Wachsthum im folgenden dt $= d\omega = \frac{dv}{f}$; alſo das Moment der Kraft, die dieſe Wirkung auf das Rad hervorbrächte, wenn es mit der Laſt und dem andern Rade nicht zuſammenhinge = $\frac{Nl^2}{2g} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{Nl^2}{2gf} \cdot \frac{dv}{dt}$; und ſie ſelbſt, auf den Umfang der Welle angebracht, $= \frac{Nl^2}{2gf^2} \cdot \frac{dv}{dt}$.

3) Da der Punkt O in dem Umfange des eben betrachteten Rades und des dareingreifenden Getriebes einerley Geſchwindigkeit hat, ſo wird, wenn wir die Winkelgeſchwindigkeit des letztern, oder des zu ihm gehörigen Rades AEF $= \vartheta$ nennen, $e\vartheta = b\omega$; folglich $\vartheta = \frac{b\omega}{e} = \frac{bv}{ef}$, $d\vartheta = \frac{bdv}{ef}$; mithin das Moment der Kraft, die zur Umtreibung deſſelben nöthig wäre, wenn es im abgeſonderten Zuſtande eben die Bewegung erhalten ſollte, $= \frac{Mh^2}{2g} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{Mh^2 b}{2gef} \cdot \frac{dv}{dt}$, und die Kraft ſelbſt, auf ſeinen Umfang reducirt, $= \frac{Mh^2 b}{2gefa} \cdot \frac{dv}{dt}$.

4) Dieſe drey Kräfte nach entgegengeſetzten Richtungen auf ihre Punkte b und A angebracht, müſſen alſo der Laſt P das Gleichgewicht halten; daher bekommt man zwiſchen ihnen folgende Gleichung:

$$\frac{Mh^2 b}{2gefa} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{ef}{ab} \left[P - \frac{dv}{2gdt}\left(P + \frac{Ml^2}{f^2}\right)\right].$$

woraus $\frac{dv}{dt} = \frac{2gPe^2f^2}{Pe^2f^2 + Mh^2b^2 + Nl^2e^2}$ folgt.

Gleichförmige Bewegung bey Maſchinen.

§. 251.

Die Kräfte, die man zur Betreibung einer Maſchine anwendet, ſind ſelten, wie in den bisher betrachteten Fällen, unveränderlich; ſondern meiſtentheils von der Art, daß ſie mit zunehmender Geſchwindigkeit der

von ihnen angegriffenen Punkte entweder an Wirkung, oder an abſoluter Größe verlieren, und ſich auf ſolche Weiſe mit der Laſt, oder dem Widerſtande, den ſie zu überwinden haben, zuletzt ins Gleichgewicht ſetzen. Bevor dies geſchieht, iſt die Geſchwindigkeit der Maſchine einem ſteten Wachsthum unterworfen, der aber in gleichem Maaße, wie die Ueberwucht der Kraft ſich vermindert, nach und nach abnimmt, und am Ende, wenn Kraft und Laſt ins Gleichgewicht treten, gänzlich verſchwindet; da dann die Geſchwindigkeit bey einer gewiſſen Grenze, die ſie erreicht hat, ſtehen bleibt, und die ganze Maſchine in dem einmal erhaltenen Gange gleichförmig beharret.

§. 252.

Zur Erläuterung dieſes, für die Ausübung ſo wichtigen Satzes, wollen wir beym Tretrade §. 248. annehmen, die Laſt P, die durch den Menſchen aufgewunden werden ſoll, ſey gegeben, ſo wird dadurch die Stelle o beſtimmt, wo er ſtehen muß, um ſelbiger das Gleichgewicht zu halten; man hat nemlich in dieſem Betracht:

$$Ga \operatorname{Sin} \eta = Pb, \text{ mithin}$$

$$\operatorname{Sin} \eta = \frac{Pb}{Ga}.$$

Dieſe Stelle darf er nun Anfangs nicht betreten, wofern das Rad durch ihn wirklich in Umlauf gebracht, und die Laſt gehoben werden ſoll, ſondern ſein Standpunkt muß für jetzt noch höher hinauf, etwa in m, fal-

len, ſo daß der Winkel mCB, den wir η' nennen wollen, größer als η iſt. Alsdann wird (§. 248. 6.).

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{2g\,(Ga \operatorname{Sin} \eta' - Pb)}{Pb^2 + Mh^2}.$$

So lange demnach der Winkel η' einerley bleibt, wächſt die Geſchwindigkeit des Rades gleichförmig, und kann alſo ſo groß werden, wie man will. Dazu gehört aber nothwendig, daß der Arbeiter ſich längs der ſchiefen Fläche ſeines Standortes beſtändig mit eben der Geſchwindigkeit $a\vartheta$ fortbewege, womit die Stuffen unter ſeinen Füßen ausweichen, oder, welches daſſelbe iſt, daß er fortwährend mit der Geſchwindigkeit $a\vartheta \operatorname{Sin} \eta'$ vertikal in die Höhe ſteige. Setzen wir nun, daß innerhalb der Stellen o und m, deren Inklination doch nicht ſehr verſchieden ſeyn kann, die vertikale Geſchwindigkeit, die er nach Maaßgabe ſeiner Kräfte anzunehmen vermag, allenthalben $= c$ ſey, ſo folgt, daß nach einiger Zeit $a\vartheta \operatorname{Sin} \eta' = c$ werden, und ſodann der Winkel η' in eben dem Verhältniſſe abnehmen müſſe, als ϑ fernerhin anwächſt.

Man ſubſtituire jetzt in obiger Formel für $\operatorname{Sin} \eta'$ ſeinen Werth $\frac{c}{a\vartheta}$, ſo bekommt man:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{2g}{Pb^2 + Mh^2} \cdot \left(\frac{Gc}{\vartheta} - Pb\right).$$

Indem alſo die Geſchwindigkeit des Rades größer wird, nimmt ihr Wachsthum $d\vartheta$ fortdauernd ab, und verſchwindet zuletzt, nachdem $\frac{Gc}{\vartheta} = Pb$ geworden iſt,

gänzlich. Hieraus ergiebt ſich für den Beharrungszuſtand: $\gamma = \frac{Gc}{Pb}$, und $\text{Sin}\,\eta' = \frac{c}{a\gamma} = \frac{Pb}{Ga} = \text{Sin}\,\eta$, $\eta' = \eta$, d. h. die gleichförmige Bewegung der Maſchine nimmt ihren Anfang, wenn der Menſch zu derjenigen Stelle zurückgekommen iſt, wo er der Laſt das Gleichgewicht halten würde, wenn ſich dieſelbe noch in Ruhe befände.

§. 253.

Im Beharrungszuſtande einer Maſchine hält nicht allein die Kraft, die zu ihrer Betreibung gebraucht wird, der Laſt und den Nebenhinderniſſen das Gleichgewicht, ſondern das beträchtlichſte dieſer Hinderniſſe, die Friktion, iſt auch genau von eben der Größe, als wenn die Maſchine in Ruhe wäre.

Beweis. 1) Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, es ſey nur eine feſte Axe an der Maſchine befindlich; aus der Folge unſerer Schlüſſe wird man leicht wahrnehmen, daß ſie mit eben dem Rechte gelten müſſen, es mögen der Axen ſo viele, als man will, vorhanden ſeyn. Unter dieſer Vorausſetzung ſey nun die bewegende Kraft $= V$; die Laſt, die dadurch in eine fortrückende Bewegung geſetzt wird, $= P$, ihre Geſchwindigkeit für eine gegebene Zeit $t = v$; das Moment der Trägheit aller der Theile, die ſich um die Axe drehen, in Bezug auf dieſelbe $= Mh^2$, ihre Winkelgeſchwindigkeit für eben die Zeit $= \gamma$; die Friktion nebſt andern Hinderniſſen, auf einerley Punkt reducirt, $= R$.

2) Sollte die Bewegung ohne den Einfluß der Kraft und des Widerſtandes eben ſo erfolgen, wie ſie hier von den einzelnen Stücken der Maſchine angegeben iſt, ſo müßte die Laſt P nach ihrer Richtung in jedem Augenblicke durch eine Kraft $= \frac{Pd\upsilon}{2gdt}$ getrieben, und die Maſchine zu gleicher Zeit von einer andern Kraft, die gegen ihre Axe das Moment $= \frac{Mh^2}{2g} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$ hätte, gedrehet werden.

3) Dieſe beyden Kräfte wären alſo in Verbindung den gegebenen V, P und R für jeden Zeitpunkt der Bewegung äquipollent, und müßten folglich, nach entgegengeſetzten Richtungen angebracht, ihnen das Gleichgewicht halten.

4) Sobald aber die Bewegung in den Beharrungszuſtand kommt, werden υ und ϑ beſtändige Größen; folglich ihre Aenderungen $d\upsilon$ und $d\vartheta$, und mit ihnen $\frac{Pd\upsilon}{2gdt}$ und $\frac{Mh^2}{2g} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$, $= 0$; woraus erhellet, daß ſodann V, P und R noch unter ſich allein im Gleichgewichte ſeyn müſſen.

5) Außer dem **beſtändigen** Drucke M, den die Axe durch das eigene Gewicht der Maſchine leidet, kommt während der Bewegung noch der **veränderliche** Druck in Betracht, der durch Kraft und Laſt auf ſie hervorgebracht wird. Was die Laſt betrifft, ſo ſpannt ſolche das Seil, woran ſie befeſtigt iſt, durch ihre Ge-

ſchwindigkeit v mit einer Gewalt $= (1 \pm \frac{dv}{2gdt}) P$, je nachdem ſie ſich aufwärts, oder herabwärts bewegt, und übt dadurch einen Druck auf die Axe aus, der dieſer Spannung gleich iſt. Wird nun die Bewegung gleichförmig, alſo $dv = 0$, ſo verwandelt ſich jener Druck in das bloße Gewicht P, und die Friktion, die von der Laſt herrührt, wird alsdann eben ſo groß, als für den Fall, wenn die Laſt ruhig hinge. Ein Gleiches gilt endlich auch vom andern Theile der Friktion, der durch die Kraft V bewirkt wird; weil dieſelbe im Beharrungszuſtande eben die Größe hat, als im Zuſtande der Ruhe.

§. 254.

Die verſchiedenen Hinderniſſe, die durch den Gang der Maſchine veranlaßt werden, kann man insgeſammt auf einen einzigen Punkt derſelben zurückführen, und wenn man dazu eben den Punkt nimmt, worauf die Laſt wirkt, ſo laſſen ſie ſich in Verbindung als einen Theil der Laſt anſehen, in welchem Betracht ſie dann auch unter dem gemeinſchaftlichen Namen der **Nebenlaſt** begriffen werden. Es iſt daher hinreichend, bey jeder Maſchine, ſie mag eingerichtet ſeyn, wie man will, überhaupt zwey Kräfte anzunehmen: eine bewegende Kraft, die zu ihrer Betreibung angewandt wird, und einen Widerſtand, der ſich der erſtern entgegenſetzt, und die Bewegung zu verzögern ſtrebt; es ſey dieſer nun eine wirkliche Laſt, die gehoben werden ſoll, oder

ein bloßes Hinderniß, als Reibung, Widerſtand der Luft und dergl. oder beſtehe aus beyden zugleich. Die Stelle, worauf die bewegende Kraft angebracht wird, heißt nach dem eingeführten Sprachgebrauche der angegriffene Punkt, und die, worauf die Laſt zunächſt wirkt, oder eine ihr äquipollente Kraft hinverlegt iſt, der leidende Punkt der Maſchine.

§. 255.

Da im Beharrungszuſtande der Bewegung, Kraft und Widerſtand einander das Gleichgewicht halten, ſo folgt nach dem Grundſatze der virtuellen Geſchwindigkeiten (Statik Kap. XI.): **daß das Produkt aus der bewegenden Kraft in die Geſchwindigkeit des angegriffenen Punktes dem Produkte aus dem Widerſtande in die Geſchwindigkeit des leidenden Punktes gleich ſeyn müſſe.** Man nenne nemlich die erſtere Kraft $= P$, letztere $= Q$; die Geſchwindigkeiten der beyden Punkte, worauf ſie wirken, v und u, und die augenblicklichen Wege, die dieſe Punkte nach ihren Richtungen durchlaufen, dp und dq; ſo hat man $Pdp = Qdq$, und $v = \frac{dp}{dt}$, $u = \frac{dq}{dt}$, mithin $Pv = Qu$.

§. 256.

Der abſolute **Effekt**, oder der **Nutzen**, den eine Maſchine leiſtet, richtet ſich theils nach der Größe der Laſt, die durch ſie gehoben wird, oder des Widerſtandes, den ſie zu überwältigen hat, theils aber

auch nach der Höhe, zu der ſie die Laſt hinaufhebt, oder dem Raume, durch den ſie den Widerſtand fortſchiebt, und ſteht mit beyden Größen im geraden Verhältniſſe; oder, wenn Q den Widerſtand, q ſeinen zurückgelegten Weg bedeutet, ſo iſt der abſolute Effekt der Maſchine dem Produkte Qq proportional.

Je größer nun dieſer in einer beſtimmten Zeit t iſt, oder umgekehrt; je weniger Zeit die Maſchine braucht, um eben den Effekt hervorzubringen, deſto wirkſamer muß ſie ohne Zweifel ſeyn. Man kann alſo ſagen: der **relative** Effekt oder die **Wirkſamkeit** einer Maſchine ſtehe im geraden Verhältniſſe ihres abſoluten Effektes, und im verkehrten Verhältniſſe der Zeit, die ſie auf ihn verwendet; oder, wenn man ſich der Zeichenſprache bedient: ſie verhalte ſich wie der Quotient $\frac{Qq}{t}$.

§. 257.

Wegen der gleichförmigen Bewegung der Maſchine im Beharrungszuſtande iſt nun $\frac{q}{t} = u$, mithin $\frac{Qq}{t} = Qu$; daher wird auch eben ſo gut ihre Wirkſamkeit durch das Produkt Qu, oder das ihm gleichgeltende Pv, dargeſtellt, das man gewöhnlich ſchlechthin ihren Effekt zu nennen pflegt. Es läßt ſich aus ſeiner Größe, wie nun von ſelbſt erhellet, beurtheilen, ob die Maſchine mehr oder minder vortheilhaft eingerichtet ſey, und was für Aenderungen mit ihr vorgenommen werden kön-

nen, die man als wahre Verbeſſerungen derſelben anſe-
hen darf.

Indeß bemerkt Herr **Langsdorf** a. m. O. ſ. Maſchinenlehre ſehr richtig, daß in der Größe Q die eigentliche Laſt, die er deswegen auch Nutzlaſt nennt, mit der Nebenlaſt, oder den Hinderniſſen der Maſchine vermengt ſey, und daß daher nicht allemal bey derjenigen Einrichtung der Maſchine, wofür Qu oder Pv ein Maximum iſt, auch zugleich ihr **wahrer** Effekt der möglichſt größte ſeyn werde. Man kann ſich hier, wie mich dünkt, vor allem Irrthum ſichern, wenn man Anfangs die zu fördernde Laſt als gegeben anſieht, und daraus das, was an der Maſchine veränderlich ſeyn darf, ſo zu beſtimmen ſucht, daß die Geſchwindigkeit der Laſt am größten wird; dann aber auch die Laſt ſelbſt als veränderlich annimmt, und nun berechnet, wie groß ſie ſeyn müſſe, damit das Produkt aus ihr in die Geſchwindigkeit derſelben, oder der eigentliche Effekt der Maſchine ein Maximum werde. Ich will davon folgendes Beyſpiel geben.

§. 258.

Fig. 31. **Aufgabe.** An dem wagerechten Arme DF einer ſtehenden Welle AB ſoll ein Pferd ziehen, und dadurch eine Laſt aufwinden, von der ein Seil über die Rolle K zum Umfange der Welle geht. Man fragt, für welche Laſt und Länge des Armes ſein Zug am wirkſamſten ſey.

Aufl. Es ſey die zu hebende Laſt . . . $= O$

die Kraft, die das Thier anwenden muß . $= P$

ſeine abſolute Kraft, wenn es in Ruhe iſt $= K$

ſeine größte Geſchwindigkeit . . . . . $= c$

das Gewicht der Welle AB . . . . . $= G$

ihre Winkelgeſchwindigkeit im Beharrungs-zuſtande . . . . $= \gamma$

ihr Halbmeſſer . . . . $= a$

der Halbmeſſer ihres Zapfens . . . . . $= e$

die geſuchte Länge des Hebelarmes DF . $= f$

der Halbmeſſer der Rolle . . . . . . $= b$

der ihrer Axe . . . . $= i$

der Reibungskoefficient . . . . . . $= \lambda$

1) So hat man zuvörderſt, wenn die geſammte Friktion, auf den Umfang der Welle reducirt, $= F$ genannt wird:

$$Pf = (O + F)\,a$$

und weil die Geſchwindigkeit des Pferdes $= f\gamma$ iſt,

$$P = K\left(1 - \frac{f^2\gamma^2}{c^2}\right) (\S.\ 157.),\ \text{mithin}$$

$$Kf\left(1 - \frac{f^2\gamma^2}{c^2}\right) = (O + F)\,a.$$

2) Was die Friktion betrift, ſo iſt dieſe an gegenwärtiger Maſchine von dreyfacher Art. Theils entſteht ſie nemlich an dem Umfange des Zapfen durch den Seitendruck, den Kraft und Laſt auf die Welle ausüben, theils am Boden des Zapfen durch das Gewicht der Welle: endlich aber auch an der Axe der Rolle durch die Spannung des darüber gehenden Seiles.

3) Erſtere kann nur allein nach dem Drucke O der Laſt geſchätzt werden, da die Kraft durch ihre veränderliche Richtung bald einen Druck, der mit jenem zuſammenfällt, bald einen entgegengeſetzten veranlaßt. Dem zufolge iſt alſo ihr Moment $= \lambda e O$, und eine ihr äquipollente Laſt, auf den Umfang der Welle angebracht, $= \frac{\lambda e O}{a}$.

4) Die Friktion am Boden des Zapfen hat das Moment $= \frac{2}{3} \lambda e G$, und giebt alſo auf eben den Punkt reducirt, eine Laſt $= \frac{2\lambda e G}{3a}$.

5) Die Spannung des Seiles iſt $= O$, und bewirkt alſo, wenn man den Winkel, worin das Seil an der Rolle gebogen iſt, zu 90° annimmt, einen mittlern Druck auf ihre Axe $= \sqrt{2O^2} = O\sqrt{2}$. Daher iſt das Moment der Friktion an dieſem Theile der Maſchine $= \lambda i O\sqrt{2}$, und ſie ſelbſt auf den Umfang der Rolle, oder den leidenden Punkt reducirt, $= \frac{\lambda i}{b} \cdot O\sqrt{2}$.

6) Alle drey Hinderniſſe addirt, geben demnach $F = \lambda O \left(\frac{e}{a} + \frac{i}{b}\sqrt{2}\right) + \frac{2\lambda e G}{3a}$, worin wir der Kürze wegen $\frac{e}{a} + \frac{i}{b}\sqrt{2} = n$ ſetzen wollen. Wird nun dieſer Werth für F in (1) ſubſtituirt, ſo erhält man

$$Kf\left(1 - \frac{f^2 \gamma^2}{c^2}\right) = Oa\,(1 + n\lambda) + \tfrac{2}{3}\lambda e G$$

eine Gleichung, in der bloß O, f und υ als veränderliche Größen enthalten ſind.

7) Man ſehe zuerſt O als gegeben an, und ſuche den Werth von f, wofür υ ein Maximum wird. Dies geſchieht, indem man die Gleichung nach f differenziirt, und dabey υ wie eine beſtändige Größe betrachtet; daher wird:

$$K\left(1 - \frac{3f^2\upsilon^2}{c^2}\right) = 0,$$

$$\text{mithin } \upsilon^2 = \frac{c^2}{3f^2},$$

und wenn damit υ^2 aus der Gleichung (6) weggeſchaft wird, ſo kommt:

$$\tfrac{2}{3}Kf = Oa(1 + n\lambda) + \tfrac{2}{3}\lambda eG,$$

$$\text{woraus } f = \frac{3Oa(1+n\lambda)}{2K} + \frac{\lambda eG}{K} \text{ folgt.}$$

8) Nachdem man auf ſolche Art das vortheilhafteſte Verhalten der Hebelslänge f zur Laſt O gefunden hat, nehme man nun ferner auch letztere als veränderlich an, und ſuche ſie ſo zu beſtimmen, daß der Effekt der Maſchine, oder das Produkt $Oa\upsilon$ aus der Laſt in ihre Geſchwindigkeit $a\upsilon$ ein Maximum wird. Zu dem Ende hat man:

$$\upsilon = \frac{c}{f\sqrt{3}} = \frac{2Kc\sqrt{3}}{9Oa(1+n\lambda) + 6\lambda eG}$$

$$\text{alſo } Oa\upsilon = \frac{2KOac\sqrt{3}}{9Oa(1+n\lambda) + 6\lambda eG},$$

wovon nun das Differenzial, nach O genommen, = o geſetzt werden müßte. Allein man ſieht ſchon vorläufig,

daß dieſe Größe, wenn man darin O wachſen läßt, ebenfalls beſtändig zunimmt, und alſo keines Maximums fähig iſt. Sie nähert ſich aber mit wachſendem O unendlich einer Grenze $= \frac{2Kc\sqrt{3}}{9(1+n\lambda)}$.

9) Hieraus folgt demnach: daß der Effekt dieſer Maſchine bey jeder Einrichtung, die man ihr geben kann, ſtets kleiner ſey, als $\frac{2Kc\sqrt{3}}{9(1+n\lambda)}$, aber dieſer Grenze deſto näher komme, je größer man die Laſt, und folglich auch die Länge des Hebelarmes annimmt.

Es ſey z. B. der Halbmeſſer der Welle mit Inbegriff der halben Dicke des Seiles, oder a = 9 Zoll, b = 7 Zoll, e und i = $\frac{1}{2}$ Zoll, K = 400 ℔, c = 12 Fuß, $\lambda = \frac{1}{6}$; ſo erhält man $1 + n\lambda = 1{,}0261$, und für den größten Effekt $0{,}3849 \cdot \frac{Kc}{1+n\lambda} =$ 1804,7 ℔. Ferner ſey nun die gegebene Laſt O = 3000 ℔, das Gewicht der Welle G = 600 ℔, ſo wird die vortheilhafteſte Länge des Hebelarmes f = 8,661 + 0,01 = 8,67 Fuß, oder beynahe $8\frac{2}{3}$ Fuß; γ = 0,8; alſo die Geſchwindigkeit der Laſt $a\gamma$ = 0,6 Fuß, und der Effekt $Oa\gamma$ = 1800 ℔.

Berechnung einer Roßmühle.

§. 259.

Die Figur 31. zeigt den einfachen Bau dieſer Maſchine, von deren Einrichtung ich nur das Weſentlichſte,

was nemlich zur richtigen Beurtheilung derſelben allein hinreicht, hier anzuführen für nöthig achte. Durch die ſtehende Welle AB, die man den **Mühlbaum** nennt, gehen horizontale Arme DF, die, wie beym Göpel, durch vorgeſpannte Pferde im Kreiſe fortgezogen werden, und ſolchergeſtalt die Welle umdrehen. Ihre Umdrehung ſetzt ein daran befindliches horizontales Sternrad ECG in Bewegung, das in ein nebenſtehendes Getriebe eingreift, und mit dieſem zugleich den obern beweglichen Mühlſtein oder **Läufer** mn, der mit dem Getriebe an einerley Axe ab, dem **Mühleiſen**, befeſtigt iſt, in Umlauf bringt.

§. 260.

Der hauptſächlichſte Widerſtand, den hier die Kraft zu überwinden hat, und den man mit Herrn **Langsdorf** die Nutzlaſt nennen könnte, entſteht durch das Zerreiben des Kornes zwiſchen dem Läufer, und dem untern unbeweglichen Steine pq. Er iſt nach den vielfältigen Erfahrungen **Belidor's** *) und anderer ſachkundigen Männer von der Geſchwindigkeit unabhängig, und läßt ſich als eine gewöhnliche Reibung anſehen, die durch den Druck des Läufers hervorgebracht wird, und wofür die Verhältnißzahl $\lambda = \frac{1}{35}$ ausmacht. Dieſem zufolge iſt ſein Moment, wenn man das Gewicht des Läufers $= G$, und ſeinen Halbmeſſer $= h$ ſetzt, $= \frac{2}{3}\lambda Gh = \frac{2}{105} Gh$.

Nennt man nun außerdem den Halbmeſſer des

*) Architecture hydraulique, §. 654.

Getriebes $= b$, ſo iſt eine ihm äquipollente Kraft, auf den Umfang deſſelben, oder des damit zuſammenſtoßenden Rades angebracht, $= \frac{2Gh}{105b}$.

§. 261.

Die übrigen Hinderniſſe, die nebenbey durch die Maſchine ſelbſt veranläßt werden, ſind: das Reiben der ſtehenden Zapfen von Welle und Mühleiſen in ihren Pfannen, und der zuſammenſtoßenden Zähne von Rad und Getriebe. Um ſie zu beſtimmen, ſetze man das
Gewicht der Welle und des Rades . . $= M$
das des Mühleiſens . . . . $= N$
die halbe Dicke ihrer Zapfen . . . $= e$ und i,
den Halbmeſſer des Rades . . . $= a$
ſo giebt die Reibung erſterer Art, auf den Umfang des Rades reducirt, daſelbſt eine Kraft $= \frac{2}{3}\lambda \left(\frac{Me}{a} + \frac{Ni}{b}\right)$.
Die letztere hingegen hängt von dem in vorigen §. beſtimmten Widerſtande ab, und iſt, wenn man denſelben $= R$, und die Winkeldiſtanz zweyer Triebſtöcke $= \eta$ ſetzt, von o bis zu λR tang $\frac{1}{2}\eta$ veränderlich; alſo im Mittel $= \frac{1}{2}\lambda R$ tang $\frac{1}{2}\eta$. Außerdem entſteht zwar noch durch die Kraft R tang $\frac{1}{2}\eta$, womit das Rad vom Getriebe gegen die Axe der Welle gedrückt wird, eine Reibung an den Seiten der Zapfen, die aber, auf den Umfang des Rades gebracht, zu der vorhergehenden ſich verhält, wie $e : a$, und folglich dagegen in gar keinen Betracht kommt.

Demnach iſt der geſammte Widerſtand, auf den Umfang des Rades reducirt, $= \frac{2Gh}{105b}(1 + \frac{1}{2}\lambda \text{ tang. } \frac{1}{2}\eta) + \frac{2}{3}\lambda(\frac{Me}{a} + \frac{Ni}{b})$, den wir einſtweilen durch F bezeichnen wollen.

§. 262.

Nach dieſer vorläufigen Betrachtung ſey nun ferner:

die abſolute Kraft von allen den Pferden, die zur Betreibung der Mühle gebraucht werden, zuſammengenommen . . . . . $= K$,
ihre größte Schnelligkeit . . . . . . $= c$,
die Länge des Hebelarmes DF . . . . . $= f$,
die Winkelgeſchwindigkeit des Läufers im Beharrungszuſtande . . . . $= \omega$,

ſo iſt die Geſchwindigkeit eines Punktes am Umfange des Getriebes oder des Rades $= \omega b$; alſo die Winkelgeſchwindigkeit der Welle $= \frac{\omega b}{a}$, und die Geſchwindigkeit der Pferde $= \frac{\omega b f}{a}$, folglich die Kraft, die ſie dabey auf den Zug verwenden können, $= K(1 - \frac{\omega^2 b^2 f^2}{a^2 c^2})$; mithin

$$Kf(1 - \frac{\omega^2 b^2 f^2}{a^2 c^2}) = Fa;$$

woraus die vortheilhafteſte Hebellänge f in doppelter

Hinſicht gefunden werden kann. Einmal nemlich, indem man ſucht, für welchen Werth von f die Geſchwindigkeit ω des Läufers bey gegebener Kraft K ihr Maximum erreicht: dann aber auch, indem man ω als gegeben annimmt, und unter dieſer Bedingung f ſo beſtimmt, daß die verlangte Geſchwindigkeit ω durch die möglichſt kleine Kraft K hervorgebracht wird.

Letztere Vorausſetzung iſt ohne Zweifel dem Zwecke der Maſchine am angemeſſenſten, der bekanntlich, in Hinſicht auf Geſchwindigkeit, eine zu ſchnelle Umdrehung des Läufers durchaus nicht geſtattet; dagen aber mit der möglichſten Erſparung der Kraft recht gut ſich vereinigen läßt.

§. 263.

Wir wollen demnach ω als gegeben anſehen, und nun f ſo zu beſtimmen ſuchen, daß dadurch K ein Minimum wird. Zu dem Ende differenziire man die vorhergehende Gleichung nach f, und nehme dabey, weil $dK = 0$ ſeyn ſoll, ſowohl ω wie auch K als unveränderlich an. Dies giebt ſodann, da f in der Größe F nicht vorkommt:

$$1 - \frac{3\omega^2 b^2 f^2}{a^2 c^2} = 0, \text{ alſo}$$

$$f = \frac{ac}{\omega b\sqrt{3}},$$

woraus nach geſchehener Subſtitution

$$\tfrac{2}{3}Kf = Fa, \text{ oder } K = \frac{3F\omega b\sqrt{3}}{2c} \text{ folgt.}$$

Man ſubſtituire noch für F ſeinen Werth, und ſetze die Verhältnißzahl $\frac{a}{b} = n$, ſo erhält man endlich

$$cK = \frac{\sqrt{3}}{35} \cdot G\omega h \left(1 + \tfrac{1}{2}\lambda \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\eta\right) + (neM + iN) \cdot \lambda\omega\sqrt{3}.$$

$$\text{und } f = \frac{nc}{\omega\sqrt{3}}.$$

§. 264.

Um zu ſehen, ob zur Verminderung der Kraft auch ein vortheilhafteres Verhältniß zwiſchen den Halbmeſſern a und b ſtatt finde, nehme man wieder die anfängliche Gleichung (§. 262.) zu Hülfe, und ſetze darin ſtatt F ſeinen Werth (§. 261.), und außerdem $\frac{a}{b} = n$, ſo wird:

$$Kf\left(1 - \frac{\omega^2 f^2}{n^2 c^2}\right) = \tfrac{2}{105} nGh \left(1 + \tfrac{1}{2}\lambda \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\eta\right) + \tfrac{2}{3}\lambda\,(eM + niN).$$

Damit nun K ein Minimum werde, differenziire man dieſe Gleichung nach n, und betrachte dabey die Größen ω, f, wie auch K als beſtändig, ſo erhält man ferner:

$$\frac{2K\omega^2 f^3}{n^3 c^2} = \tfrac{2}{105} Gh \left(1 + \tfrac{1}{2}\lambda \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\eta\right) + \tfrac{2}{3}\lambda iN,$$

und, wenn man das nfache letzterer Gleichung von der erſtern ſubtrahirt:

$$Kf\left(1 - \frac{3\omega^2 f^2}{n^2 c^2}\right) = \tfrac{2}{3}\lambda eM.$$

Hierin

Hierin noch für f ſeinen vorhin gefundenen Werth $\frac{nc}{\omega\sqrt{3}}$ geſetzt, giebt endlich:

$$o = \tfrac{2}{3}\lambda eM.$$

Da nun ſolchergeſtalt die Zahl n unbeſtimmt bleibt, und es an ſich klar iſt, daß die Kraft K unter eben den Umſtänden am kleinſten ſeyn müßte, wenn die Friktion der Welle ſich gänzlich aufheben ließe; ſo iſt es willkührlich, in welchem Verhältniſſe man die Halbmeſſer a und b annimmt, und die vortheilhafteſte Einrichtung der Mühle beruhet alſo bloß auf folgender Proportion:

$$c : f = \omega\sqrt{3} : n$$

wonach gegenſeitig f aus n, und n aus f gefunden werden kann.

§. 265.

Die angemeſſenſte Geſchwindigkeit des Läufers wird bey unſern deutſchen, flach gehauenen, Mühlſteinen der Erfahrung gemäß zu 24 Rheinl. Fuß am Umfange angenommen. Hiernach würde alſo $h\omega = 24$, und wenn wir $c = 12$ Fuß ſetzen:

$$f = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot nh = 0{,}288675 \cdot nh,$$

$$K = 2\sqrt{3}\left[\tfrac{1}{35}G\left(1 + \tfrac{1}{2}\lambda \tang \tfrac{1}{2}\eta\right) + \frac{\lambda}{h}(neM + iN)\right].$$

Exempel. Es ſey a = 8 Fuß, b = 6 Zoll, oder n = 16; h = 3 Fuß, e = 9 Lin., i = 3 Lin.; G = 2400 ℔, M = 400 ℔, N = 200 ℔; die Anzahl

der Triebſtöcke $= 12$, alſo $\eta = 30^{\circ}$, und endlich $\lambda = \frac{1}{3}$, ſo erhält man zuvörderſt $f = 8\sqrt{3} = 13,8564$ Fuß; ferner

$$\tfrac{1}{2}\lambda \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\eta = 0,04466,\ neM + iN = 404\tfrac{1}{6},\ \text{mithin}$$
$$K = 2\sqrt{3}\,(71,634 + 44,907) = 403,71 ℔,$$

ſo daß alſo ein einzelnes Pferd zur Betreibung der Mühle hinreichend ſeyn würde.

Vom Widerſtande der Luft bey drehender Bewegung.

§. 266.

Fig. 32. **Aufgabe.** Ein Körper dreht ſich mit der Winkelgeſchwindigkeit ϑ um die feſte Axe AB; man ſucht das Moment des Widerſtandes, den die Luft auf ein Element $mnpq = dS$ ſeiner Vorderfläche ausübt.

Aufl. 1) Um die Lage deſſelben zu beſtimmen, fälle man aus einem ſeiner Punkte m auf die Axe das Perpendikel $mO = w$, und lege durch beyde Linien AB und Om eine Ebene AOm, die die Fläche mnpq in mn ſchneiden mag. Dieſe Ebene ſoll in Zukunft die Axenfläche des Elementes heißen.

2) Man errichte ferner auf mn in der Ebene des Elementes das Perpendikel mp, und fälle aus p auf die Axenfläche noch ein zweytes po, ſo iſt pmo der Neigungswinkel beyder Ebenen, den wir $= I$ ſetzen wollen, und op die Richtung, nach der ſich das Element mit der Geſchwindigkeit ϑw in gegenwärtigem Augenblicke bewegt.

3) Indem daſſelbe nach dieſer ſchrägen Richtung fortgeht, liegt offenbar nicht mehr Luftmaſſe vor ihm, die es aus der Stelle zu treiben hat, als gegen ſeine Projektion in der Axenfläche mnov = dS . Cos I ſenkrecht aufſtoßen würde; daher leidet es von der Luft den ſchiefen Druck p = $\lambda \gamma^2 w^2$ Cos IdS.

4) Man zerlege ſelbigen in zwey Kräfte nach den beyden Richtungen pr und pm, wovon erſtere auf die Fläche des Elementes ſenkrecht, letztere damit parallel iſt; ſo erhält man nach pr den normalen Druck p Cos opr = p Cos I, der nur allein die Bewegung verzögern kann, da der andere Druck nach pm der Luft einen freyen Abfluß geſtattet, und folglich ſeine Wirkung gänzlich verliert.

5) Aus dem normalen Widerſtande p Cos I entſpringt ferner noch eine Kraft nach po = p Cos I . Cos opr = p Cos I^2, und eine nach or = p Cos I Sin I. Letztere von dieſen Kräften drückt nach der ſchrägen Richtung um gegen die Axe AB, und wird deshalb aufgehoben; erſtere hingegen ſtrebt den Körper nach der Richtung po, die der ſeinigen entgegengeſetzt iſt, um die Axe zu drehen, und hat gegen ſie das Moment pw Cos I = $\lambda \gamma^2 w^3$ Cos I^3dS.

§. 267.

1) Wenn man ſolchergeſtalt die Momente für alle Elemente der Vorderfläche des Körpers berechnet, und ſie in eine Summe zuſammenfaßt, ſo bekommt man das Moment des geſammten Widerſtandes, den die

Luft ſeiner Umdrehung entgegenſetzt. Man kann es vorläufig durch das Integral $\lambda \mathfrak{v}^2 \int w^3 \text{Cos } I^3 dS$ ausdrücken.

2) Da die Summe $\int w^3 \text{Cos } I^3 dS$ für jeden beſtimmten Körper, der ſich um eine gegebene Axe dreht, von beſtändiger Größe iſt, ſo folgt: **daß das Moment des Widerſtandes der Luft dem Quadrate der Winkelgeſchwindigkeit des Körpers proportional ſey.**

3) Wofern die einzelnen Elemente der Oberfläche des Körpers gegen ihre Axenflächen eine ſenkrechte Lage haben, ſo iſt allenthalben $\text{Cos } I = 0$, mithin auch $\int w^3 \text{Cos } I^3 dS = 0$; woraus der ſchon an ſich natürliche Satz fließt: daß ein von außen rund geformter Körper, der ſich um ſeine centrale Axe dreht, von dem Widerſtande der Luft gänzlich frey ſey. Dergleichen Körper ſind beym Maſchinenweſen z. B. die cylindriſchen Wellen, die Kränze der Räder, die Rollen u. a. m.

4) Fallen dagegen die Elemente der Vorderfläche des Körpers insgeſammt in eine gemeinſchaftliche Axenfläche AOG, ſo iſt durchgängig $\text{Cos } I = 1$, alſo das Moment des Widerſtandes $= \lambda \mathfrak{v}^2 \int w^3 dS$.

5) Von einem Rechtecke, das in dieſe Axenfläche fällt, und deſſen Grundlinie mit der Axe parallel läuft, ſey die Breite $= b$, die Höhe FG $= h$, und der Abſtand CO ſeiner Mitte C von der Axe $= f$. Man denke ſich die ganze Fläche dieſes Rechtecks in lauter unendlich ſchmale, mit der Axe parallele, Streifen $dS = bdx$ getheilt, und ſetze für zwey derſelben, die bey m und n

gleich weit von C abliegen, $Cm = Cn = x$; ſo ſind ihre Entfernungen Om und On von der Axe $= f + x$ und $f - x$, alſo die Momente des Widerſtandes auf beyde zuſammengenommen $= \lambda\gamma^2 b\,(f^3 + 3fx^2)\,dx$, wovon das Integral $= \lambda\gamma^2 bfx\,(f^2 + x^2)$ iſt. Hierin $x = \frac{1}{2}h$ geſetzt, giebt das Moment des geſammten Widerſtandes auf das Rechteck $= \frac{1}{2}\lambda\gamma^2 fbh\,(f^2 + \frac{1}{4}h^2)$.

6) Erſtreckt ſich daſſelbe bis zur Axe hin, ſo iſt $f = \frac{1}{2}h$, folglich wird alsdann das Moment $= \frac{1}{8}\lambda\gamma^2 bh^3$.

§. 268.

Iſt die Oberfläche des Körpers von der Beſchaffenheit, daß man ſie durch eine Gleichung zwiſchen dreyen Koordinaten darſtellen kann, ſo läßt ſich das Integral $\int w^3 \operatorname{Cos} I^3 dS$ auf folgende Art ſehr leicht entwickeln:

Fig. 33. 1) Man ziehe in einer der Axenflächen BAD eine Linie AD nach Gefallen auf die Axe AB ſenkrecht; fälle aus einem Punkte Z der Oberfläche auf die Ebene BAD das Perpendikel ZY, und aus Y auf AD noch ein zweytes AX; ſo daß die Lage des Punktes Z auf die drey rechtwinklichten Koordinaten $AX = x$, $XY = y$, und $YZ = z$ zurückgeführt wird.

2) Die Differenziale dx und dy der erſtern beyden ſchließen bey Y ein Rechteck ein, deſſen Inhalt $= dxdy$ iſt, und wenn man durch deſſen Seiten vier Ebenen ſenkrecht auf die Axenfläche BAD errichtet, ſo wird dadurch an der Oberfläche des Körpers ein vierſeitiges

Element $= dS$ abgeſchnitten, wovon das untere Rechteck die gerade Projektion iſt.

3) Dies vorausgeſetzt, ſey Zq die Normale am Punkte Z der Oberfläche, ihre Länge $= r$, ſo hat man bekanntlich für deren Koordinaten $Ap = x + z \left(\frac{dz}{dx}\right)$, $pq = y + z \left(\frac{dz}{dy}\right)$; ferner $r = \sqrt{(ZY^2 + Yr^2 + rq^2)}$ $= z \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}$, und außerdem dS $= \frac{r}{z} \cdot dxdy$.

4) Man fälle noch aus Z auf die Axe das Perpendikel $ZO = w = \sqrt{(x^2 + z^2)}$, und errichte aus eben dem Punkte auf ZO in der Ebene OYZ, ein anderes Zn, ſo iſt dies auch auf der Axenfläche AOZ des Elementes dS ſenkrecht, und macht folglich mit der Normale Zq des letztern eben den Winkel $qZn = I$, unter dem die beyden Flächen ſelbſt gegeneinander geneigt ſind.

5) Wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke OZY und YZn iſt nun:

$$OY : YZ = YZ : Yn,$$

alſo $Yn = \frac{z^2}{x}$, $nr = z\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{z^2}{x} = z\left[\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{z}{x}\right]$, und da $qr = z\left(\frac{dz}{dy}\right)$, ſo wird

$$nq = z\sqrt{\left[\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 - \frac{2zdz}{xdx} + \frac{z^2}{x^2}\right]}.$$

6) Ferner iſt OY : OZ = ZY : Zn,

alſo $Zn = \frac{wz}{x} = z\sqrt{(1 + \frac{z^2}{x^2})}$, mithin

$$\text{Cos } qZn = \text{Cos I} = \frac{Zq^2 + Zn^2 - nq^2}{2Zq \cdot Zn} = \frac{z}{rw} \cdot [x + z(\frac{dz}{dx})].$$

7) Demnach wird

$$w^3 \text{ Cos I}^3 dS = (\frac{z}{r})^3 [x + z(\frac{dz}{dx})]^3 \cdot (\frac{r}{z}) \, dxdy$$

$$= (\frac{z}{r})^2 [x + z(\frac{dz}{dx})]^3 \, dxdy,$$

und folglich das Moment des geſammten Widerſtandes auf die Fläche des Körpers $= \lambda \gamma^2 \iint (\frac{z}{r})^2 [x + z(\frac{dz}{dx})]^3 \, dxdy$, das nach den veränderlichen Größen x und y ſo weit genommen werden muß, als ſich der Theil der Oberfläche erſtreckt, der nach der Seite, wohin die Umdrehung geſchieht, der Luft zugekehrt iſt.

§. 269.

1. Zu eben dem Reſultate wird man auf einem noch weit kürzeren Wege durch folgende Betrachtung geleitet:

Da der Druck der Luft auf das Element dS nach deſſen Normale Zq geſchieht, und eine Kraft ſtets einerley Wirkung ausübt, ſie mag auf einen Punkt ihrer Richtung hinverlegt werden, wohin man will (Statik Kap. II.); ſo iſt es gleichgültig, ob das gedachte Element in Z, oder in jedem andern Punkte der Normale

Zq ſich befindet, wofern nur ſeine Lage immer ſenkrecht darauf bleibt. Wir wollen demnach ſetzen, es läge bey q; ſo wäre nunmehr die Ebene BAD ſeine Axenfläche, und ſein Neigungswinkel I gegen dieſelbe = dem Winkel YZq, den die Normalen beyder Flächen mit einander machen; alſo $\text{Cos}\, I = \frac{ZY}{Zq} = \frac{z}{r}$. Ferner ſeine Entfernung von der Axe $= Ap = x + z\left(\frac{dz}{dx}\right)$, und endlich ſeine Projektion auf die Ebene BAD $= dS\, \text{Cos}\, I = dxdy$, mithin $w^3\, \text{Cos}\, I^3 ds = w^3\, \text{Cos}\, I^2 dxdy = \left(\frac{r}{z}\right)^2 \left[x + z\left(\frac{dz}{dx}\right)\right]^3 dxdy$, wie vorhin.

2. Um die Normale r aus der Formel wegzuſchaffen, ſetze man $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = q$, ſo wird $r = z\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$. Dieſen Werth für r ſubſtituirt, giebt das Moment des Widerſtandes: $= \lambda \gamma^2 \iint \frac{(x + pz)^3\, dxdy}{1 + p^2 + q^2}$.

§. 270.

Exempel I. Eine Kugel vom Halbmeſſer = a dreht ſich mit der Winkelgeſchwindigkeit γ um eine Axe, die von ihrem Mittelpunkte um die Weite = f entfernt liegt; man ſucht das Moment des Widerſtandes, den die Luft ihr entgegenſetzt.

1) Man laſſe die Abſciſſenlinie AD durch ihren Mittelpunkt gehen, und nehme in dieſem zugleich den

Anfangspunkt der Abſciſſen x an, ſo hat man für die Oberfläche der Kugel die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

welche nach x differenziirt, $x + z\left(\frac{dz}{dx}\right) = o$, oder $\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{x}{z}$ giebt.

2) Für dieſe Annahme iſt aber die in der Formel mit x bezeichnete Abſciſſe $Ap = f + x$, folglich das dortige Integral $= \iint \left(\frac{z}{r}\right)^3 [f + x + z\left(\frac{dz}{dx}\right)]^3 dxdy$, das ſich nach verrichteter Subſtitution, da außerdem $r = a$ iſt, in $\frac{f^3}{a^2} \iint (a^2 - x^2 - y^2)\, dxdy$ verwandelt.

3) Man integrire nun zuerſt nach y, ſo erhält man $[(a^2 - x^2) y - \frac{1}{3} y^3]\, dx$, und darin $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ geſetzt, giebt $\frac{2}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx$, oder, wenn man y in dieſer Bedeutung beybehält: $\frac{2}{3} y^3 dx$.

4) Ferner iſt $\int y^3 dx = \frac{1}{4} y^3 x + \frac{3}{4} a^2 \int y dx$ (§. 206. 5.), nnd ſowohl für $x = a$, als $x = -a$, $y = o$, $\int y dx = \frac{1}{4} \pi a^2$; alſo das Moment des Widerſtandes auf das Viertel der vordern Halbkugel $= \lambda \gamma^2 . \frac{2f^3}{3a^2} . \frac{3}{16} \pi a^4 = \frac{1}{8} \lambda \gamma^2 \pi a^2 f^3$, und folglich auf die ganze vordere Halbkugelfläche $= \frac{1}{2} \lambda \gamma^2 \pi a^2 f^3$.

5) Nennt man die Geſchwindigkeit ihres Mittelpunktes $= u$, ſo wird $u = \gamma f$; alſo das gefundene Moment auch $= \frac{1}{2} \lambda \pi a^2 u^2 f$. Hieraus erhellet: **daß eine Kugel, die ſich um irgend eine feſte Axe dreht,**

von der Luft eben den Widerſtand leide, als wenn ſie mit der Geſchwindigkeit, die ihr Mittelpunkt dabey hat, in gerader Linie fortrückte.

§. 271.

II. Es ſey die centrale Axe eines Cylinders mit ſeiner Umdrehungsaxe parallel; ihr Abſtand davon $= f$, der Halbmeſſer des Cylinders $= a$, ſeine Länge $= b$, und die Winkelgeſchwindigkeit deſſelben $= \gamma$; man ſucht das Moment des Widerſtandes, den die Luft auf ſeine Vorderfläche ausübt.

1) Man laſſe die Abſciſſenlinie AD durch den Mittelpunkt ſeiner Grundfläche gehen, und ſetze in ihn zugleich den Anfangspunkt der Abſciſſen x; ſo hat man, weil x und z die Koordinaten ſeiner Querſchnitte ſind:

$x^2 + z^2 = a^2$, folglich $x + z\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$.

2) Wegen dieſer Vorausſetzung iſt aber wiederum das, was in der Formel x genannt iſt, hier $= f + x$; alſo das Integral $= \iint \left(\frac{z}{r}\right)^2 . [f + x + z\left(\frac{dz}{dx}\right)]^3$ $dxdy = \frac{f^3}{a^2}\iint z^2 dxdy$.

3) Da z nicht von y abhängt, ſo giebt die erſte Integration, wobey bloß y als veränderlich betrachtet wird: $\frac{f^3}{a^2} . y\int z^2 dx$, und darin $y = b$ geſetzt, erhält man $\frac{f^3 b}{a^2}\int z^2 dx$.

4) Ferner wird $\int z^2 dx = \int (a^2 - x^2)\, dx = C + a^2x - \frac{1}{3}x^3$, und da dies für $x = -a$ verſchwinden muß, $C = \frac{2}{3}a^3$; alſo der vollſtändige Werth von $\int z^2 dx$ für $x = a$, $= \frac{2}{3}a^3 + \frac{2}{3}a^3 = \frac{4}{3}a^3$, und folglich das verlangte Moment des Widerſtandes $= \frac{4}{3}\lambda \gamma^2 abf^3$.

§. 272.

III. Der Cylinder ſtehe auf ſeiner Umdrehungsaxe ſenkrecht; ſeine Höhe ſey $= f$, der Halbmeſſer ſeiner Grundfläche $= a$, und die Winkelgeſchwindigkeit $= \gamma$. Man fragt nach dem Momente des Widerſtandes.

1) Man nehme die Abſciſſenlinie in ſeiner centralen Axe, und den Anfangspunkt der Abſciſſen im Mittelpunkte ſeiner Grundfläche an, ſo ſind jetzt y und z die Koordinaten der Querſchnitte, folglich iſt $y^2 + z^2 = a^2$, und $\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$.

2) Daher wird das Integral $\iint \left(\frac{z}{r}\right)^2 [x + z \left(\frac{dz}{dx}\right)]^3 dxdy = \frac{1}{a^2}\iint x^3 z^2 dxdy$.

3) Nun hat man zuvörderſt, wie im vorhergehenden Falle, $\int z^2 dy = \frac{4}{3}a^3$; mithin $\frac{1}{a^2}\iint x^3 z^2 dxdy = \frac{4}{3}a\int x^3 dx = \frac{1}{3}ax^4$. Hierin $x = f$ geſetzt, giebt das Moment des geſammten Widerſtandes $= \frac{1}{3}\lambda \gamma^2 af^4$.

§. 273.

Da die Umdrehungen um feſte Axen ſtets einerley, und zwar ſehr beſchränkten, Raum erfordern, ſie mögen

ſchnell oder langſam geſchehen, ſo gewähren ſie ein weit bequemeres und ſicheres Mittel, Beobachtungen über den Widerſtand der Luft anzuſtellen, als das Fallen der Körper, oder andere fortrückende Bewegungen. Derſgleichen Verſuche beſchreibt **Charles Hutton** in den Transact. of the Roy. Soc. of Edinburgh Vol. II. pag. 29., wobey er folgende Einrichtung getroffen hat: Fig. 31. An der ſtehenden Welle AB iſt ein langer horizontaler Hebelarm DF befeſtigt, und auf deſſen äußerſtes Ende D der Körper angebracht, womit der Verſuch gemacht werden ſoll. Vom Umfange der Welle geht eine Schnur über die Rolle K zu einem Gewichte, das beym Herabſinken die Schnur abwickelt, und ſo die Welle umdreht. Anfangs wird nun zwar die Bewegung von dem Gewichte beſchleunigt: aber eben dadurch auch der Widerſtand der Luft auf die Fläche des Körpers vermehrt, ſo daß derſelbe binnen kurzer Zeit mit dem Gewichte ins Gleichgewicht tritt, und alsdann die fernere Beſchleunigung verhindert. Sobald man wahrnimmt, daß dies bereits geſchehen ſey, wird die Zeit von mehreren Umläufen der Welle mit einer Sekundenuhr beobachtet, und daraus ein Mittel für die Winkelgeſchwindigkeit derſelben hergenommen. Wir wollen ſetzen, ſie ſey in einer Zeit von t Sek. nmal herumgekommen, und ihre Winkelgeſchwindigkeit dabey $= \gamma$, ſo hat man:

$$\gamma : 2n\pi = 1 : t,$$

woraus γ deſto richtiger gefunden wird, je mehr Umläufe man zu Hülfe nimmt.

Um die Friktion an der Welle, und den Widerſtand der Luft auf den Hebelarm DF in Rechnung zu bringen, wird ſowohl der Körper als das Gewicht von der Maſchine abgenommen, und nun ſo viel kleineres Gewicht an die Schnur gehängt, daß dadurch der ledige Arm zuletzt die vorige Geſchwindigkeit bekommt. Dies iſt nun freylich bey einem einzelnen Verſuche ſchwer zu treffen: aber wenn man deren mehrere nach einander mit verſchiedenen Gewichten angeſtellt hat, ſo kann man doch für jede verlangte Geſchwindigkeit das erforderliche Gewicht durch Interpolation mit ziemlicher Genauigkeit beſtimmen.

§. 274.

Es ſey nun im Beharrungszuſtande der Bewegung die Winkelgeſchwindigkeit der Welle $= \gamma$, ihr Halbmeſſer $= b$, das Moment des Widerſtandes der Luft auf die vordere Seite des Körpers $= \lambda \gamma^2 M$, auf den Hebelarm $= \lambda \gamma^2 m$, das angehängte Gewicht $= P$, das Moment der dadurch bewirkten Friktion an der Seite des Zapfen $= Pe$, und das Moment der Friktion, die vom Gewichte der Welle herrührt $= Ge$, ſo erhält man:

$$Pb = \lambda \gamma^2 (M + m) + e(G + P),$$

und wenn p das Gewicht heißt, wodurch der bloße Hebelarm dieſelbe Geſchwindigkeit γ bekommt, nachdem die Umdrehung gleichförmig geworden iſt, ſo wird ferner:

$$pb = \lambda \gamma^2 m + e(G + p).$$

Dies vom erſtern abgezogen, bleibt

$$(P-p)\,b = \lambda\,\gamma^2 M + e\,(P-p)$$

woraus $$\lambda = \frac{(P-p)\,(b-e)}{M\gamma^2}$$ folgt.

Herr Hutton nahm zu ſeinen Verſuchen eine Halbkugel von Pappe, wovon er bald die Grundfläche, bald die konvexe Seite vorangehen ließ, und ſo den Widerſtand der Luft auf zweyerley Flächen zugleich, die ebene und die ſphäriſche, erhielt. Wir wollen hier nur den letztern Fall betrachten, wofür $M = \frac{1}{2}\pi a^2 f^3$ iſt (§. 270.); dies in die vorhergehende Formel ſubſtituirt, und auſſerdem die Geſchwindigkeit des Mittelpunkts der Halbkugel $\gamma f = v$ geſetzt, giebt:

$$\lambda = \frac{2\,(P-p)\,(b-e)}{\pi a^2 v^2 f}.$$

Ferner war bey ihm die Länge des Arms $f = 53{,}34$ engl. Zoll, der Halbmeſſer der Halbkugel $a = 3\frac{3}{16}''$, und der Halbmeſſer der Welle, mit Inbegriff der halben Dicke des Fadens, $b = 1{,}043''$. Die Dicke des Zapfens iſt nicht angegeben, ſondern nur die Bemerkung gemacht, daß er ſich an Friktonsrädern drehete, wodurch alſo die Seitenfriktion ſehr vermindert, und folglich e höchſt unbedeutend werden mußte; ſo daß man es aus der Rechnung ſicher weglaſſen kann. Dies vorausgeſetzt, erhält man nun, wenn man a in Rheinl. Fußen ausdrückt, $\log \frac{2b}{\pi a^2 f} = 0{,}2717188 - 1$, und dazu $\log\left(\frac{P-p}{v^2}\right)$ addirt, giebt alsdann $\log \lambda$. Auf

ſolche Art ſind für nachſtehende Gewichte, und die daraus erfolgten Geſchwindigkeiten der Halbkugel die daneben befindlichen Werthe von λ berechnet, die ich aber, wie im Kap. IV. auf rheinl. Fußmaaß und die Gewichtseinheit ℔ bezogen habe:

v Engl. Fuß.	P Unzen.	p Unzen.	P−p Unzen.	λ
10	16,2	3,8	12,4	0,0015352
12	22,6	5,1	17,5	0,0015048
14	30,6	6,5	24,1	0,0015524
16	40,0	7,9	32,1	0,0015223
18	51,0	9,5	41,5	0,0015858
20	64,0	11,0	53,0	0,0016410

Dieſe Koefficienten ſtimmen unter ſich, wie man ſieht, ziemlich genau überein, wiewohl ſie von denen, die wir (§. 94.) aus den Hawksbeeſchen Verſuchen hergeleitet haben, beynahe um ein Fünftel ihres Werthes abweichen: wovon aber die Schuld in Verſchiedenheit der Barometerhöhen, ungleicher Temperatur, und andern Nebenumſtänden ſehr wohl liegen kann.

Neuntes Kapitel.

Von den freyen Axen feſter Körper.

---

§. 275.

Fig. 23. Es ſey AB eine unbewegliche Axe, um die ſich ein feſter Körper mit der Winkelgeſchwindigkeit γ gleichförmig dreht; Z der Ort eines ſeiner Elemente, deſſen Maſſe wir $= dM$ ſetzen wollen, und ſeine ſenkrechte Entfernung ZO von der Axe $= r$; ſo iſt die Geſchwindigkeit, womit es ſich im Kreiſe um den Punkt O herum bewegt, $= \gamma r$ (§. 197.), und folglich die Schwungkraft, die es dadurch bekommt, $= \frac{\gamma^2 r^2 dM}{2gr}$ (§. 61.) $= \frac{\gamma^2}{2g} . rdM$. Mit dieſer Kraft ſtrebt alſo das Element ſich von O zu entfernen, und da dies wegen der Feſtigkeit des Körpers nicht möglich iſt, den Punkt O nach der Richtung OZ mit ſich fortzureißen.

Eine ähnliche Kraft wird auf den Punkt O durch jedes andere Element verübt, das ſich in der Umdrehungsebene ZOz befindet, und was von dieſem einzelnen Punkte der Axe gilt, erſtreckt ſich auch auf alle übrigen Punkte derſelben, ſo daß die ganze Axe, während der Körper ſich um ſie dreht, einer beſtändigen Gewalt ausgeſetzt iſt, die allein durch die Umdrehung des Körpers und den damit verbundenen Kreislauf ſeiner einzelnen Elemente bewirkt wird.

§. 276.

Aufgabe. Ein feſter Körper von gegebener Geſtalt und Größe dreht ſich mit der Winkelgeſchwindigkeit γ gleichförmig um die Axe IA; man ſucht die Kräfte, womit die Axe gehalten werden muß, damit ſie nicht aus ihrer Lage rücke.

Fig. 34. Aufl. 1) Man errichte aus einem beliebigen Punkte I derſelben zwey Linien IB und IC, ſowohl unter ſich als auf die Axe, ſenkrecht, und ziehe dieſen für ein Element des Körpers bey Z, deſſen Maſſe dM heißen mag, die Koordinaten $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ parallel; ſo iſt ZXY die Umdrehungsebene des Punktes Z, alſo XZ ſeine ſenkrechte Entfernung von der Axe, und wenn dieſe $= r$ geſetzt wird, ſeine Geſchwindigkeit $= \gamma r$; folglich die Schwungkraft der Maſſe $dM = \frac{\gamma^2}{2g} . rdM$, die dem Punkt X der Axe nach der Richtung XZ fortzuziehen ſtrebt.

2) Man zerlege ſie in zwey andere Kräfte nach den beyden mit IB und IC parallelen Richtungen XY und XV, ſo erhält man nach XY die Kraft $\frac{\gamma^2}{2g} . rdM . \text{Cos}\, ZXY = \frac{\gamma^2}{2g} . ydM$, und nach XV die Kraft $\frac{\gamma^2}{2g} . rdM\ \text{Sin}\, ZXY = \frac{\gamma^2}{2g} . zdM$.

3) Auf ſolche Art entſpringen alſo aus allen den Schwungkräften der einzelnen Elemente im Körper zweyerley Kräfte, deren Richtungen mit IB und IC pa=

rallel ſind, und die ſich folglich auf zwey einfache, nach eben den Richtungen wirkende, Kräfte zurückführen laſſen.

4) Es ſey E der gemeinſchaftliche Schwerpunkt aller der parallelen Kräfte $\frac{\gamma^2}{2g}$. ydM, worin ihre Summe $\frac{\gamma^2}{2g}\int ydM$ nach Ee, parallel IB, angebracht, ihnen äquipollent iſt; ſeine Entfernung IE von I = f, ſo erhält man:

$$\frac{\gamma^2 f}{2g}.\int ydM = \frac{\gamma^2}{2g}\int xydM, \text{ folglich } f = \frac{\int xydM}{\int ydM}.$$

5) Ferner ſey F der Punkt, worin alle die parallelen Kräfte $\frac{\gamma^2}{2g}$. zdM nach der mittlern Richtung Ff in eine Summe $\frac{\gamma^2}{2g}\int zdM$ gebracht werden können, und ſeine Entfernung IF von I = h, ſo wird gleichergeſtalt:

$$\frac{\gamma^2 h}{2g}\int zdM = \frac{\gamma^2}{2g}\int xzdM, \text{ mithin } h = \frac{\int xzdM}{\int zdM}.$$

6) Es wird demnach die geſammte Wirkung der Schwungkräfte auf die Axe durch die beyden Kräfte P $= \frac{\gamma^2}{2g}\int ydM$ und Q $= \frac{\gamma^2}{2g}\int zdM$, wenn man ſie in E und F nach den entgegengeſetzten Richtungen eE und fF anbringt, aufgehoben, und folglich die Axe durch ſie verlangtermaaßen in Ruhe erhalten.

§. 277.

Man kann auch noch jede der beyden Kräfte P und Q auf zwey gegebene Punkte der Axe vertheilen, und dadurch finden, welche Gewalt die Axe in dieſen beyden Punkten von den Schwungkräften des Körpers leiden muß, wenn ſie daſelbſt gehalten, oder durch feſte Ringe eingeſchloſſen wird. Wir wollen ſetzen, es ſeyen in I und A die Kräfte R, S, parallel mit IB, der Kraft P, und in eben den Punkten die Kräfte V, W, parallel mit IC, der Kraft Q äquipollent, ſo iſt zuvörderſt

$$P = R + S,\ Q = V + W$$

und, wenn wir IA = a, IE = f, IF = h nennen:

$$Rf = S(a - f),\ Vh = W(a - h),$$

alſo $Sa = (R + S)f = Pf;\ S = \frac{Pf}{a},\ R = P(1 - \frac{f}{a}),$

$$Wa = (V + W)h = Qh;\ W = \frac{Qh}{a}, V = Q(1 - \frac{h}{a}),$$

oder, für P, Q, f und h ihre Werthe ſubſtituirt:

$$R = \frac{\gamma^2}{2ag}(a\int ydM - \int xydM),\ S = \frac{\gamma^2}{2ag}\int xydM,$$

$$V = \frac{\gamma^2}{2ag}(a\int zdM - \int xzdM),\ W = \frac{\gamma^2}{2ag}\int xzdM.$$

§. 278.

Von dieſen vier Kräften ſind R und S im Punkte I, ſo wie V und W im Punkte A ſenkrecht aufeinander; ſie können ſich alſo nie gegen einander aufheben, oder, die Kräfte, die aus ihrer Zuſammenſetzung entſpringen, können nie = o ſeyn, wofern nicht jede für

ſich genommen $= 0$ iſt. Soll demnach die vereinigte Wirkung aller Schwungkräfte auf die Axe verſchwinden, ſo muß ſolches auch bey den vier Kräften R, S, V, W, einzeln genommen, nothwendig der Fall ſeyn. Man hat alſo unter dieſer Vorausſetzung zuerſt:

$$\int xy\,dM = 0, \int xz\,dM = 0,$$

und weil dadurch $R = \frac{\gamma^2}{2g}\int y\,dM$, $V = \frac{\gamma^2}{2g}\int z\,dM$ wird, und dieſe beyden Kräfte ebenfalls verſchwinden müſſen, ſo erhält man ferner

$$\int y\,dM = 0, \int z\,dM = 0.$$

§. 279.

Man nennt eine ſolche Axe, die, während der Körper ſich um ſie dreht, von den Schwungkräften ſeiner Theile keine Gewalt leidet, eine **freye** Axe des Körpers. Sie iſt nach vorigem §. folgenden Bedingungen unterworfen:

Fig. 27. 1. Wenn man ſie zur Abſciſſenlinie der Ordinaten $Op = x$ annimmt, ſo müſſen zuvörderſt die Integrale $\int y\,dM$ und $\int z\,dM$ durch den ganzen Körper genommen, beyde $= 0$ ſeyn. Da nun für den Schwerpunkt g des Körpers die Ordinate $ef = \frac{\int y\,dM}{M}$, und $fg = \frac{\int z\,dM}{M}$ iſt, ſo folgt: daß eine Axe des Körpers nicht frey ſeyn könne, wofern ſie nicht durch ſeinen Schwerpunkt geht.

2. Außerdem wird auch noch erfordert, daß ſowohl das Integral $\int xy\,dM$, wie auch $\int xz\,dM = 0$ ſey.

§. 280.

Ein feſter Körper, der um eine freye Axe eine Umdrehung bekommt, und dabey von keiner fremden Kraft getrieben wird, ſetzt dieſe Umdrehung um ſie mit der einmal erhaltenen Winkelgeſchwindigkeit unverändert fort: die Axe aber bleibt unbeweglich, gleichſam wie eine feſte Axe, in ihrer anfänglichen Lage, ohne daß irgend eine Kraft, ſie zu halten, erfordert würde.

Da nemlich keine äußern Kräfte auf die Axe wirken, und ſie, als freye Axe, auch keine Gewalt von den Schwungkräften leidet, die durch die Umdrehung des Körpers um ſie hervorgebracht werden; ſo folgt nothwendig, daß ſie in Ruhe bleiben, und der Körper fortfahren müſſe, ſich um ſie, wie um eine feſte Axe zu drehen.

Hierbey bewegt ſich jedes ſeiner Elemente in einem auf die Axe ſenkrechten Kreiſe, und iſt während dieſer Bewegung keiner andern Kraft, als der Centralkraft ausgeſetzt, die bloß verhindert, daß es ſich nicht von ſeinem Mittelpunkte entferne, alſo in ſeiner Geſchwindigkeit keine Aenderung bewirkt; daher denn auch der ganze Körper ſeine anfängliche Winkelgeſchwindigkeit unverändert beybehält.

§. 281.

Fig. 35. **Aufgabe.** Die Lage einer freyen Axe IG im Körper gegen drey Linien IA, IB und IC zu beſtimmen, die ſich in ſeinem Schwerpunkte I ſenkrecht durchſchneiden.

Aufl. 1) Eine Ebene durch IG und IC gelegt, ſteht auf der Ebene AIB ſenkrecht, und wenn alſo beyde in IF ſich ſchneiden, ſo wird durch die Winkel AIF = η, und FIG = ϑ die Lage der Axe IG verlangtermaßen beſtimmt. Es kommt alſo darauf an, die Werthe dieſer Winkel aus Größen, die aus der Beſchaffenheit des Körpers bekannt ſind, herzuleiten.

2) Man ziehe mit IA, IB und IC für ein Element dM bey Z die Koordinatan IX = x, XY = y, YZ = z parallel, und nehme an, daß zwiſchen dieſen für Punkte in der Oberfläche eine Gleichung gegeben ſey. Da ſie aber auf die Axe IG weiter keinen Bezug haben, fälle man ZY′ auf die Ebene CIF, nnd in derſelben Y′X′ auf IG ſenkrecht, und ſetze IX′ = x′, X′Y′ = y′, Y′Z = z′, ſo hat man als Bedingungsgleichungen der freyen Axe IG:

$$\int x'y'dM = 0, \int x'z'dM = 0.$$

Die andern beyden (§. 279. 1.) liegen ſchon in der Vorausſetzung, daß IG und IA im Schwerpunkte I des Körpers zuſammentreffe, und folglich dieſer Punkt in IG hineinfalle.

3) Um die Koordinaten x′, y′ und z′ auf die drey erſtern zurückzuführen, fälle man noch in der Ebene CIF aus Y′ auf IF das Perpendikel Y′W, und ziehe YW, ſo entſteht dadurch das Parallellogram YZY′W: denn Y′W iſt auf AIB ſenkrecht (1), folglich mit ZY parallel, und ZY′, YW ſind beyde auf Y′W ſenkrecht; erſteres, weil es auf der Ebene CIF ſenkrecht iſt; letzteres, weil es in der Ebene AIB liegt, worauf Y′W

ſenkrecht ſteht; alſo ſind auch ZY′ und YW parallel. Es iſt daher:

$$Y'W = ZY = z, \text{ und } YW = ZY' = z'.$$

4) Es ſey nun o der Durchſchnitt von XY und IF, ſo iſt im rechtwinklichten Dreyecke IoX

$$Io = \frac{IX}{\text{Cos}\,\eta} = \frac{x}{\text{Cos}\,\eta},\ Xo = x \text{ tang}\,\eta,$$

und da im Dreyecke YOW der Winkel bey W ebenfalls ein rechter iſt:

$$Yo = \frac{YW}{\text{Cos}\,\eta} = \frac{z'}{\text{Cos}\,\eta},\ Wo = z' \text{ tang}\,\eta.$$

Folglich $y = Xo + oY = x \text{ tang}\,\eta + \frac{z'}{\text{Cos}\,\eta}$, oder $z' = y \text{ Cos}\,\eta - x \text{ Sin}\,\eta$; und $IW = Io + oW = \frac{x}{\text{Cos}\,\eta} + z' \text{ tang}\,\eta = y \text{ Sin}\,\eta + x \left(\frac{1 - \text{Sin}\,\eta^2}{\text{Cos}\,\eta}\right) = x \text{ Cos}\,\eta + y \text{ Sin}\,\eta.$

5) Ferner ſey q der Durchſchnitt der Linie Y′W mit der Axe IG, ſo hat man im rechtw. ΔIqW

$$Iq = \frac{IW}{\text{Cos}\,\vartheta} = \frac{x \text{ Cos}\,\eta + y \text{ Sin}\,\eta}{\text{Cos}\,\vartheta},\ qW = IW \text{ tang}\,\vartheta = (x \text{ Cos}\,\eta + y \text{ Sin}\,\eta) \text{ tang}\,\vartheta$$

und in dem daranſtoßenden rechtw. ΔX′qY′:

$$X'q = X'Y' \text{ tang}\,\vartheta = y' \text{ tang}\,\vartheta,\ Y'q = \frac{X'Y'}{\text{Cos}\,\vartheta} = \frac{y'}{\text{Cos}\,\vartheta},$$

mithin $z = Y'q + qW = \frac{y'}{\text{Cos}\,\vartheta} + (x \text{ Cos}\,\eta + y \text{ Sin}\,\eta) \text{ tang}\,\vartheta$, oder

$$y' = z \text{ Cos}\,\vartheta - (x \text{ Cos}\,\eta + y \text{ Sin}\,\eta) \text{ Sin}\,\vartheta$$

und endlich $x' = Iq + qX' = \frac{x \cos\eta + y \sin\eta}{\cos\vartheta} + y' \tan\vartheta = z \sin\vartheta + (x \cos\eta + y \sin\eta) \cos\vartheta.$

6) Man ſetze noch zur Abkürzung $x \cos\eta + y \sin\eta = u$, ſo wird $x' = z \sin\vartheta + u \cos\vartheta$, und $y' = z \cos\vartheta - u \sin\vartheta$, folglich $x'y' = (z^2 - u^2) \sin\vartheta \cos\vartheta + uz\,(1 - 2 \sin\vartheta^2) = \frac{1}{2} \sin 2\vartheta\,(z^2 - u^2) + \cos 2\vartheta \,.\, uz$; daher verwandelt ſich die erſte Gleichung (2) in:

$$\cos 2\vartheta \int uz\,dM - \tfrac{1}{2} \sin 2\vartheta \int (u^2 - z^2)\,dM = 0,$$

woraus $\tan 2\vartheta = \frac{2\int uz\,dM}{\int (u^2 - z^2)\,dM}$ folgt,

und die zweyte in:

$$\sin\vartheta \int zz'\,dM + \cos\vartheta \int uz'\,dM = 0,$$

welche $\tan\vartheta = \frac{-\int uz'\,dM}{\int zz'\,dM}$ giebt.

7) Hierin für u und z' (4.) ihre Werthe geſetzt, erhält man:

$$\int uz\,dM = \cos\eta \int xz\,dM + \sin\eta \int yz\,dM$$

$$\int (u^2 - z^2)\,dM = \cos\eta^2 \int x^2\,dM + 2 \cos\eta \sin\eta \int xy\,dM + \sin\eta^2 \int y^2\,dM - \int z^2\,dM$$

$$\int uz'\,dM = \sin\eta \cos\eta \int (y^2 - x^2)\,dM + (\cos\eta^2 - \sin\eta^2) \int xy\,dM.$$

$$\int zz'\,dM = \cos\eta \int yz\,dM - \sin\eta \int xz\,dM,$$

lauter Ausdrücke, in denen der unbekannte Winkel η mit Integralgrößen verbunden iſt, die ſich aus der zwiſchen x, y und z gegebenen Gleichung leicht berechnen laſſen. Unter dieſer Vorausſetzung nenne man:

$$\int x^2 dM = A,\ \int y^2 dM = B,\ \int z^2 dM = C,$$
$$\int xy dM = D,\ \int xz dM = E,\ \int yz dM = F,$$

ſo wird:

$$\text{tang}\, 2\vartheta = \frac{2E\ \text{Cos}\,\eta + 2F\ \text{Sin}\,\eta}{A\ \text{Cos}\,\eta^2 + B\ \text{Sin}\,\eta^2 - C + 2D\ \text{Sin}\,\eta\ \text{Cos}\,\eta},$$

und

$$\text{tang}\, \vartheta = \frac{(B - A)\ \text{Sin}\,\eta\ \text{Cos}\,\eta + D\,(\text{Cos}\,\eta^2 - \text{Sin}\,\eta^2)}{E\ \text{Sin}\,\eta - F\ \text{Cos}\,\eta}.$$

8) Nach der bekannten Formel: $\text{tang}\, 2\vartheta = \frac{2\ \text{tang}\, \vartheta}{1 - \text{tang}\, \vartheta^2}$ könnten nun dieſe beyden Werthe unmittelbar mit einander verglichen werden; weil aber die Rechnung etwas mühſam iſt, ſo ſetze man zuvor nach $\text{tang}\, \vartheta = \frac{m}{n}$, $\text{tang}\, 2\vartheta = \frac{2p}{q}$; hierdurch bekommt man $p\,(n^2 - m^2) = mnq$, oder $pn^2 = m\,(mp + nq)$, und wenn man für m, n, p und q jetzt ihre Werthe ſubſtituirt:

$$mp + nq = E\,(B\ \text{Sin}\,\eta - C\ \text{Sin}\,\eta + D\ \text{Cos}\,\eta) - F\,(A\ \text{Cos}\,\eta - C\ \text{Cos}\,\eta + D\ \text{Sin}\,\eta),$$

alſo:

$$(E\ \text{Cos}\,\eta + F\ \text{Sin}\,\eta)\,(E\ \text{Sin}\,\eta - F\ \text{Cos}\,\eta)^2 = [(B - A)\ \text{Sin}\,\eta\ \text{Cos}\,\eta + D\,(\text{Cos}\,\eta^2 - \text{Sin}\,\eta^2)] \times [E\,(B\ \text{Sin}\,\eta - C\ \text{Sin}\,\eta + D\ \text{Cos}\,\eta) - F\,(A\ \text{Cos}\,\eta - C\ \text{Cos}\,\eta + D\ \text{Sin}\,\eta)].$$

9) Beyderſeits noch durch Cos η und Cos η^2 dividirt, und dann tang $\eta = t$ geſetzt, giebt ferner:

$$(E + Ft)\,(F - Et)^2 = [D + (B - A)\,t - Dt^2] \cdot [DE - AF + CF + (BE - CE - DF)$$

t], oder wenn man dieſe Gleichung nach den Potenzen von t ordnet:

$$
\begin{aligned}
o = & (F^2 - D^2) E + (A - C) DF \\
& + t (F^3 - (2E^2 - D^2) F + (A - 2B + C) DE - \\
& \quad (A - B)(A - C) F) \\
& + t^2 (E^3 - (2F^2 - D^2) E + (B - 2A + C) \\
& \quad DF + (A - B)(B - C) E) \\
& + t^3 [(E^2 - D^2) F + (B - C) DE].
\end{aligned}
$$

10) Hat man daraus den Werth von t, alſo den Winkel ν, bereits gefunden, ſo wird dann auch (7)

$$\text{tang}\, \vartheta = \frac{\frac{1}{2}(B - A) \text{Sin}\, 2\nu + D\, \text{Cos}\, 2\nu}{E\, \text{Sin}\, \nu - F\, \text{Cos}\, \nu}.$$

§. 282.

Die kubiſche Gleichung (9) hat wenigſtens eine mögliche Wurzel, und folglich der Körper zum mindeſten eine freye Axe. Um zu erfahren, ob es deren noch mehrere in ihm geben müſſe, nehme man die ſchon gefundene freye Axe jetzt zur Abſciſſenlinie IA der Ordinaten IX = x an; lege durch ſie nach Gefallen die Ebene BIA, und ſuche eine Gleichung für die Oberfläche des Körpers zwiſchen IX = x, XY = y, YZ = z; ſo iſt nunmehr: $\int xy dM = D = o$, $\int xz dM = E = o$.

Setzt man alſo für eine andere freye Axe IG, deren Lage nach jener beſtimmt werden ſoll, wie vorhin, die Winkel AIF = ν, FIG = ϑ, ſo wird in den beyden Gleichungen (6) gegenwärtig:

$\int uz dM = F\, \text{Sin}\, \nu$	$\int zz' dM = F\, \text{Cos}\, \nu$
$\int (u^2 - z^2) dM = A\, \text{Cos}\, \nu^2 + B\, \text{Sin}\, \nu^2 - C$	$\int uz' dM = (B - A)\, \text{Sin}\, \nu\, \text{Cos}\, \nu$,

wodurch ſie folgende Geſtalt bekommen:

$$(A \cos\eta^2 + B \sin\eta^2 - C) \sin 2\vartheta - 2F \sin\eta \cos 2\vartheta = 0$$

$$(A-B) \sin\eta \cos\eta \cos\vartheta - F \cos\eta \sin\vartheta = 0.$$

Da letztere den Faktor $\cos\eta$ hat, ſo folgt aus ihr $\cos\eta = 0$, $\eta = 90°$. Dies für η in die erſtere Gleichung ſubſtituirt, giebt: $(B - C) \sin 2\vartheta - 2F \cos 2\vartheta = 0$; $\tang 2\vartheta = \frac{2F}{B - C}$, woraus für 2ϑ, alſo auch für ϑ, ein doppelter Werth entſpringt. Nennt man nemlich den einen Werth von $2\vartheta = \varepsilon$, ſo iſt der andere $2\vartheta = 180° + \varepsilon$; folglich ſowohl $\vartheta = \frac{1}{2}\varepsilon$, wie auch $\vartheta = 90° + \frac{1}{2}\varepsilon$.

Man erhält alſo ſolchergeſtalt noch zwey andere freye Axen, die, wegen des rechten Winkels $\eta = AIB$, gemeinſchaftlich in die Ebene BIC hineinfallen, und, weil darin ihr Abſtand 90° beträgt, ſowohl unter ſich, als mit der erſtern IA, einen rechten Winkel einſchließen; woraus dee merkwürdige Satz folgt: **daß es in jedem feſten Körper, er ſey geſtaltet, wie er wolle, drey freye Axen gebe, die ſich in ſeinem Schwerpunkte ſenkrecht durchſchneiden.**

Anmerk. Auf dieſe höchſt wichtige Eigenſchaft an feſten Körpern, die im Jahr 1755 zuerſt durch Herrn **von Segner** entdeckt wurde, hat **Euler** in ſ. Theoria motus corp. rigid. ſein ganzes Syſtem der freyen Umdrehungen feſter Körper mit ſehr glücklichem Erfolge gegründet, wodurch dieſe ſonſt ſo ſchwierige Lehre nunmehr zu eben der Einfachheit und Klarheit gediehen iſt, die die Theorie der fortrückenden Bewegung durch den Gebrauch des Schwerpunkts längſthin ſchon bekommen hatte.

§. 283.

Da die drey freyen Axen des Körpers gegenſeitig ſenkrecht auf einander ſtehen, ſo iſt es unſtreitig für die folgenden Unterſuchungen am vortheilhafteſten, ſie zu den drey Richtungslinien IA, IB und IC der Koordinaten x, y, z anzunehmen, und zwiſchen dieſen letztern die Gleichung für die Oberfläche des Körpers zu entwickeln. Dies vorausgeſetzt, hat man nun nicht allein: $\int xydM = 0$, und $\int xzdM = 0$, ſondern, da die auf der Axe IB genommene Abſciſſe für eben den Punkt Z $= y$ iſt, wird auch noch außerdem $\int yzdM = 0$; ſo daß alſo für Koordinaten des Körpers, die ſeinen freyen Axen parallel gezogen werden, das Produkt aus je zweyen derſelben in das dazu gehörige Element der Maſſe, durch den ganzen Körper ſummirt, allemal verſchwindet.

§. 284.

Fig. 6. 1. Bey allen runden Körpern, d. i. ſolchen, die durch Umdrehung einer ebenen Figur AMDB um ihre Axe AB entſtanden ſind, iſt dieſe Linie AB ſelbſt, eine von den freyen Axen: denn indem ſich der Körper um AB dreht, iſt jeder auf AB ſenkrechte Querſchnitt eine Umdrehungsebene, worin allezeit zwey gleiche Elemente in gleichen Entfernungen von der Axe einander gegenüber liegen, deren Schwungkräfte alſo, weil ſie gleich und entgegengeſetzt ſind, ſich aufheben.

2. Die andern freyen Axen des runden Körpers liegen beyde in dem, durch ſeinen Schwerpunk gehenden,

auf AB ſenkrechten Querſchnitte, und ſind alſo Durchmeſſer deſſelben. Da aber alle Durchmeſſer dieſes Querſchnittes gegen den ganzen Körper völlig einerley Lage haben, ſo folgt, daß ſie insgeſammt, einer wie der andere, freye Axen deſſelben ſeyn müſſen.

3. Um einzuſehen, wie dieſe ſonderbare Eigenſchaft des Konoids, mit der allgemeinen Formel tang $2\vartheta = \frac{2F}{B - C}$ (§. 282.) ſich vereinigen laſſe, wähle man die Axe AB zur Abſciſſenlinie der Ordinaten x, und errichte aus dem Schwerpunkte darauf nach Gefallen eine andere Axe ſenkrecht, ſo iſt dieſe ebenfalls eine freye Axe, mithin $\int yz dM = F = 0$ (§. 283.). Außerdem iſt aber, wie leicht aus der Beſchaffenheit des Kreiſes erhellet, $\int y^2 dM = \int z^2 dM$, oder $B = C$, folglich tang $2\vartheta = \frac{0}{0}$, ſo daß alſo die Formel für dieſen beſondern Fall den Winkel ϑ unbeſtimmt läßt.

4. Bey der Kugel iſt jede durch ihren Schwerpunkt gehende Linie, oder jeder ihrer Durchmeſſer, eine freye Axe.

§. 285.

Ueberhaupt iſt in jedem feſten Körper, deſſen centriſche Linie *) gerade iſt, dieſe Linie zugleich eine freye Axe.

*) In der engern Bedeutung hier genommen, wobey die einzelnen Querſchnitte des ganzen Körpers, durch deren Schwerpunkt ſie geht, zugleich ſenkrecht auf ihr ſeyn müſſen.

Beweis. 1) Man nehme ſie zur Abſciſſenlinie der Ordinaten x an, denke ſich den ganzen Körper in lauter unendlich ſchmale, auf ihr ſenkrechte, Querſchnitte getheilt, und ziehe in einem dieſer Querſchnitte die beyden andern Koordinaten y und z. Da die centriſche Linie durch deſſen Schwerpunkt geht, ſo iſt für ihn, wenn wir ſeine Maſſe m nennen, $\int y dm$, ſo wie $\int z dm = 0$, und weil hierbey x beſtändig iſt, auch $\int xy dm = x \int y dm = 0$, und $\int xz dm = x \int z dm = 0$.

2) Es ſind alſo von jedem einzelnen Querſchnitte des Körpers die Integrale $\int xy dm$ und $\int xz dm = 0$, folglich auch von allen zuſammengenommen, oder nach x ſummirt, d. h. die vollſtändigen Integrale $\int xy dM$ und $\int xz dM$ für den ganzen Körper, $= 0$.

3) Daß die andern beyden Integrale $\int y dM$ und $\int z dM$ ebenfalls $= 0$ ſeyn müſſen, folgt ſchon daraus, weil die gedachte Linie durch die Schwerpunkte aller einzelnen Querſchnitte, alſo auch durch ihren gemeinſchaftlichen Schwerpunkt, oder durch den Schwerpunkt des ganzen Körpers geht.

§. 286.

Solcher Körper giebt es außer den Konoiden noch eine Menge anderer, wohin z. B. die ſenkrechten Prismen, ganzen und abgekürzten Pyramiden gehören. Wir wollen unter dieſen hier bloß das rechtwinklichte Parallelepipedum näher betrachten:

Fig. 24. Es ſey I deſſen Schwerpunkt; BIC ein der Grundfläche paralleler Querſchnitt, IA ſenkrecht dar-

auf; ſo iſt zuvörderſt dieſe Linie eine von den drey freyen Axen. Da aber auch die andern Seitenflächen eben ſo gut als Grundflächen angenommen werden können, auf denen das Parallelepipedum ſenkrecht ſteht, ſo ſind IB und IC die andern beyden freyen Axen. Eben dies zeigt uns die Formel tang $2\vartheta = \frac{2F}{B - C}$ auf folgende Art:

Man nenne die Maſſe des Parallepipedum $= M$, ſeine Höhe $= a$, die mit IB und IC parallelen Seiten der Grundfläche $= b$ und c, ſo erhält man $\int y^2 dM = B = \frac{1}{12} Mb^2$, und $\int z^2 dM = C = \frac{1}{12} Mc^2$, alſo $B - C = \frac{1}{12} M (b^2 - c^2)$. Ferner $\int yz dM = F = 0$, weil darin die gleichen und entgegengeſetzten y und z einander aufheben; folglich tang $2\vartheta = 0$; $2\vartheta = 0$ und $180°$; $\vartheta = 0$ und $90°$, d. h. die andere freye Axe fällt in IB, und die dritte in IC.

Iſt aber $b = c$, ſo wird tang $2\vartheta = \frac{0}{0}$, alſo bleibt dann der Winkel ϑ unbeſtimmt, oder kann genommen werden, wie man will; daher ſind in einem Parallelepipedum, deſſen Grundfläche ein Quadrat iſt, alle mit der Grundfläche durch den Schwerpunkt parallel gezogene Linien, freye Axen deſſelben.

§. 287.

Fig. 35. **Aufgabe.** Die Momente der Trägheit eines Körpers Ma^2, Mb^2, Mc^2 in Bezug auf ſeine drey freyen Axen IA, IB, IC ſind gegeben; man ſucht ſein Moment der Trägheit für irgend eine andere durch ſei-

nen Schwerpunkt gezogene Axe IG, die mit jenen die Winkel AIG $= \alpha$, BIG $= \beta$, und CIG $= \gamma$ macht.

Aufl. 1) Man fälle aus dem Orte Z des Elements dM auf die Axe IG das Perpendikel IX′, und ſetze dies $= r$, ſo iſt das geſuchte Moment der Trägheit, das wir Mh^2 nennen wollen, $= \int r^2 dM$.

2) Nun giebt zuvörderſt die bloße Betrachtung der Figur:

$$x^2 + y^2 + z^2 = ZI^2 = IX'^2 + X'Z^2 = x'^2 + r^2$$
$$\text{alſo: } r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - x'^2,$$

Ferner hat man aus §. 281. N. 5.

$$x' = x \operatorname{Cos} \eta \operatorname{Cos} \vartheta + y \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Cos} \vartheta + z \operatorname{Sin} \vartheta,$$

oder, da in den beyden an IF rechtwinklichten Ecken IFGA, und IFGB, $\operatorname{Cos} \alpha = \operatorname{Cos} \eta \operatorname{Cos} \vartheta$, $\operatorname{Cos} \beta = \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Cos} \vartheta$, und außerdem $\operatorname{Sin} \vartheta = \operatorname{Cos} \gamma$ iſt:

$$x' = x \operatorname{Cos} \alpha + y \operatorname{Cos} \beta + z \operatorname{Cos} \gamma,$$

folglich wird:

$$r^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (x \operatorname{Cos} \alpha + y \operatorname{Cos} \beta + z \operatorname{Cos} \gamma)^2$$
$$= x^2 \operatorname{Sin} \alpha^2 + y^2 \operatorname{Sin} \beta^2 + z^2 \operatorname{Sin} \gamma^2 - 2xy \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \beta$$
$$- 2xz \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \gamma - 2yz \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \gamma$$

und, wenn man ſich der im §. 281. N. 7. gebrauchten Bezeichnungen bedient:

$$\int r^2 dM = A \operatorname{Sin} \alpha^2 + B \operatorname{Sin} \beta^2 + C \operatorname{Sin} \gamma^2 - 2D \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \beta - 2E \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \gamma - 2F \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \gamma.$$

3) Da aber die Axen, worauf ſich x, y und z beziehen, freye Axen ſind, ſo iſt hier D, E und F $= 0$; es bleibt alſo noch übrig:

$$\int r^2 dM = A \operatorname{Sin} \alpha^2 + B \operatorname{Sin} \beta^2 + C \operatorname{Sin} \gamma^2$$

4) Nun

4) Nun iſt $Ma^2 = \int (y^2 + z^2)\, dM = B + C$

$$Mb^2 = \int (x^2 + z^2)\, dM = A + C$$

$$Mc^2 = \int (x^2 + y^2)\, dM = A + B$$

$$\tfrac{1}{2} M (a^2 + b^2 + c^2) = A + B + C$$

mithin $A = \tfrac{1}{2} M (b^2 + c^2 - a^2)$, $B = \tfrac{1}{2} M (a^2 + c^2 - b^2)$, $C = \tfrac{1}{2} M (a^2 + b^2 - c^2$.

Dieſe Werthe für A, B und C in 3 ſubſtituirt, geben:

$$Mh^2 = \tfrac{1}{2} M \operatorname{Sin} \alpha^2 (b^2 + c^2 - a^2) + \tfrac{1}{2} M \operatorname{Sin} \beta^2 (a^2 + c^2 - b^2) + \tfrac{1}{2} M \operatorname{Sin} \gamma^2 (a^2 + b^2 - c^2)$$

$$= \tfrac{1}{2} M [a^2 (\operatorname{Sin} \beta^2 + \operatorname{Sin} \gamma^2 - \operatorname{Sin} \alpha^2) + b^2 (\operatorname{Sin} \alpha^2 + \operatorname{Sin} \gamma^2 - \operatorname{Sin} \beta^2) + c^2 (\operatorname{Sin} \alpha^2 + \operatorname{Sin} \beta^2 - \operatorname{Sin} \gamma^2].$$

5) Hierin wird noch, weil $\operatorname{Cos} \alpha^2 + \operatorname{Cos} \beta^2 + \operatorname{Cos} \gamma^2 = 1$ iſt,

$$\operatorname{Sin} \beta^2 + \operatorname{Sin} \gamma^2 = 1 + \operatorname{Cos} \alpha^2 - (\operatorname{Cos} \beta^2 + \operatorname{Cos} \gamma^2) = 2 \operatorname{Cos} \alpha^2,$$

und auf gleiche Weiſe:

$$\operatorname{Sin} \alpha^2 + \operatorname{Sin} \gamma^2 - \operatorname{Sin} \beta^2 = 2 \operatorname{Cos} \beta^2, \quad \operatorname{Sin} \alpha^2 + \operatorname{Sin} \beta^2 - \operatorname{Sin} \gamma^2 = 2 \operatorname{Cos} \gamma^2;$$

daher bekommt man endlich:

$$Mh^2 = Ma^2 \operatorname{Cos} \alpha^2 + Mb^2 \operatorname{Cos} \beta^2 + Mc^2 \operatorname{Cos} \gamma^2.$$

§. 288.

1. Will man aus der gefundenen Formel den dritten Winkel γ, der offenbar von den andern beyden α und β abhängig iſt, herausſchaffen, ſo darf man nur für $\operatorname{Cos} \gamma^2$ ſeinen Werth $1 - \operatorname{Cos} \alpha^2 - \operatorname{Cos} \beta^2$ ſetzen. Hierdurch erhält man:

$$Mh^2 = Mc^2 + M(a^2 - c^2)\,Cos\,\alpha^2 + M(b^2 - c^2)\,Cos\,\beta^2.$$

2. Man kann auch zur Beſtimmung der Lage der Axe IG die beyden Winkel AIF $= \eta$ und FIG $= \vartheta$ nehmen, und dieſe ſtatt der Winkel α, β und γ in die Formel einführen. Zu dem Ende wird (§. 287. 2.) Cos α $=$ Cos η Cos ϑ, Cos $\beta =$ Sin η Cos ϑ, Cos $\gamma =$ Sin ϑ, mithin:

$$Mh^2 = Ma^2\,Cos\,\eta^2\,Cos\,\vartheta^2 + Mb^2\,Sin\,\eta^2\,Cos\,\vartheta^2 + Mc^2\,Sin\,\vartheta^2.$$

3. Läßt man bey runden Körpern Mc^2 das Moment der Trägheit für die Polaraxe bedeuten, ſo beziehen ſich Ma^2 und Mb^2 auf die Durchmeſſer des durch den Schwerpunkt gehenden Querſchnittes, und ſind folglich einander gleich. Man bekommt alſo für ſolche Körper

$$Mh^2 = Ma^2\,Cos\,\vartheta^2 + Mc^2\,Sin\,\vartheta^2,$$

wo ϑ das Komplement des Winkels iſt, den die ſchiefe Axe IG mit der Polaraxe IC am Schwerpunkte einſchließt.

Exempel. Es ſey von einem Sphäroid die halbe Polaraxe $= e$, der Halbmeſſer des Aequators $= f$; man ſucht ſein Moment der Trägheit gegen eine Axe, die durch ſeinen Mittelpunkt geht, und gegen den Aequator unter dem Winkel ϑ geneigt iſt. Hier iſt $c^2 = \frac{2}{5}f^2$ (§. 212. 3.) und $a^2 = \frac{1}{5}(e^2 + f^2)$ (§. 214. 4.), folglich

$$Mh^2 = \tfrac{1}{5}M\,[(e^2 + f^2)\,Cos\,\vartheta^2 + 2f^2\,Sin\,\vartheta^2] = \tfrac{1}{5}M\,[e^2\,Cos\,\vartheta^2 + f^2(1 + Sin\,\vartheta^2)].$$

§. 289.

Aufgabe. Die Lage derjenigen Axe im Körper zu beſtimmen, wofür ſein Moment der Trägheit am kleinſten iſt.

Aufl. 1) Eine Axe, die dieſe Eigenſchaft haben ſoll, muß nothwendig durch den Schwerpunkt des Körpers gehen: denn für jede andere Axe iſt (§. 208. 2.) das Moment der Trägheit größer, als für die durch den Schwerpunkt ihr parallel gezogene; daher man nur für Axen letzterer Art die Unterſuchung anzuſtellen braucht.

2) Dieſem zufolge differenziire man die vorhin erhaltene Gleichung

$$h^2 = c^2 + (a^2 - c^2) \operatorname{Cos} \alpha^2 + (b^2 - c^2) \operatorname{Cos} \beta^2$$

ſowohl nach α als nach β, und ſetze beyde Differenziale $= 0$. Man bekommt ſolchergeſtalt:

$$0 = (a^2 - c^2) \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Sin} \alpha, \text{ und}$$

$$0 = (b^2 - c^2) \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Sin} \beta.$$

4) Hieraus entſpringen folgende Werthe für α und β

$$\operatorname{Sin} \alpha = 0, \operatorname{Cos} \alpha = 0; \operatorname{Sin} \beta = 0, \operatorname{Cos} \beta = 0$$

$$\alpha = 0,\ 90^\circ \quad ; \quad \beta = 0,\ 90^\circ,$$

die ſich auf vierfache Art mit einander verbinden laſſen:

4) Die erſte Kombination $\alpha = 0$, $\beta = 0$, iſt unmöglich, weil die Axe nicht zugleich in IA und IB hineinfallen kann.

Vermöge der zweyten $\alpha = 0$, $\beta = 90^\circ$, kommt die geſuchte Axe in IA zu liegen;

vermöge der dritten $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 0$, in IB, und

nach der vierten . $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$, ſteht ſie auf beyden ſenkrecht,

und fällt daher mit der dritten freyen Axe IC zuſammen.

5) Hier zeigt ſich uns alſo eine neue merkwürdige Eigenſchaft der freyen Axen, die darin beſteht, daß das Moment der Trägheit des Körpers in Anſehung ihrer ein Minimum iſt. Aus dieſem Geſichtspunkte betrachtet, pflegt man ſie auch wohl mit **Euler** noch beſonders die drey **Hauptaxen** des Körpers zu nennen.

Zehntes Kapitel.

Von der gemiſchten Bewegung feſter Körper.

---

§. 290.

Fig. 34. **Lehrſatz.** Wenn ein feſter Körper um drey Axen IA, IB, IC, die ſich in einem ſeiner Punkte I ſenkrecht durchſchneiden, zu gleicher Zeit drey Winkelgeſchwindigkeiten $\aleph$, ω, π bekommt, ſo dreht er ſich mit der einfachen Winkelgeſchwindigkeit $\sigma = \sqrt{(\aleph^2 + \omega^2 + \pi^2)}$ um eine mittlere Axe IG, deren Lage vermittelſt der drey Winkel AIG $= \alpha$, BIG $= \beta$, und CIG $= \gamma$ durch folgende Proportion beſtimmt wird.

$$\text{Cos}\,\alpha : \text{Cos}\,\beta : \text{Cos}\,\gamma = \aleph : \omega : \pi$$

Beweis. 1) Es ſey aus einem beliebigen Punkte Z des Körpers ZY auf die Ebene AIB, und in derſel-

ben YZ auf IA ſenkrecht, wodurch man alſo für dieſen Punkt die drey rechtwinklichten Koordinaten $IX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$ erhält, die mit IA, IB und IC parallel laufen. Außerdem ſey noch $ZX = r$; ſo bewegt ſich der Punkt Z, vermöge der Umdrehung des Körpers um IA nach Zz, ſenkrecht auf ZX, mit einer Geſchwindigkeit $= \gamma r$.

2) Man zerlege dieſe in eine nach YZ, parallel mit IC, und in eine darauf ſenkrechte, parallel mit IB. Erſtere wird, weil ſie nach ZY gerichtet iſt, folglich dieſe Ordinate vermindert, $= - \gamma r \operatorname{Cos} ZXY = - \gamma y$; letztere $= \gamma r \operatorname{Sin} ZXY = \gamma z$.

3) Auf gleiche Weiſe entſpringen aus der Umdrehung des Körpers um IB für den Punkt Z nach den beyden mit IC und IA parallelen Richtungen die Geſchwindigkeiten πy und $- \pi x$, wovon man ſich durch eine ähnliche Zeichnung, wie für die Axe IA hier entworfen iſt, ſehr leicht überzeugen kann.

4) Dieſe einzelnen Geſchwindigkeiten nach jeder der drey Richtungen IA, IB, IC beſonders addirt, geben für den Punkt Z:

nach IA die Geſchwindigkeit $\frac{dx}{dt} = \omega z - \pi y$,

nach IB . . . $\frac{dy}{dt} = \gamma z - \pi x$,

nach IC . . . $\frac{dz}{dt} = \omega x - \gamma y$.

5) Hieraus laſſen ſich nun zunächſt die Punkte im Körper beſtimmen, die bey ſeiner dreyfachen Umdre-

hung in Ruhe bleiben. Man hat nemlich für dieſe $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, $\frac{dz}{dt} = 0$, folglich:

$$\omega z = \pi y,\ \varkappa z = \pi x,\ \omega x = \varkappa y$$

oder $x : y : z = \varkappa : \omega : \pi$,

Fig. 35. wodurch eine gerade Linie IG angedeutet wird, die mit den drey ſenkrechten Axen in dem gemeinſchaftlichen Punkte I zuſammenläuft.

6) Dieſe Linie bleibt alſo bey der Bewegung des Körpers unverändert in ihrer Lage, und iſt daher die Axe, um welche ſich der Körper dreht. Man fälle noch auf ſie aus Z das Perpendikel ZX′, und nenne die Koordinaten des Punktes X′, parallel mit IA, IB und IC, $= X$, Y und Z; ſo wird $X : Y : Z = \varkappa : \omega : \pi$. Ferner, wenn man die beyden Winkel AIF und FIG $= \eta$ und ϑ ſetzt,

$IX' \sin\vartheta = Z$, $IX' \cos\vartheta \sin\eta = Y$, und $IX' \cos\vartheta \cos\eta = X$, oder

$$X : Y : Z = \cos\eta \cos\vartheta : \sin\eta \cos\vartheta : \sin\vartheta = \cos\alpha : \cos\beta\ \cos\gamma\ (\text{§. 287. 2.})$$

mithin $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \varkappa : \omega : \pi$.

7) Man erhält daraus $\varkappa^2 \cos\beta = \omega^2 \cos\alpha^2$, und $\varkappa^2 \cos\gamma = \pi^2 \cos\alpha^2$, alſo $(\varkappa^2 + \omega^2 + \pi^2) \cos\alpha^2 = \varkappa^2 (\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2) = \varkappa^2$; folglich

$$\cos\alpha = \frac{\varkappa}{\sqrt{(\varkappa^2 + \omega^2 + \pi^2)}},\ \cos\beta = \frac{\omega}{\sqrt{(\varkappa^2 + \omega^2 + \pi^2)}},$$

und $\cos\gamma = \frac{\pi}{\sqrt{(\varkappa^2 + \omega^2 + \pi^2)}}$.

8) Es ſey endlich die Winkelgeſchwindigkeit des

Körpers um die Axe IG$=\sigma$; die Entfernung ZX'$=$w; ſo iſt σw die Geſchwindigkeit des Punktes Z in ſeiner Bahn, und deshalb:

$$\sigma^2 w^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2;$$

Ferner $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \omega^2 z^2 - 2\omega\pi yz + \pi^2 y^2$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \gamma^2 z^2 - 2\gamma\pi xz + \pi^2 x^2,$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \omega^2 x^2 - 2\gamma\omega xy + \gamma^2 y^2$$

folglich $\sigma^2 w^2 = (\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (\gamma x + \omega y + \pi z)^2$,

oder $\frac{\sigma^2 w^2}{\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2} = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{(\gamma x + \omega y + \pi z)^2}{\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2}$;

9) Und aus (§. 287. 2.)

$$w^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \operatorname{Cos}\alpha + y \operatorname{Cos}\beta + z \operatorname{Cos}\gamma)^2;$$

wovon letzteres Glied, wenn man darin für Cos α, Cos β und Cos γ ihre Werthe ſubſtituirt, ſich in $\frac{(\gamma x + \omega y + \pi z)^2}{\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2}$ verwandelt.

Dieſe Gleichung mit der vorhergehenden verglichen, giebt demnach: $\frac{\sigma^2 w^2}{\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2} = w^2$, alſo $\sigma = \sqrt{(\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2)}$.

§. 291.

Hieraus folgt gegenſeitig, daß man jede einfache Umdrehung eines feſten Körpers als zuſammengeſetzt

betrachten, und ſolchergeſtalt in drey andere um drey willkührliche Axen, die ſich in einem ihrer Punkte ſenkrecht durchſchneiden, zerlegen könne. Es ſey nemlich IG die gegebene Umdrehungsaxe, und σ die Winkelgeſchwindigkeit des Körpers um dieſelbe; ferner ſeyen α, β und γ die Winkel, die ſie mit den drey ſenkrechten Axen IA, IB, IC einſchließt, und ϑ, ω, π die Winkelgeſchwindigkeiten, worin die erſtere σ um dieſe drey Axen zerfällt, ſo hat man (7)

$$\operatorname{Cos} \alpha = \frac{\vartheta}{\sigma}, \operatorname{Cos} \beta = \frac{\omega}{\sigma}, \operatorname{Cos} \gamma = \frac{\pi}{\sigma}, \text{ mithin}$$

$$\vartheta = \sigma \operatorname{Cos} \alpha, \ \omega = \sigma \operatorname{Cos} \beta, \ \pi = \sigma \operatorname{Cos} \gamma;$$

wobey dann nur noch aus den Umſtänden beurtheilt werden muß, nach welchen Seiten dieſe einzelnen Umdrehungen geſchehen. Dreht ſich z. B. der Körper um die Axe IG nach B zu, ſo geſchieht begreiflich die Umdrehung um IA nach der Seite CB, die um IB nach AC, und die um IC nach AB.

§. 292.

Liegen die beyden Axen IA und IB mit der gegebenen Umdrehungsaxe des Körpers IF in einer Ebene, ſo iſt $\gamma = 90°$, alſo $\operatorname{Cos} \gamma = 0$, mithin auch die Winkelgeſchwindigkeit um die dritte Axe $IC = 0$; daher entſtehen in dieſem Falle bloß zwey Umdrehungen um die erſtern beyden Axen IA und IB, und zwar wird, wenn man den Winkel $FIA = \eta$ nennt, $\vartheta = \sigma \operatorname{Cos} \eta$, und $\omega = \sigma \operatorname{Cos}(90° - \eta) = \sigma \operatorname{Sin} \eta$.

§. 293.

Lehrſatz. Jede augenblickliche Bewegung eines feſten Körpers, ſie mag geſchehen, auf welche Art man will, iſt eine einfache Umdrehung um irgend eine, entweder im Körper ſelbſt, oder außerhalb demſelben liegende, unbewegliche Axe.

Fig. 36. **Beweis.** 1) Es ſey BAO die anfängliche Lage irgend einer nach Gefallen im Körper angenommenen Ebene; baO ihre jetzige, worin ſie durch die Bewegung des Körpers verſchoben worden iſt; $d\varphi$ der Neigungswinkel, AO der Durchſchnitt beyder. Ferner ſey aO die vorige Lage dieſer Durchſchnittslinie in derſelben, und der Winkel $AOa = d\psi$; ſo hat ſich der Kürper auf zwiefache Art gedreht: einmal nemlich um die Axe AO um den Winkel $d\varphi$, und dann um eine auf AOa in O ſenkrechte Axe Oc um den Winkel $d\psi$.

2) Da nun dieſe Axen im Punkte O zuſammen treffen, folglich in einer Ebene AOc liegen, ſo vereinigen ſich beyde Umdrehungen des Körpers zu einer dritten um eine mittlere Axe Of, die gleichfalls in dieſer Ebene liegt; und wegen des rechten Winkels AOc hat man:

$$\operatorname{Cos} AOf = \frac{d\varphi}{\sqrt{(d\varphi^2 + d\psi^2)}}, \text{ oder } \operatorname{tang} AOf = \frac{d\psi}{d\varphi}.$$

3) Die ganze Bewegung des Körpers beſteht demnach in einer einfachen Umdrehung deſſelben um die Axe Of, wobey er den Winkel $\sqrt{(d\varphi^2 + d\psi^2)}$ um ſie beſchrieben hat.

§. 294.

Fallen die beyden Ebenen baO und BAO in einander, ſo kann man darin die Linie AO nach Willkühr annehmen. Alsdann fällt die Umdrehungsaxe des Körpers, weil $d\phi = 0$ iſt, in Oc hinein, und der Winkel, den er um ſie zurückgelegt hat, iſt $= d\psi$.

Sind hingegen die gedachten Ebenen einander parallel, ſo kann man ſich vorſtellen, ihr Durchſchnitt liege unendlich weit vom Körper entfernt, folglich auch ſeine Umdrehungsaxe. Daher läßt ſich das Fortrücken eines Körpers als eine Umdrehung deſſelben betrachten, die um eine unendlich weit von ihm entlegene Axe geſchieht.

§. 295.

Fig. 37. **Lehrſatz.** Wenn ein feſter Körper um die Axe IA den Winkel $d\phi$ beſchreibt, und zugleich nach einer auf ſie ſenkrechten Richtung IC um ds fortrückt, ſo hat er ſich während der Zeit um eben den Winkel, und nach eben der Seite zu, um eine unbewegliche Axe OF gedreht, die mit IA in einer auf IC ſenkrechten Ebene BIA parallel läuft, und darin um $IO = \frac{ds}{d\phi}$ von ihr entfernt liegt.

Beweis. 1) Man fälle aus einem Punkte Z des Körpers auf die Ebene BIA das Perpendikel ZY, und aus Y auf IA noch ein zweytes YX, und ſetze $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, $XZ = r$, ſo iſt $r d\phi$ der Raum Zz, den dieſer Punkt vermöge der Umdrehung des Körpers um IA zurücklegt.

2) Er zerfällt nach XY und YZ in die Räume $zd\varphi$ und $-yd\varphi$ (§. 290. 2.), mit welchem letztern ſich noch der Raum ds verbindet, um den der Punkt Z nach YZ, parallel IC, zu gleicher Zeit fortrückt, ſo daß überhaupt: $dx = 0$, $dy = zd\varphi$, und $dz = -yd\varphi + ds$ wird.

3) Für ſolche Punkte nun, die während der Bewegung des Körpers in Ruhe bleiben, hat man $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$, alſo

$$z = 0, \; y = \frac{ds}{d\varphi};$$

woraus erhellet, daß dieſe Punkte in einer geraden Linie OF liegen, die in die Ebene BIA hineinfällt, und darin von IA um die Weite $\frac{ds}{d\varphi}$ abſteht.

4) Man ſetze den Winkel, den der Körper um die Axe OF beſchreibt, $= d\psi$, und die ſenkrechte Entfernung ZX′ des Punktes Z von ihr $= u$, ſo bekommt man:

$$u^2 d\psi^2 = dy^2 + dz^2 = z^2 d\varphi^2 + (yd\varphi - ds)^2$$
$$= d\varphi^2 \left[z^2 + \left(y - \frac{ds}{d\varphi}\right)^2\right]$$

Ferner $u^2 = YZ^2 + YX'^2 = z^2 + \left(y - \frac{ds}{d\varphi}\right)^2$; folglich:

$$d\psi^2 = d\varphi^2, \; d\psi = d\varphi.$$

5) Weil endlich der Raum, den der Punkt Z vermöge dieſer Umdrehung nach YZ durchläuft, ebenfalls negativ iſt, wofern $y > \frac{ds}{d\varphi}$ iſt, oder Y auf einerley

Seite von IA und OF fällt, ſo folgt, daß die Umdrehung des Körpers um letztere Axe nach eben der Seite zu geſchehe, als um erſtere.

§. 296.

Man kann daher auch umgekehrt jedes augenblickliche Drehen des feſten Körpers um die ruhende Axe OF als eine Zuſammenſetzung aus einer andern Umdrehung um eine mit OF parallel gezogne Axe IA, und einem Fortrücken nach der auf die Ebene OIA ſenkrechten Richtung IC anſehen, und ſie in dieſe beyden einzelnen Bewegungen zerlegen. Es ſey nemlich die Winkelgeſchwindigkeit des Körpers um die Axe OF $= \gamma$, die Entfernung dieſer Axe von der angenommenen IA $= l$, die geſuchte Geſchwindigkeit des daraus entſpringenden Fortrückens $= v$, ſo hat man:

$$l = \frac{ds}{d\varphi},\ \gamma = \frac{d\varphi}{dt};\ \text{mithin wird}\ u = \frac{ds}{dt} = \gamma l,$$

und die Winkelgeſchwindigkeit um IA ebenfalls $= \gamma$ (§. 295. 4.).

Da man nun die letztere Axe IA auch durch den Schwerpunkt I ziehen kann, ſo folgt: daß jede Umdrehung eines Körpers, die um eine ruhende Axe geſchieht, folglich auch überhaupt jede augenblickliche Bewegung deſſelben (§. 293.) in ein Drehen um die durch den Schwerpunkt ihr parallel laufende Axe, und in ein Fortrücken nach der auf die Ebene beyder Axen ſenkrechten Richtung, ſich zerlegen laſſe.

§. 297.

So iſt z. B. das Fortrollen eines Cylinders auf ebenen Boden eine ſtete Umdrehung deſſelben um die gerade Linie, worin er jedesmal den Boden berührt. Nennt man alſo ſeine Winkelgeſchwindigkeit um dieſe Axe = ∀, die Entfernung ſeines Schwerpunkts von Fig. 38. ihr, oder ſeinen Halbmeſſer CO = f, ſo entſpringt daraus eine fortrückende Geſchwindigkeit = ∀f, und eine Winkelgeſchwindigkeit um die durch den Schwerpunkt gehende Axe, die ebenfalls = ∀ iſt.

Daher beſteht die wälzende Bewegung des Cylinders theils aus einer Umdrehung um ſeine geometriſche Axe, und theils aus einem Fortrücken, das, ſenkrecht auf jene Axe, dem Boden parallel geſchieht; und wenn man das Drehen nach dem Bogen mißt, den ein Punkt im Umfange beſchreibt, ſo ſind beyder Geſchwindigkeiten einander gleich.

§. 298.

Fig. 39. **Aufgabe.** Ein feſter Körper, deſſen Maſſe = M iſt, ſoll um eine Axe OD, die mit der freyen Axe IA parallel läuft, die Winkelgeſchwindigkeit d∀ bekommen; man ſucht die dazu erforderliche Kraft V, und die Richtung, nach der ſie auf den Körper wirken muß.

Aufl. 1) Man errichte aus dem Schwerpunkte I des Körpers zwey andere Linien IB und IC ſowohl unter ſich, als auf IA ſenkrecht, und ziehe dieſen für ein Element des Körpers dM bey Z die Koordinaten IX = x, XY = y, YZ = z parallel. Ferner lege man

durch OD eine Ebene, parallel mit BIA, verlängere ZY bis ſie dieſelbe in y ſchneidet, ziehe aus y auf OD das Perpendikel yx, und ſetze xy = y′, yZ = z′, xZ = r′.

2) Dann ſey auch noch Xr auf xy ſenkrecht, oder mit Zy parallel; ſo ſind xr und Xr die Entfernungen der Axe OD von den beyden Ebenen CIA, BIA, und wenn dieſe a uud b genannt werden, $y' = a + y$, $z' = b + z$. Außerdem iſt $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ die Entfernnng zwiſchen OD und IA, die wir l nennen wollen.

3) Dies vorausgeſetzt, weiß man nun ſchon aus §. 199., daß der Körper verlangtermaßen um die Axe OD gedreht würde, wenn man auf jedes ſeiner Elemente, wie dM, eine Kraft $= \frac{r'dM}{2g} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$, ſenkrecht auf xZ, wirken ließe. Daher ſind alle dieſe Kräfte in Verbindung der geſuchten Kraft V äquipollent, und müſſen folglich, nach entgegengeſetzter Richtung angebracht, ihr das Gleichgewicht halten.

4) Könnte man alſo ſie zuſammen auf einen Punkt des Körpers vereinigen, ohne dadurch ihr Gleichgewicht mit V aufzuheben, ſo gäbe dies eine Kraft, die der Kraft V gleich und entgegengeſetzt ſeyn müßte, und folglich ſowohl ihre Größe als Richtung beſtimmte. Man gelangt dazu auf folgende Art:

5) Die Kraft $\frac{r'dM}{2g} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$ zerfällt (§. 290. 2.) nach der Richtung ZY in eine $dp = \frac{y'dM}{2g} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} =$

$\frac{(a+y)dM}{2g} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$, und nach der darauf ſenkrechten, oder mit XY parallelen Richtung in eine $dq = \frac{z'dM}{2g} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \pm \frac{(b+z)dM}{2g} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$; und ein Gleiches geſchieht mit allen den übrigen Umdrehungskräften, die wir uns auf die einzelnen Punkte des ganzen Körpers angebracht denken.

6) Den parallelen Kräften dp iſt aber in ihrem gemeinſchaftlichen Schwerpunkte die eine Kraft $p = \frac{d\vartheta}{2gdt}\int(a+y)dM = \frac{aM}{2g} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$ (§. 279.) äquipollent und die Koordinaten dieſes Punktes, der in die Ebene BIA fällt, ſind: längs $IA = \frac{\int xdp}{p}$, und ſenkrecht darauf, oder parallel IB, $= \frac{\int ydp}{p}$.

7) Hierin für p und dp ihre Werthe ſubſtituirt, giebt $\frac{\int xdp}{p} = \frac{\int(ax+xy)dM}{aM} = \frac{\int xdM}{M} + \frac{\int xydM}{aM} = 0$ (ebendaſ.); alſo fällt der Punkt irgendwo in E in die Linie IB, und es iſt $IE = \frac{\int ydp}{p} = \frac{\int(ay+y^2)dM}{aM} = \frac{\int y^2dM}{aM}$.

8) Auf gleiche Weiſe vereinigen ſich alle die parallelen Kräfte dq zu ihrer Summe $q = \frac{d\vartheta}{2gdt}\int(b+z)dM$

$= \frac{bM}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$ in einen Punkt F der Linie IC, deſſen Entfernung IF von I $= \frac{\int z^2 dM}{bM}$ iſt.

9) Verlängert man nun in der Ebene BIC die Richtungen Ee und Ff der beyden Kräfte p und q bis zu ihrem Durchſchnittspunkte G, und verlegt ſie gemeinſchaftlich auf dieſen Punkt, ſo entſpringt aus ihnen nach einer mittlern Richtung Gg die Kraft $\sqrt{(p^2+q^2)}$ $= \frac{Md\gamma}{2gdt}\sqrt{(a^2+b^2)} = \frac{Mld\gamma}{2gdt}$; der alſo die geſuchte Kraft V gleich iſt.

10) In Anſehung ihrer Richtung gG folgt zunächſt, daß dieſelbe in BIC, d. h. in eine Ebene falle, die die freye Axe IA im Schwerpunkte I ſenkrecht ſchneidet; und was ihre Lage in dieſer Ebene betrift, ſo hat man tang eGg $= \frac{q}{p} = \frac{b}{a} =$ tang Xxr. Zieht man daher auf Xx das Perpendikel Xϱ, ſo iſt eGg = rXϱ, folglich Gg mit Xϱ parallel; woraus alſo ferner erhellet, daß die Richtung der Kraft V auf der Ebene IOD, die durch die beyden Axen IA und OD geht, ſenkrecht ſey.

11) Um endlich ihren Abſtand vom Schwerpunkte I zu beſtimmen, welcher = f ſeyn mag, darf man nur in Erwägung ziehen, daß das Moment der Kraft V gegen die Axe IA, den Momenten der beyden Kräfte p und q gleich ſeyn muß. Dieſem zu Folge wird

$$Vf = p \, . \, IE + q \, . \, IF \; \frac{d\gamma}{2gdt}\int (y^2+z^2)\,dM,$$

oder,

oder, wenn man das Moment der Trägheit des Körpers in Bezug auf die freye Axe IA = Mh^2 ſetzt:

$$Vf = \frac{Mh^2}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}.$$

§. 299.

Wenn daher auf den ruhenden Körper eine gegebene Kraft V wirkt, die gegen ſeine freye Axe IA das Moment Vf hat, und deren Richtung in die Ebene der andern beyden freyen Axen fällt, ſo bekommt er dadurch zu gleicher Zeit eine Winkelgeſchwindigkeit $d\gamma = \frac{2gVfdt}{Mh^2}$ um die Axe IA, und eine fortrückende Geſchwindigkeit $l\,d\gamma = \frac{2gVdt}{M}$ nach derſelben Richtung, die die Kraft hat (§. 295.).

Es iſt demnach in Anſehung der fortrückenden Bewegung des Körpers ganz einerley, ob die Richtung der Kraft in der gedachten Ebene durch ſeinen Schwerpunkt geht, oder nicht; ſie bewirkt aber im letztern Falle außerdem noch eine Umdrehung deſſelben um ſeine freye Axe, die ſich eben ſo verhält, als wenn dieſe Axe befeſtigt wäre.

§. 300.

Fig. 40. **Aufgabe.** Auf einen Körper, der Anfangs in Ruhe iſt, wirkt in jedem Augenblicke eine Kraft V, deren Richtung in die Ebene BIC der beyden freyen Axen IB und IC fällt; man ſucht die Bewegung deſſelben.

Aufl. 1) Aus vorigem §. iſt klar, daß der Körper durch die fortgeſetzte Wirkung dieſer Kraft keine andere Umdrehung, als um die dritte ſeiner freyen Axen IA erhalten könne, und ſein Schwerpunkt, der Anfangs in der Ebene BIC lag, auch während ſeines Fortrückens beſtändig darin bleiben müſſe. Es ſey demnach M ſein Ort in dieſer Ebene nach Verlauf einer gegebenen Zeit t; aus ihm ſey MP auf IB ſenkrecht gezogen, und IP $= x$, PM $= y$. Außerdem ſey die Winkelgeſchwindigkeit des Körpers um die Axe IA in eben dem Augenblicke $= \gamma$.

2) Weil IA eine freye Axe iſt, ſo würde der Körper vermöge ſeiner Trägheit im nächſten Zeittheile dt fortfahren, ſich mit dieſer einmal erhaltenen Winkelgeſchwindigkeit um dieſelbe, wie um eine feſte Axe, zu drehen (§. 280.). Allein die Kraft V ertheilt ihm um eben die Axe, wenn wir ihr Moment gegen ſie $= Vf$ ſetzen, noch ferner die Winkelgeſchwindigkeit $\frac{2gVfdt}{Mh^2}$; alſo iſt dies der augenblickliche Zuwachs, den er zu voriger bekommt, und folglich $d\gamma = \frac{2gVdt}{Mh^2}$; woraus man

$$\gamma = \frac{2g}{Mh^2} \int Vfdt \text{ erhält.}$$

3) Was die fortgehende Bewegung des Körpers betrift, ſo wird ſolche durch die Kraft V eben ſo geändert, als wenn ſtatt ihrer eine gleich große Kraft nach paralleler Richtung auf den Schwerpunkt deſſelben

wirkte. Nennt man daher den Winkel, den ihre Richtung mit der Axe IB einſchließt, $= \varphi$, ſo zerfällt ſie nach Mo und om, parallel IB und IC, in die beyden den Kräfte V Cos φ und V Sin φ, und man hat alſo (§. 59. 4.)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2gV \operatorname{Cos} \varphi}{M}, \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2gV \operatorname{Sin} \varphi}{M}.$$

§. 301.

Wir wollen ſetzen, der Körper werde außerdem noch von zwey andern Kräften P und Q getrieben, deren Richtungen, parallel mit IB und IC, durch ſeinen Schwerpunkt gehen, ſo haben dieſe offenbar auf ſeine Umdrehung keinen Einfluß, weil ihre Momente gegen die Axe IA $= 0$ ſind. Es bleibt daher, wie vorhin, $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{2gVf}{Mh^2}$, und wenn wir zugleich annehmen, daß der Körper ſchon Anfangs eine Winkelgeſchwindigkeit γ um dieſe nach eben der Seite zu gehabt habe, wohin die Kraft V ihn zu drehen ſtrebt, ſo wird

$$\vartheta = \gamma + \frac{2g}{Mh^2} \int Vfdt.$$

In Anſehung der fortrückenden Bewegung erhält man aber nunmehr:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2g}{M}(P + V \operatorname{Cos}\varphi); \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2g}{M}(Q + V \operatorname{Sin}\varphi).$$

§. 302.

Fig. 41. **Aufgabe.** Um eine cylindriſche Rolle tvr iſt ein Faden gewickelt, und deſſen eines Ende irgendwo

in C feſtgeheftet. Man läßt die Rolle an dieſem Faden aus der Ruhe herabſinken; es fragt ſich, zu welcher Tiefe ſie binnen einer gegebenen Zeit t gelangt ſeyn wird.

Aufl. 1) Es wirken auf ſie in jedem Augenblicke zwey Kräfte: nemlich ihr Gewicht = M, wodurch ſie nach vertikaler Richtung *ov* herabwärts getrieben, und der abgewickelte Theil Ct des Fadens nach eben der Richtung ſtraff gezogen wird; und die Spannung des Fadens = T, deren Richtung in der Ebene *tvr* der beyden freyen Axen der Rolle tr und *ov* liegt, und die alſo eine Umdrehung derſelben um ihre dritte, auf *tvr* ſenkrechte, freye Axe hervorbringt.

2) Es ſey nun der Halbmeſſer der Rolle to = f, die Geſchwindigkeit ihres Schwerpunktes o nach Verlauf der Zeit t = *v*, ihre Winkelgeſchwindigkeit für eben die Zeit = γ; ſo iſt das Moment der Spannung gegen die erwähnte Axe = Tf, und das Moment der Trägheit der Rolle in Bezug auf dieſelbe Axe = $\frac{1}{2}Mf^2$, folglich:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2gTf}{\frac{1}{2}Mf^2} = \frac{4gT}{Mf}.$$

3) Und weil die Kraft der Spannung zu gleicher Zeit eben die Vrrzögerung in dem Herabſinken der Rolle bewirkt, als wenn ihre Richtung durch den Schwerpunkt derſelben ginge; ſo iſt ferner:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2g(M-T)}{M} = 2g - \frac{2gT}{M}.$$

4) Begreiflich geſchieht die Abwickelung des Fa-

dens von der Rolle dadurch, daß die Rolle ſich fort= dauernd um den Unterſtützngspunkt t dreht, wo der Fa= den ihren Umfang verläßt. Daher iſt ihre Bewegung wälzend (§. 297.), und folglich:

$$\gamma = \frac{v}{f}, \text{ oder } \frac{f d\gamma}{dt} = \frac{dv}{dt}.$$

5) Man bekommt alſo $\frac{f d\gamma}{dt} = \frac{4gT}{M} = 2g - \frac{2gT}{M}$, woraus $T = \frac{1}{3}M$ folgt. Dieſer Werth für T in (3) geſetzt, giebt:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}g, \quad v = \frac{4}{3}gt, \quad \gamma = \frac{4gt}{3f}.$$

6) Und wenn man den Raum, durch den die Rolle in der Zeit t herabgeſunken iſt, $= x$ nennt, er= hält man $dx = \frac{4}{3}gtdt$, folglich $x = \frac{2}{3}gt^2$.

7) Ihr Schwerpunkt wird alſo mit gleichförmi= ger Beſchleunigung herabgetrieben; nur langſamer als beym ungehinderten Fallen. Es verhält ſich nemlich für einerley Zeit der Raum, den er zurückgelegt hat, zum freyen Fallraume, wie 2 : 3.

§. 303.

Man ſetze die Länge des ganzen Fadens $= a$, ſo iſt für den Zeitpunkt, wo er ſich völlig abgewickelt hat, $a = \frac{2}{3}gt^2$, mithin $t = \sqrt{\frac{3a}{2g}}$, $v = \sqrt{\frac{8}{3}ag}$, und $\gamma = 2\sqrt{\frac{2ag}{3f^2}}$.

Bevor die Rolle auf die andere Seite des Fadens gelangt, nimmt die Beſchleunigung ihrer Umdrehung ſo lange ab, bis to und Ct in eine gerade Linie zu liegen kommen, wo ſie dann gänzlich verſchwindet. Darauf wird die Umdrehung vom Faden eben ſo verzögert, als ſie zuvor beſchleunigt wurde, weil der Halbmeſſer to nach und nach eben die Lagen gegen ihn annimmt, als vorhin; ſo daß alſo, wenn wieder beyde ſenkrecht auf einander zu ſtehen kommen, zum zweyten male $\gamma = 2\sqrt{\frac{2ag}{3f^2}}$ wird. Man betrachte nun in der Figur die Seite des Fadens, auf der die Rolle gezeichnet iſt, als die entgegengeſetzte; ſo geſchieht jetzt ihre Umdrehung nach tvr, und der Faden wird alſo wieder aufgewickelt. Man hat daher gegenwärtig

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{4gT}{Mf},\ \frac{dv}{dt} = -2g + \frac{2gT}{M},$$ und wie vorhin $f.\frac{d\gamma}{dt} = \frac{dv}{dt}$; alſo $\frac{dv}{dt} = -\frac{4}{3}g$, $v = \sqrt{\frac{8}{3}ag} - \frac{4}{3}gt$, $x = t\sqrt{\frac{8}{3}ag} - \frac{2}{3}gt^2$; mithin für $v = o$, $t = \sqrt{\frac{3a}{2g}}$, $x = a$, d. h. die Rolle ſteigt auf der andern Seite des Fadens an ihm zu eben der Höhe, von der ſie auf der erſtern Seite herabgeſunken war.

§. 304.

Fig. 38. **Aufgabe.** Eine Kugel vom Halbmeſſer $= f$ wird in A auf die ſchiefe Ebene AB gelegt, die gegen die Horizontale BD unter dem Winkel ABD $= I$ geneigt

iſt; man fragt, nach welchem Geſetze ſie ſich vermöge ihres Gewichtes M längs derſelben herabbewegen werde.

Aufl. 1) Es ſey C der Ort ihres Schwerpunktes für eine gegebene Zeit t; O der Punkt, worin ſie alsdann die Ebene berührt; alſo OC ſenkrecht auf AB, und = f. Man ſetze aber für jetzt allgemein: OC = y, OA = x, und für eben den Zeitpunkt die Geſchwindigkeit, womit ſie nach Cc fortrückt, = v; ihre Winkelgeſchwindigkeit um die durch C gehende, auf die Fläche AOC ſenkrechte, Axe = ♉, ihr Moment der Trägheit für dieſelbe = Ma^2. Endlich ſey noch Π der Druck, den ſie in O auf die Fläche ſenkrecht ausübt, und gegenſeitig nach OC leidet; und R der Widerſtand, den ihr in eben dem Punkte die Friktion nach OA entgegenſetzt.

2) Da der Winkel OCv, den die Normale der Fläche CO mit der Vertikale Cv macht, = I iſt, ſo zerfällt das Gewicht der Kugel M nach CO und der darauf ſenkrechten, oder mit AB parallelen, Richtung Cc in die beyden Theile M Cos I und M Sin I. Es ſind alſo die Kräfte, die auf ihrem Schwerpunkt wirken: nach AO = M Sin I und — R, und nach OC = Π und — M Cos I. Außerdem hat die Kraft R gegen ihre Umdrehungsaxe das Moment Rf; man erhält daher folgende Gleichungen (§. 301.)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2g}{M}(M \sin I - R), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2g}{M}(\Pi - M \cos I), \text{ und } \frac{d♉}{dt} = \frac{2gRf}{Ma^2}.$$

3) Zunächſt folgt nun aus $y = f$, $\frac{dy}{dt} = o$, $\frac{d^2y}{dt^2} = o$, alſo $\Pi = M \text{ Cos } I$; oder: die Kugel drückt bey ihrer Bewegung eben ſo ſtark gegen die Fläche, als wenn ſie auf ihr im Gleichgewichte gehalten würde. Ferner wird $v = \frac{dx}{dt}$; mithin $\frac{dv}{dt} = \frac{2g}{M}(M \text{ Sin } I - R)$.

4) Die Geſchwindigkeit des Punktes O iſt, vermöge der fortrückenden Bewegung der ganzen Kugel, nach $OB = v$, und, vermöge ihrer Umdrehung, nach $OA = \gamma f$; alſo ſeine eigentliche Geſchwindigkeit nach $OB = v - \gamma f$. Es kann Fälle geben, wo ſie gänzlich verſchwindet, nie aber ſolche, wo ſie negativ würde: denn daß ſie geringer als v iſt, bewirkt allein die Friktion, und dieſe iſt, wie jedes andere Hinderniß, nur fähig, Bewegungen zu verzögern, auch wohl gänzlich zu hemmen, aber nicht, entgegengeſetzte hervorzubringen.

5) Iſt $v - \gamma f = o$, alſo der jedesmalige Berührungspunkt O in Ruhe, ſo übt die Friktion nicht mehr Widerſtand aus, als erfordert wird, dieſe Ruhe zu unterhalten; iſt dagegen $v > \gamma f$, oder bewegt ſich der Punkt O nach OB wirklich, ſo iſt nun der Widerſtand, den ſie leiſtet, nicht mehr relativ, ſondern unbedingt ein beſtimmter Theil vom Drucke Π, der $= \lambda\Pi$ ſeyn mag. Wir wollen zuerſt prüfen, unter welchen Umſtänden letzterer Fall eintreten kann.

6) Die Annahme $v > \gamma f$ ſetzt voraus, daß

$\frac{dv}{dt} > f\frac{d\gamma}{dt}$, folglich $M \operatorname{Sin} I - R > \frac{Rf^2}{a^2}$, oder $M \operatorname{Sin} I > R(1 + \frac{f^2}{a^2})$ ſey. Zugleich iſt aber alsdann $R = \lambda\Pi = \lambda M \operatorname{Cos} I$, mithin $M \operatorname{Sin} I > \lambda M \operatorname{Cos} I . (1 + \frac{f^2}{a^2})$, oder $\operatorname{tang} I > \lambda(1 + \frac{f^2}{a^2})$.

7) Für kleinere Neigungswinkel kann alſo v nicht $> \gamma f$ ſeyn. Da nun v nie $< \gamma f$ iſt (4), ſo folgt, daß auf Ebenen, wofür $\operatorname{tang} I < \lambda(1 + \frac{f^2}{a^2})$ iſt, jederzeit $v = \gamma f$, oder die Bewegung der Kugel wälzend ſeyn müſſe.

8) Man erhält demnach für Ebenen dieſer Art:

$$M \operatorname{Sin} I - R = \frac{Rf^2}{a^2}; \; M \operatorname{Sin} I = R(1 + \frac{f^2}{a^2}), \text{ alſo}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2gf \operatorname{Sin} I}{a^2 + f^2}, \; \frac{dv}{dt} = \frac{2gf^2 \operatorname{Sin} I}{a^2 + f^2}, \; v = \frac{2gtf^2 \operatorname{Sin} I}{a^2 + f^2},$$

und $x = \frac{gt^2 f^2 \operatorname{Sin} I}{a^2 + f^2}$.

9) So lange alſo die Neigung der Fläche klein genug iſt, daß die Kugel von ihr herabrollen kann, kommt die Größe der Friktion dabey gar nicht in Betracht; ſondern die Geſchwindigkeit derſelben verhält ſich dann allezeit zu der, womit ſie von der Fläche herabgleiten würde, wenn beyde vollkommen glatt wären, wie $1 : 1 + \frac{a^2}{f^2}$.

10) Wenn $\tang I > \lambda(1 + \frac{f^2}{a^2})$ iſt, ſo kann γ nicht mehr $= \frac{v}{f}$ bleiben, weil ſonſt $R > \lambda M \, Cos\, I$ ſeyn müßte. Daher wird für dieſen Fall $R = \lambda M$ $Cos\, I$, und folglich:

$$\frac{dv}{dt} = 2g\,(Sin\, I - \lambda\, Cos\, I),\ v = 2gt\,(Sin\, I - \lambda\, Cos\, I)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2\lambda gf\, Cos\, I}{a^2},\ \gamma = \frac{2\lambda gft\, Cos\, I}{a^2}.$$

§. 305.

Man ſieht leicht, daß ſtatt der Kugel jeder andere runde Körper angenommen werden könne, der durch ſeinen mittlern Querſchnitt in zwey gleiche und ähnliche Hälften getheilt wird.

Für die Kugel iſt (§. 212. 2.) $a^2 = \frac{2}{5} f^2$; alſo, ſo lange ihre Bewegung rollend bleibt, $v = \frac{10}{7} gt\, Sin\, I$; und wenn man den Neigungswinkel, bey dem ſie zu rollen aufhört, $= \varepsilon$ ſetzt, $\tang \varepsilon = \frac{7}{2}\lambda$. So wäre z. B. für $\lambda = \frac{1}{3}$, $\varepsilon = 49°24'$. Ferner wird bey größeren Neigungswinkeln

$$v = 2gt\,(Sin\, I - \lambda\, Cos\, I),\ \gamma = \frac{5\lambda gt\, Cos\, I}{f}.$$

Die Umdrehung wird dann zwar, wie vorhin, gleichförmig beſchleunigt, ſie richtet ſich aber zugleich nach der Größe der Friktion, und verhält ſich außerdem, wie der Koſinus der Schiefe, und verkehrt, wie der Halbmeſſer der Kugel. Das Fortrücken hingegen lei-

det durch die Friktion eben die Verzögerung, wie bey andern Körpern, deren Bewegung gleitend iſt.

Beym ſenkrechten Cylinder iſt $a^2 = \frac{1}{2} f^2$, mithin $\tang \varepsilon = 3\lambda$, und für Neigungswinkel, die kleiner als ε ſind, $v = \frac{4}{3} gt \operatorname{Sin} I$. Für ſolche aber, die zwiſchen ε und $90°$ fallen, $\gamma = \frac{4\lambda gt}{f}$.

Schwingung eines Pendels mit beweglicher Axe.

§. 306.

Bey der im achten Kapitel über den Pendelſchlag angeſtellten Unterſuchung haben wir die Axe, woran das Pendel aufgehängt wird, und ſeine Schwingungen verrichtet, als unbeweglich, und zugleich als eine Linie angenommen, die keine Ausdehnung hat. Beyde Vorausſetzungen waren dort nöthig, um nicht gleich Anfangs die Betrachtung durch Nebenumſtände zu erſchweren: ſie ſind aber keinesweges der Wahrheit vollkommen gemäß. Denn einmal muß die Axe, da ſie das ganze Gewicht des Pendels zu tragen hat, doch immer einige Dicke haben, und dann kann ſie auch nie von ihren Pfannen rings umher ſo eng eingeſchloſſen werden, daß ſich dadurch die ganze Bewegung auf eine bloße Umdrehung um ihre Mittelpunktslinie einſchränken ließe, indem ſonſt bey der geringſten Ausdehnung der Axe an ihrem Umfange eine Klemmung entſtehen würde, die die Umdrehung gänzlich verhinderte. Es

muß alſo nothwendig irgend ein Spielraum zwiſchen ihrem Umfange und der innern Fläche der Unterlage befindlich ſeyn, und dies veranlaßt, daß die Axe ſich nicht beſtändig über einerley Stelle dieſer Unterlage dreht, ſondern bald zur einen, bald zur andern Seite auf ihr fortrollt; welches auf die Bewegung des Pendels wenigſtens ſo vielen Einfluß hat, daß man ihn in Fällen, wo größere Genauigkeit, als gewöhnlich, erfordert wird, nicht außer Acht laſſen darf.

§. 307.

Fig. 42. **Aufgabe.** Es ſey der Durchſchnitt der Unterlage mit der Ebene des Schwunges ein Kreisbogen DAE, der in O ſeinen Mittelpunkt, und $OA = b$ zum Halbmeſſer hat. Das Pendel werde an ſeinem tiefſten Punkte A aufgehängt, und bekomme hierauf eine geringe Bewegung ſeitwärts. Man ſucht die Beſchaffenheit und Dauer ſeiner Schwingungen.

Aufl. 1) Anfangs wird alſo ein Schwerpunkt G, ſo wie der Mittelpunkt C ſeiner cylindriſchen Axe in die durch O gehende Vertikale AOG fallen; man nenne die Entfernung beyder Punkte $CG = a$, den Halbmeſſer der Axe $CA = c$, und den Zwiſchenraum $OC = b - c = e$.

2) Nach Verlauf einer Zeit t ſey das Pendel in die Lage cg gekommen, ſo daß jetzt ſein Schwerpunkt in g, der Mittelpunkt der Axe in c, und der Punkt a, wo Axe und Unterlage ſich berühren, in die Linie Oc fällt; ſo hat es ſich während dieſer Zeit nach der linken

Seite zu um die durch g gehende, auf die Fläche des Schwunges ſenkrechte, Axe um den Winkel $Glg = \varphi$ gedreht, und zugleicht iſt der Punkt c durch den Bogen Cc fortgerückt, dem am Mittelpunkte O der Winkel $COc = \omega$ zugehört. Daher iſt die Winkelgeſchwindigkeit des Pendels um jene Axe $\gamma = \frac{d\Phi}{dt}$, und die abſolute Geſchwindigkeit des Pendels $c = Oc \cdot \frac{d\omega}{dt} = e \cdot \frac{d\omega}{dt}$.

3) Mit dieſer Geſchwindigkeit dreht ſich c, wegen der vollendenden Bewegung der Axe, um den Unterſtützungspunkt a, und überhaupt beſteht die augenblickliche Bewegung des ganzen Pendels in einer Umdrehung um die durch a gehende Berührungslinie. Da nun ſeine Winkelgeſchwindigkeit um dieſe Linie eben dieſelbe ſeyn muß, als um die durch g damit parallel gezogene Axe (§. 296.), ſo hat man $\gamma c = e \cdot \frac{d\omega}{dt}$, oder $cd\Phi = ed\omega$; und weil Anfangs φ und $\omega = 0$ ſind, ſo iſt auch $c\Phi = e\omega$.

4) Um den Ort g des Schwerpunkts für die gegebene Zeit zu beſtimmen, fälle man aus g und c auf OG die Perpendikel gp, cq, und ſetze als Koordinaten deſſelben $Op = x$, $pg = y$. Nun iſt $cq = Oc \operatorname{Sin} \omega = e \operatorname{Sin} \omega$, $Oq = e \operatorname{Cos} \omega$, $cl = \frac{cq}{\operatorname{Sin} \Phi} = \frac{e \operatorname{Sin} \omega}{\operatorname{Sin} \Phi}$, $ql = cq \operatorname{Cot} \varphi = e \operatorname{Sin} \omega \operatorname{Cot} \Phi$, $lg = a - \frac{e \operatorname{Sin} \omega}{\operatorname{Sin} \Phi}$, $pg = lg \operatorname{Sin} \varphi = a \operatorname{Sin} \Phi - e \operatorname{Sin} \omega$, $pl = lg \operatorname{Cos} \Phi = a \operatorname{Cos} \Phi - e \operatorname{Sin} \omega \operatorname{Cot} \varphi$; alſo erhält man $x =$

$Oq + ql + pl = e \text{ Cos } \omega + a \text{ Cos } \varphi$, und $y = pg$ $= a \text{ Sin } \varphi - e \text{ Sin } \omega$.

5) Dieſe Gleichungen gelten allgemein für die Lage des Pendels bey jeder Abweichung deſſelben von der Vertikale. Wofern aber ſeine Schwingungen, wie wir hier annehmen wollen, in ſo kleinen Bogen geſchehen, daß man die Quadrate von φ und ω weglaſſen kann, ſo iſt es geſtattet, $\text{Sin } \varphi$ und $\text{Sin } \omega = \varphi$ und ω, und $\text{Cos } \varphi$, $\text{Cos } \omega = 1$ zu ſetzen. Unter dieſer Vorausſetzung wird daher: $x = a + e$, und $y = a\varphi - e\omega =$ $(a - c)\varphi$.

6) Die Kräfte, die auf das Pendel wirken, ſind außer ſeinem Gewichte M, womit es vom Schwerpunkte g aus nach der Vertikale, oder parallel Op, herabzuſinken ſtrebt: der Druck Π, den die Axe von der Unterlage nach der Normale ac leidet, und der Widerſtand der Reibung R, wodurch die Axe vom Herabgleiten nach der Tangente at zurückgehalten wird. Wiewohl die letztern beyden Kräfte nicht auf den Schwerpunkt gerichtet ſind, ſo weiß man doch aus §. 299, daß ſie eben den Einfluß auf das Fortrücken deſſelben haben, als wenn ſie nach parallelen Richtungen unmittelbar auf ihn angebracht wären.

7) Man zerlege nun den Druck Π in einen vertikalen, oder parallel mit pO, $= \Pi \text{ Cos } \omega = \Pi$, und in einen horizontalen, parallel mit $pg = \Pi \text{ Sin } \omega = \Pi\omega$; ferner die Friktion R in einen Theil, parallel mit $pO =$ $R \text{ Sin } \omega = R\omega$, und in einen, parallel mit $gp = R$ $\text{Cos } \omega = R$. Dieſe einzelnen Kräfte unter ſich, und

mit dem Gewichte M verbunden, geben nach Op die Kraft M — Π — Rω, und nach pg die Kraft Πω — R. Es entſtehen daher folgende Gleichungen:

$$\frac{d_2x}{dt^2} = \frac{2g}{M}(M - \Pi - R\omega),\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2g}{M}(\Pi\omega - R),$$

oder, da $x = a + e$, und $y = (a - c)\varphi$, alſo $\frac{d^2x}{dt^2} = o$, $\frac{d^2y}{dt} = (a - c)\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ iſt:

$M - \Pi - R\omega = o$, woraus $\Pi = M - R\omega$ folgt, und

$$(a - c)\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{2g}{M}(M\omega - R) = \frac{2g}{eM}[Mc\varphi - Re].$$

8) Es bleibt jetzt noch übrig, die Umdrehungsmomente der beyden Kräfte Π und R gegen die durch g gehende Axe des Pendels zu finden. Zu dem Ende zerlege man den Druck Π in einen nach $cg = \Pi \operatorname{Cos} acg = \Pi \operatorname{Cos}(\varphi + \omega)$, und in einen darauf ſenkrechten $= \Pi \operatorname{Sin}(\varphi + \omega) = \Pi(\varphi + \omega)$. Von dieſen iſt der letztere nur allein wirkſam, das Pendel um die erwähnte Axe zu drehen, und hat gegen ſie das Moment $a\Pi(\varphi + \omega)$. Ferner ſetze man, die Tangente at theile, rückwärts verlängert, die Linie cg in die Theile p und q. und ein Perpendikel aus g auf ſie gefällt, ſey $= w$, ſo hat man $c : p = w : q$, oder $wp = cq$, und $p + q = a$, alſo $(w + c)p = ca$. Außerdem iſt noch $c = p \operatorname{Cos}(\varphi + \omega) = p$, mithin $w + c = a$, $w = a - c$, und folglich das Moment der Friktion $R = R(a - c)$. Hiervon das erſtere, weil es dieſem entgegengeſetzt iſt, abgezogen, bleibt nach der Seite zu, wohin das Pendel

ſich dreht, das Moment $R\,(a-c) - a\Pi\,(\psi + \omega)$ übrig.

9) Wird demnach das Moment der Trägheit des Pendels für eben die Axe $= Mh^2$ geſetzt, ſo bekommt man:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{2g}{Mh^2}\,[R\,(a-c) - a\Pi\,(\varphi + \omega)]$$

oder, wenn man für $\frac{d\vartheta}{dt}$, ω und Π ihre Werthe $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, $\frac{c\varphi}{e}$ und $M - R\omega$ ſubſtituirt:

$$h^2 . \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{2g}{eM}\,[Re\,(a-c) - Ma\varphi\,(c+e)].$$

10. Dieſe Gleichung mit erſterer (7) verbunden, giebt:

$$Mh^2c\varphi - Reh^2 = Re\,(a-c)^2 - Mab\varphi\,(a-c),$$

woraus

$$Re = M\varphi\,.\left[\frac{h^2c + ab\,(a-c)}{h^2 + (a-c)^2}\right] \text{ folgt.}$$

11) Hierdurch verwandelt ſich jene Gleichung (7) in folgende:

$$\frac{e}{2g}.\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varphi\,.\left[\frac{(a-c)c - ab}{h^2 + (a-c)^2}\right] = -\varphi\left[\frac{c^2 + ae}{h^2 + (a-c)^2}\right].$$

Seʒt man nun der Kürze wegen $\frac{2g}{e}.\left(\frac{c^2 + ae}{h^2 + (a-c)^2}\right) = n^2$, multiplicirt beyde Seiten durch $d\varphi$, und integrirt alsdann, ſo wird:

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = C - n^2\varphi^2.$$

12) Die

12) Die Konſtante C beſtimmt ſich ans der Winkelgeſchwindigkeit des Pendels, die ihm Anfangs bey ſeiner vertikalen Lage mitgetheilt iſt. Nennt man nemlich dieſe $= \gamma$, ſo erhält man für $\varphi = 0$, $\gamma^2 = C$, mithin $\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \vartheta^2 = \gamma^2 - n^2\varphi^2$.

13) Für $\vartheta = 0$, wird $\varphi = \frac{\gamma}{n}$. Dies iſt alſo die größte Abweichung von der Vertikale OG, zu der das Pendel gelangt, oder die halbe Weite ſeines Schwingungsbogens: denn da $y = (a - c)\varphi$ (5), folglich $\frac{dy}{dt} = (a - c)\frac{d\varphi}{dt} = \vartheta\,(a - c)$ iſt, ſo hört mit ſeiner Umdrehung zugleich auch das Fortrücken ſeines Schwerpunkts auf.

14) Aus (12) bekommt man gegenſeitig:

$$ndt = \frac{nd\varphi}{\gamma\sqrt{\left(1 - \frac{n^2\varphi^2}{\gamma^2}\right)}},$$

$$\text{alſo: } t = \frac{1}{n}.\ \text{arc Sin}\ \frac{n\varphi}{\gamma}.$$

Hierin $\varphi = \frac{\gamma}{n}$ geſetzt, giebt die halbe Dauer der Schwingung

$$t = \frac{\pi}{2n} = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{e\,(h^2 + (a - e)^2)}{2g\,(c^2 + ac)}}.$$

§. 308.

1. Um den Unterſchied deutlicher wahrzunehmen,

der durch die Dicke und Bewegung der Axe in der Schwingungszeit hervorgebracht wird, wenn man die Länge des einfachen Pendels, das ſeine Schwingungen mit dem hier betrachteten in einerley Zeit verrichtet $= l$; ſo wird $t = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$, mithin $l = \frac{e(h^2 + (a - c)^2)}{c^2 + ae}$, und wenn man die Diſtanz AG des Schwerpunkts G vom Aufhängepunkte $A = f$ ſetzt, $a = f + c$, $ae + c^2 = ef + c(c + e) = ef + bc$; folglich $l = \frac{e(f^2 + h^2)}{ef + bc}$.

2. Wenn daher c abnimmt, wächſt l, und zwar, bey unendlicher Abnahme von c, bis zur Grenze $f + \frac{h^2}{f}$; welches eben der Werth iſt, den wir für l im §. 225. unter der Vorausſetzung, daß die Axe eine bloße Linie ſey, gefunden haben. Die Zeit der Schwingung iſt demnach für ein Pendel, deſſen Axe eine gegebene Dicke $= 2c$ hat, allemal kleiner, als wenn $c = 0$ wäre, und zwar in dem Verhältniſſe wie 1 zu $\sqrt{(1 + \frac{bc}{ef})}$.

3. Man ſieht daraus ferner, daß auch die Weite der Oeffnung, worin die Axe läuft, auf die Dauer der Schwingung einen ſehr merklichen Einfluß habe. Für $b = c$ wären l und $t = 0$, d. h. die Bewegung des Pendels würde gänzlich gehemmt, wie auch ſchon an ſich klar iſt. So wie aber b zunimmt, wird bey eben der Dicke der Axe zugleich e, folglich auch l größer,

und für ein unendliches b, oder für eine ebene Unterlage, erhält man $l = \frac{f^2 + h^2}{f + c}$.

Fernere Betrachtung der freyen Bewegung des Körpers, wenn die Kräfte, denen er ausgeſetzt iſt, willkührliche Richtungen haben.

§. 309.

Fig. 43. **Aufgabe.** Auf einen feſten Körper, deſſen Maſſe = M iſt, wirkt die Kraft V nach einer auf die Ebene AIB der beyden freyen Axen IA und IB ſenkrechten Richtung Ss; man ſucht, welche Aenderungen ſie während des Zeittheils dt in ſeiner Bewegung hervorbringt.

Aufl. 1) Es ſey S der Punkt, wo ihre Richtung in die Ebene AIB eintrift, und aus ihm SP, SQ auf IA und IB ſenkrecht; ſo ſind ihre Momente gegen dieſe beyden Axen = V . SP und V . SQ. Wir wollen ſie = P und Q, und die Momente der Trägheit des Körpers für eben die Axen = Ma^2 und Mb^2 ſetzen.

2) Die beyden Diagonalen SI und PQ des Rechtecks IPSQ halbiren einander in ihrem Durchſchnittspunkte O gegenſeitig; es würde alſo an der erſtern IS eine Kraft = V im Endpunkte I, parallel Ss, und die doppelte Kraft 2V in der Mitte O nach entgegengeſetzter Richtung oO angebracht, der gegebenen Kraft V das Gleichgewicht halten. Daher ſind eben die Kräfte V und 2V nach den umgekehrten Richtungen IC und

Oo ihr äquipollent, und können folglich für ſie ſubſti- tuirt werden.

3) Auf gleiche Art läßt ſich auch noch die Kraft 2V in die beyden Kräfte V und V auf die Endpunkte Q und P der Diagonale QP nach den parallelen Richtungen Qq und Pq vertheilen; ſo daß alſo ſtatt der einen Kraft V nach Ss drey andere Kräfte, jede $= V$ in den Punkten Q, P und I nach Qq, Pp und IC angebracht werden können, die in Verbindung eben die gegebene Kraft für ſich allein auf ihn ausübt. Wir wollen nun den Erfolg von dieſen drey Kräften der Reihe nach einzeln durchgehen.

4) Die Richtung Qq der erſtern fällt in die Ebene BIC der beyden freyen Axen IB und IC, und ihr Moment gegen die dritte IA iſt $= V \,.\, QI = V \,.\, SP = P$; daher vermehrt ſie während des Zeittheils dt die Winkelgeſchwindigkeit des Körpers um dieſe Axe um $\frac{2gPdt}{Ma^2}$ (§. 300. 2.), und ertheilt ihm zugleich in Anſehung ſeines Fortrückens eine Geſchwindigkeit nach Qq oder $CI = \frac{2gVdt}{M}$.

5) Eben ſo liegt die Richtung Pp der zweyten Kraft in der Ebene AIB der beyden freyen Axen IA und IC, und ihr Moment gegen die dritte IB iſt $= V \,.\, PI = V \,.\, SQ = Q$; alſo bewirkt ſie in der Winkelgeſchwindigkeit des Körpers um dieſe Axe eine Aenderung

$= \frac{2gQdt}{Mb^2}$, und beſchleunigt zugleich ſein Fortrücken nach Pp oder CI um $\frac{2gVdt}{M}$.

6) Die dritte Kraft hat auf die Umdrehung des Körpers, da ihre Richtung durch ſeinen Schwerpunkt I geht, keinen Einfluß; ſondern es entſteht bloß durch ſie während des Zeittheils dt nach der entgegengeſetzten Richtung IC die Geſchwindigkeit $= \frac{2gVdt}{M}$.

7) Alles dreyes unter ſich verbunden, giebt demnach die geſammte augenblickliche Wirkung der gegebenen Kraft; die alſo darin beſteht, daß ſie in den Winkelgeſchwindigkeiten des Körpers um die Axen IA und IB die Aenderungen $\frac{2gPdt}{Ma^2}$ und $\frac{2gQdt}{Mb^2}$ hervorbringt, und zugleich ſeine fortgehende Bewegung nach der Richtung CI, parallel der ihrigen Ss, um $\frac{4gVdt}{M} - \frac{2gVdt}{M}$ $= \frac{2gVdt}{M}$ beſchleunigt, d. h.

8) Der Körper wird durch dieſe Kraft auf gleiche Art gedreht, als wenn die beyden freyen Axen deſſelben IA und IB, einzeln genommen, befeſtigt wären, und ſein Schwerpunkt eben ſo fortgetrieben, als wenn durch ihn ihre Richtung unmittelbar durchginge.

§. 310.

Man ſetze nun, die Kraft wirke auf den Körper

nach jeder andern willkührlichen Richtung; ſo kann man ſie in drey andere Kräfte zerlegen, deren Richtungen mit den drey freyen Axen deſſelben IA, IB, IC parallel ſind, und nach vorigem §. die Wirkung jeder einzelnen auf ihn beſtimmen. Jede derſelben hat nemlich zwey Momente, und zwar gegen die beyden Hauptaxen, auf deren Ebene ſie ſenkrecht iſt; daher entſpringen aus ihr zwey Winkelgeſchwindigkeiten des Körpers um dieſe Axen, die den beyden Momenten proportional ſind. Es folgt alſo, daß man nur nöthig habe, die Momente gegen einerley Axe, z. B. gegen IA, von je zweyen zuſammen zu nehmen, und daß alsdann die geſammte Aenderung der Winkelgeſchwindigkeit des Körpers um IA dieſer Summe, als einfachem Momente, ebenfalls proportional ſey.

Heißen demnach P, Q, R die vereinigten Momente der erwähnten drey Kräfte gegen die drey Hauptaxen IA, IB und IC, und Ma^2, Mb^2, Mc^2, die Momente der Trägheit des Körpers für eben dieſe Axen, ſo ſind die augenblicklichen Aenderungen ſeiner Winkelgeſchwindigkeiten um dieſelben, die durch jene Kräfte hervorgebracht werden, $= \frac{2gPdt}{Ma^2}$, $\frac{2gQdt}{Mb^2}$ und $\frac{2gRdt}{Mc^2}$.

Außerdem wird aber auch noch die fortrückende Bewegung des Körpers eben ſo geändert, als wenn die gegebene Kraft nach paralleler Richtung unmittelbar auf ſeinen Schwerpunkt wirkte.

§. 311.

Fig. 44. **Aufgabe.** Der Körper drehe ſich im gegenwärtigen Augenblicke mit der Winkelgeſchwindigkeit $= \gamma$ um eine Axe IG, die mit ſeinen drey Hauptaxen IA, IB, IC die Winkel α, β, γ einſchließt; man ſucht die Aenderungen, die durch die Schwungkräfte ſeiner einzelnen Elemente während des nächſten Zeittheils dt in ſeiner Bewegung bewirkt werden.

Aufl 1) Die Schwungkraft eines ſolchen Elementes dM, deſſen Ort Z von der Axe IG um $Zr = r$ entfernt liegt, iſt $= \frac{\gamma^2}{2g} . rdM$, und ihre Richtung $rZ\varrho$ auf IG ſenkrecht. Um ſie nach den drey Richtungen Za, Zb, Zc, parallel den drey Hauptaxen des Körpers zerlegen zu können, ziehe man für den Punkt Z die rechtwinklichten Koordinaten $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$; ferner für r drey andere, mit jenen parallele, $Ip = X$, $pq = Y$, $qr = Z$, und überdies aus r und q auf YZ und XY die Perpendikel ro und qn; ſo zerfällt jene Kraft zunächſt in eine, parallel ro $= \frac{\gamma^2}{2g} . rdM \cos Zro = \frac{\gamma^2}{2g} . ro . dM$, und in eine darauf ſenkrechte, parallel $IC = \frac{\gamma^2}{2g} . Zo . dM$, wovon die erſtere noch eine, parallel $AI = \frac{\gamma^2}{2g} . dM . ro \cos Yqn = \frac{\gamma^2}{2g} . qndM$, und in eine darauf ſenkrechte, oder parallel $IB = \frac{\gamma^2}{2g} . YndM$ giebt.

2) Da nun $qn = X - x$, $Yn = y - Y$, $Zo = z - Z$, ſo ſind die Kräfte, die aus der Schwungkraft des Elementes dM entſpringen, folgende:

nach Za, parallel IA, die Kraft $= \frac{\gamma^2}{2g}(x-X)\,dM$

nach Zb . . IB . . . . $= \frac{\gamma^2}{2g}(y-Y)\,dM$

nach Zc . . IC . . . . $= \frac{\gamma^2}{2g}(z-Z)\,dM$.

3) Das Moment der erſtern gegen die Axe IB, nach der Seite CA zu, iſt $= \frac{\gamma^2}{2g}(x - X)\,z\,dM$, und gegen IC nach $BA = \frac{\gamma^2}{2g}(x - X)\,y\,dM$.

Das Moment der zweyten gegen IA nach $CB = \frac{\gamma^2}{2g}(y - Y)\,z\,dM$, und gegen IC nach $AB = \frac{\gamma^2}{2g}(y - Y)\,x\,dM$.

Das Mement der dritten gegen IA nach $BC = \frac{\gamma^2}{2g}(z - Z)\,y\,dM$, und gegen IB nach $AC = \frac{\gamma^2}{2g}(z - Z)\,x\,dM$.

4) Wenn man nun von dieſen Momenten jedes Paar, das ſich auf einerley Axe bezieht, verbindet, und für alle Elemente des Körpers ſummirt, ſo wird das geſammte Momene:

P aller Schwungkräfte gegen IA nach BC zu $= \frac{\aleph^2}{2g}$
$\int (zY - yZ)\, dM$

Q . . . . IB nach CA zu $= \frac{\aleph^2}{2g}$
$\int (xZ - zX)\, dM$

R . . . . IC nach AB zu $= \frac{\aleph^2}{2g}$
$\int (yX - xY)\, dM.$

5) Um die Werthe der Koordinaten X, Y, Z zu beſtimmen, nenne man vorläufig IM $= w$, und die Winkel qIA, rIq, wie oben (§. 281.) $= \eta$ und ϑ; ſo hat man Iq $= w \operatorname{Cos} \vartheta$, und qr $= w \operatorname{Sin} \vartheta$; ferner pq $=$ Iq $\operatorname{Sin} \eta = w \operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Sin} \eta$, Ip $=$ Iq $\operatorname{Cos} \eta = w \operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Cos} \eta$; folglich $X = w \operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Cos} \eta = w \operatorname{Cos} \alpha$, $Y = w \operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Sin} \eta = w \operatorname{Cos} \beta$, und $Z = w \operatorname{Sin} \vartheta = w \operatorname{Cos} \gamma$ (§. 287. 2.). Zugleich iſt aber (ebendaſ.) $w = x \operatorname{Cos} \alpha + y \operatorname{Cos} \beta + z \operatorname{Cos} \gamma$; alſo wird:

$$X = x \operatorname{Cos} \alpha^2 + y \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \beta + z \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \gamma$$
$$Y = x \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \beta + y \operatorname{Cos} \beta^2 + z \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \gamma$$
$$Z = x \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \gamma + y \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \gamma + z \operatorname{Cos} \gamma^2.$$

6) Dies für X, Y und Z in (4) ſubſtituirt, und, dem Erforderniſſe der freyen Axen gemäß, $\int xy\,dM$, $\int xz\,dM$ und $\int yz\,dM = 0$ geſetzt, giebt:

$$2gP = \aleph^2 \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \gamma \int (z^2 - y^2)\, dM$$
$$2gQ = \aleph^2 \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \gamma \int (x^2 - z^2)\, dM$$
$$2gR = \aleph^2 \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \beta \int (y^2 - x^2)\, dM.$$

7) Heißen nun, wie vorhin, die Momente der

Trägheit des Körpers in Beziehung auf die drey Hauptaxen = Ma^2, Mb^2 und Mc^2, ſo iſt (§. 287. 4.) $\int (z^2 - y^2) dM = C - B = (b^2 - c^2) M$, $\int (x^2 - z^2) dM = A - C = (c^2 - a^2) dM$, und $\int (y^2 - x^2) dM = B - A = (a^2 - b^2) M$, alſo:

$$2gP = \gamma^2 (b^2 - c^2) M \cos\beta \cos\gamma$$
$$2gQ = \gamma^2 (c^2 - a^2) M \cos\alpha \cos\gamma$$
$$2gR = \gamma^2 (a^2 - b^2) M \cos\alpha \cos\beta,$$

woraus innerhalb des Zeittheils dt um dieſe drey Axen die Winkelgeſchwindigkeiten $\frac{2gPdt}{Ma^2}$, $\frac{2gQdt}{Mb^2}$ und $\frac{2gRdt}{Mc^2}$ entſpringen.

8. Damit man erfahre, ob die Schwungkräfte auch Aenderungen in der fortrückenden Bewegung des Körpers veranlaſſen, müſſen noch die drey Kräfte (12) für alle Elemente deſſelben einzeln ſummirt werden. Die Summe der erſtern iſt $= \frac{\gamma^2}{2g} \int (x - X) dM$, und wenn man darin für X ſeinen Werth aus (5) ſetzt, wird darin das Integral $= \sin \alpha^2 \int xdM - \cos\alpha \cos\beta \int ydM - \cos\alpha \cos\gamma \int zdM = 0$, weil $\int xdM$, $\int ydM$, $\int zdM = 0$ ſind. Eben ſo findet man, daß auch die Summen der andern beyden Kräfte für ſich verſchwinden. Es folgt alſo, daß die Schwungkräfte auf das Fortrücken des Körpers gar keinen Einfluß haben.

§. 312.

Es mögen nun außerdem noch ſo viele Kräfte auf den Körper wirken, als man will, ſo kommen doch nur

in Hinſicht auf ſeine Umdrehung von jeder einzelnen Kraft die drey Momente gegen die drey Hauptaxen deſſelben in Betracht, und man findet ſolche nach §. 310., wenn man die Kraft in drey andere, parallel jenen Axen, zerlegt. Dieſe Momente kann man alsdann für jede Axe beſonders von allen Kräften zuſammennehmen, wodurch man alſo zuletzt drey einfache Momente P, Q, R erhält, denen die geſammte augenblickliche Wirkung aller Kräfte proportional iſt. Es ſind nemlich die Winkelgeſchwindigkeiten, die ſie mit Inbegriff der Schwungkräfte den Körper während des Zeittheils dt um ſeine drey Hauptaxen ertheilen, folgende:

$$\text{um die Axe IA} = \frac{2gPdt}{Ma^2} + \frac{(b^2-c^2)}{a^2} \cdot \gamma^2 \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\gamma\, dt$$

$$\ldots \text{IB} = \frac{2gQdt}{Mb^2} + \frac{(c^2-a^2)}{b^2} \cdot \gamma^2 \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\gamma\, dt$$

$$\ldots \text{IC} = \frac{2gRdt}{Mc^2} + \frac{(a^2-b^2)}{c^2} \cdot \gamma^2 \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta\, dt.$$

§. 313.

Aufgabe. Aus den gegebenen Momenten P, Q, R die augenblicklichen Aenderungen zu finden, die ſowohl die Winkelgeſchwindigkeit γ des Körpers, wie auch die Lage ſeiner Umdrehungsaxe IG gegen IA, IB und IC leidet.

Aufl. 1) Die Winkelgeſchwindigkeit γ, womit der Körper im gegenwärtigen Augenblicke ſich um die Axe IG drehet, zerfällt in drey andere um die drey Hauptaxen, $= \gamma \operatorname{Cos} \alpha$, $\gamma \operatorname{Cos} \beta$ und $\gamma \operatorname{Cos} \gamma$

(§. 291.), und die Aenderungen derſelben im nächſten dt ſind:

$$d(\text{♉}\,\mathrm{Cos}\,\alpha) = d\text{♉}\,\mathrm{Cos}\,\alpha - \text{♉}\,\mathrm{Sin}\,\alpha d\alpha$$
$$d(\text{♉}\,\mathrm{Cos}\,\beta) = d\text{♉}\,\mathrm{Cos}\,\beta - \text{♉}\,\mathrm{Sin}\,\beta d\beta$$
$$d(\text{♉}\,\mathrm{Cos}\,\gamma) = d\text{♉}\,\mathrm{Cos}\,\gamma - \text{♉}\,\mathrm{Sin}\,\gamma d\gamma.$$

2) Dieſe entſtehen nun theils durch die von außen auf den Körper wirkenden Kräfte, deren Momente P, Q, R gegen ſeine Hauptaxen gegeben ſind, theils aber auch durch die Schwungkräfte ſeiner einzelnen Elemente; daher müſſen ſie den im vorigen § gefundenen Winkelgeſchwindigkeiten gleich ſeyn. Man erhält alſo:

$$d\text{♉}\,\mathrm{Cos}\,\alpha - \text{♉}\,\mathrm{Sin}\,\alpha d\alpha = \frac{2gPdt}{Ma^2} + \frac{b^2-c^2}{a^2}\,.\,\text{♉}^2\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma dt$$

$$d\text{♉}\,\mathrm{Cos}\,\beta - \text{♉}\,\mathrm{Sin}\,\beta d\beta = \frac{2gQdt}{Mb^2} + \frac{c^2-a^2}{b^2}\,.\,\text{♉}^2\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\gamma dt$$

$$d\text{♉}\,\mathrm{Cos}\,\gamma - \text{♉}\,\mathrm{Sin}\,\gamma d\gamma = \frac{2gRdt}{Mc^2} + \frac{a^2-b^2}{c^2}\,.\,\text{♉}^2\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta dt.$$

3) Man multiplicire dieſe drey Gleichungen der Reihe nach durch Cos α, Cos β, Cos γ, und addire ſie dann zuſammen; ſo wird das erſte Glied der linken Seite $= d\text{♉}\,(\mathrm{Cos}\,\alpha^2 + \mathrm{Cos}\,\beta^2 + \mathrm{Cos}\,\gamma^2) = d\text{♉}$; das zweyte $= \text{♉}d\,(\mathrm{Cos}\,\alpha^2 + \mathrm{Cos}\,\beta^2 + \mathrm{Cos}\,\gamma^2) = 0$, und der Zähler des vordern Faktors vom letzten Gliede auf der rechten Seite: $b^4c^2 - c^4b^2 + c^4a^2 - a^4c^2 + a^4b^2 - b^4a^2 = (c^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-a^2)$, folglich:

$$d\mho = \frac{(c^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-a^2)}{a^2b^2c^2} \cdot \mho^2 dt \, \mathrm{Cos}\,\alpha \, \mathrm{Cos}\,\beta$$

$$\mathrm{Cos}\,\gamma + \frac{2gdt}{M}\left(\frac{P\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{a^2} + \frac{Q\,\mathrm{Cos}\,\beta}{b^2} + \frac{R\,\mathrm{Cos}\,\gamma}{c^2}\right)$$

worin außer $d\mho$ kein anderes Differenzial, als das der Zeit, vorkommt.

4) Um auch die Differenziale der Winkel α, β und γ abgeſondert zu erhalten, ſubſtituire man den für $d\mho$ gefundenen Werth in den erſtern drey Gleichungen, ſo bekommt man:

$$\mho\,\mathrm{Sin}\,\alpha\, d\alpha = \frac{c^2-b^2}{a^2} \cdot \mho^2 dt\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma\left(1 + \frac{(a^2-c^2)(b^2-a^2)}{b^2c^2}\mathrm{Cos}\,\alpha^2\right)$$

$$+ \frac{2gdt}{M}\left(\frac{Q\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta}{b^2} + \frac{R\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\gamma}{c^2} - \frac{P\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2}{a^2}\right)$$

$$\mho\,\mathrm{Sin}\,\beta\, d\beta = \frac{a^2-b^2}{c^2} \cdot \mho^2 dt\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\gamma\left(1 + \frac{(b^2-a^2)(c^2-b^2)}{a^2c^2}\mathrm{Cos}\,\beta^2\right)$$

$$+ \frac{2gdt}{M}\left(\frac{R\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma}{c^2} + \frac{P\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta}{a^2} - \frac{Q\,\mathrm{Sin}\,\beta^2}{b^2}\right)$$

$$\mho\,\mathrm{Sin}\,\gamma\, d\gamma = \frac{b^2-a^2}{c^2} \cdot \mho^2 dt\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta\left(1 + \frac{(c^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^2b^2}\mathrm{Cos}\,\gamma^2\right)$$

$$+ \frac{2gdt}{M}\left(\frac{P\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\gamma}{a^2} + \frac{Q\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma}{b^2} - \frac{R\,\mathrm{Sin}\,\gamma^2}{c^2}\right). \text{*)}$$

§. 314.

Ließen ſich dieſe vier Gleichungen unmittelbar integriren, ſo bekäme man dadurch $\mho$, α, β und γ, durch t ausgedrückt, d. h. man wüßte für jeden Zeitpunkt der Bewegung die Lage der Umdrehungsaxe gegen die drey Hauptaxen, und die Winkelgeſchwindigkeit, womit ſich

*) Eben dieſe Gleichungen findet Euler auf einem Wege, der von dem meinigen ganz verſchieden iſt. M. ſ. d. Theor. motus corp. ſolid. Cap. XV. pag. 346.

der Körper um dieſelbe drehete; allein da die veränderlichen Größen ϑ, α, β, γ ſelbſt in ihnen vorkommen, ſo ſind ſie zu dieſem Zwecke nicht brauchbar. Man nehme ſtatt deren wieder die erſtern drey Gleichungen (2), und ſetze darin die Winkelgeſchwindigkeiten des Körpers um ſeine Hauptaxen: $\vartheta \operatorname{Cos} n = x$, $\vartheta \operatorname{Cos} \beta = y$, $\vartheta \operatorname{Cos} \gamma = z$, ſo verwandeln ſie ſich in folgende:

$$dx + \frac{(c^2 - b^2)}{a^2} . yzdt = \frac{2gPdt}{Ma^2}$$

$$dy + \frac{(a^2 - c^2)}{b^2} . xzdt = \frac{2gQdt}{Mb^2}$$

$$dz + \frac{(b^2 - a^2)}{c^2} . xydt = \frac{2gRdt}{Mc^2}$$

Wo fern nun nicht etwa die Momente P, Q, R noch von den Winkeln α, β, γ abhängen, enthalten dieſe Gleichungen außer t bloß x, y und z als veränderliche Größen, und man kann ſie leicht ſo mit einander verbinden, daß jede dieſer Größen einzeln durch t ausgedrückt wird.

§. 315.

Wir wollen den Fall näher betrachten, wo der Körper keinen andern, als ſolchen Kräften ausgeſetzt iſt, deren Richtungen durch ſeinen Schwerpunkt gehen. Alsdann ſind folglich P, Q und R = o, und man erhält zunächſt aus den erſtern beyden Gleichungen:

$$\frac{(a^2 - c^2)}{b^2} . xdx - \frac{(c^2 - b^2)}{a^2} . ydy = o;$$

wovon das Integral

$$\frac{(a^2 - c^2)}{b^2} . x^2 - \frac{(c^2 - b^2)}{a^2} . y^2 = \text{const}$$ iſt.

Ferner aus der erſtern und dritten

$$\frac{(b^2 - a^2)}{c^2} . xdx - \frac{(c^2 - b^2)}{a^2} . zdz = 0,$$

oder $\frac{(b^2 - a^2)}{c^2} x^2 - \frac{(c^2 - b^2)}{a^2} z^2 = \text{Const.}$

Man ſetze nun, es ſey zu Anfange der Bewegung $x = e$, $y = f$, $z = h$ geweſen, und nenne außerdem zur Abkürzung:

$$\frac{a^2}{c^2 - b^2} = A, \quad \frac{b^2}{a^2 - c^2} = B, \quad \frac{c^2}{b^2 - a^2} = C;$$

ſo wird:

$$Ax^2 - By^2 = Ae^2 - Bf^2$$

$$Ax^2 - Bz^2 = Ae^2 - Ch^2,$$ mithin

$y\sqrt{B} = \sqrt{(Ax^2 - Ae^2 + Bf^2)}$, und $z\sqrt{C} = \sqrt{(Ax^2 - Ae^2 + Ch^2)}$.

Dieſe Werthe für y und z in die erſte Gleichung: $Adx + yzdt = 0$ ſubſtituirt, geben:

$$dt = \frac{- Adx\sqrt{BC}}{\sqrt{(Ax^2 - Ae^2 + Bf^2)(Ax^2 - Ae^2 + Ch^2)}}$$

woraus durch Integration gefunden wird, wie t von x, oder gegenſeitig x, y und z von t abhängt.

Hieraus ergiebt ſich dann ferner $\gamma = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$, und $\text{Cos}\,\alpha = \frac{x}{\gamma}$, $\text{Cos}\,\beta = \frac{y}{\gamma}$, $\text{Cos}\,\gamma = \frac{z}{\gamma}$.

§. 316.

Nachdem man auf ſolche Weiſe die drey Winkelgeſchwindigkeiten x, y und z durch die Zeit t beſtimmt hat, bleibt endlich noch übrig, auch die abſolute Lage des ganzen Körpers, oder die Abweichungen ſeiner Hauptaxen von dreyen unveränderlichen Richtungslinien für eben die Zeit t anzugeben. Am deutlichſten laſſen ſich dieſe Abweichungen als Bogen auf der Oberfläche einer Kugel darſtellen, die im Schwerpunkte des Körpers ihren Mittelpunkt hat, und mit demſelben zugleich fortrückt, oder dabey keine Umdrehung leidet, ſo daß ihre Halbmeſſer und größten Kreiſe ſich ſtets parallel bleiben, folglich im abſoluten Raume beſtändig einerley Lage behalten.

Fig. 45. 1) Es ſey AB der Bogen eines ſolchen größten Kreiſes; A ein beſtimmter Punkt in demſelben. Man ziehe aus den Punkten M, N und O, worin die Hauptaxen des Körpers bey ihrer gegenwärtigen Lage die Oberfläche der Kugel treffen, die Bogen MA, NA, OA, und ſetze dieſe $= l$, m, n. Ueberdies ſey noch der Winkel MAB $= \lambda$, NAB $= \mu$, OAB $= \nu$.

2) Im nächſten dt beſchreibt nun der Körper um die letztern beyden Axen, und mit ihm der Punkt M um N und O, die kleinen Bogenſtücke Mo $= y dt$, Mn $= z dt$, welches ſowohl in ſeiner Entfernung von A $= l$, wie auch im Winkel MAB $= \lambda$, die augenblicklichen Aenderungen dl und $d\lambda$ hervorbringt.

3) Um dieſe zu beſtimmen, ziehe man Mp und

nq auf AM ſenkrecht; ſo iſt $oMp = nMq = AMN$, und im Dreiecke AMN

$$\text{Cos } AMN = \frac{\text{Cos } AN - \text{Cos } AM \text{ Cos } MN}{\text{Sin } AM \text{ Sin } MN} = \frac{\text{Cos } m}{\text{Sin } l};$$

ferner $\text{Sin } AMN = \sqrt{\left(1 - \frac{\text{Cos } m^2}{\text{Sin } l^2}\right)} = \frac{1}{\text{Sin } l} \sqrt{}$ $[1 - (\text{Cos } l^2 + \text{Cos } m^2)], = \frac{\text{Cos } n}{\text{Sin } l}$, weil $\text{Cos } l^2 + \text{Cos } m^2 + \text{Cos } n^2 = 1$ iſt; mithin

$$dl = Mq - op = Mn \text{ Cos } nMq - Mo \text{ Sin } oMp = \frac{dt}{\text{Sin } l}(z \text{ Cos } m - y \text{ Cos } n)$$

oder $dl \text{ Sin } l = dt(z \text{ Cos } m - y \text{ Cos } n)$ und $d\lambda \text{ Sin } l = -(Mp + nq) = - Mo \text{ Cos } oMp - Mn \text{ Sin } nMq = - \frac{dt}{\text{Sin } l}(y \text{ Cos } m + z \text{ Cos } n)$, oder:

$$d\lambda \text{ Sin } l^2 = - dt(y \text{ Cos } m + z \text{ Cos } n)$$

4) Auf gleiche Art wird in Rückſicht der andern beyden Axen:

$dm \text{ Sin } m = dt(x \text{ Cos } n - z \text{ Cos } l)$; $dn \text{ Sin } n = dt(y \text{ Cos } l - x \text{ Cos } m)$; $d\mu \text{ Sin } m^2 = - dt(z \text{ Cos } n + x \text{ Cos } l)$; $d\nu \text{ Sin } n^2 = - dt(x \text{ Cos } l + y \text{ Cos } m)$.

5) Man kann dieſe Formeln noch dadurch vereinfachen, daß man $\text{Cos } l = p$, $\text{Cos } m = q$, $\text{Cos } n = r$ ſetzt; dies giebt nemlich $dp = dt(zq - yr)$, $dq = dt(xr - zp)$, $dr = dt(yp - xq)$, und $d\lambda(1 - p^2) + dt(yq + zr) = 0$, $d\mu(1 - q^2)$

$+ dt(zr + xp) = 0$; $d'(1 - q^2) + dt(xp + yq) = 0$.

Anmerk. Eine der vorzüglichſten Anwendungen deſſen, was in den letztern acht §§ hier vorgetragen iſt, gehört in die Aſtronomie, und betrifft die Aenderungen, die in der Lage der Erd- und Mondaxe durch die übrigen Himmelskörper unſeres Sonnenſyſtems hervorgebracht werden. Da aber dieſe Unterſuchungen, wenn ſie etwas mehr, als eine bloße Ueberſicht gewähren ſollen, weitläufige Rechnungen veranlaſſen, und dabey manche andere Kenntniſſe vorausſetzen, ſo ſehe ich mich genöthigt, ſie ganz zu übergehen, und desfalls auf Schriften zu verweiſen, die davon nach gegenwärtiger Theorie ausführlich handeln. Dahin gehören vorzüglich:

Schubert theoretiſche Aſtronomie, III. Th. Kap. 5 und 6.

Couſin, introduction a l'etude de l'Aſtronomie Phyſique. Par. 1787.

Euler Theor. mot. corp. rigid. Cap. XVI.

Eilftes Kapitel.

Von der Bewegung biegſamer und elaſtiſcher Körper.

---

§. 317.

Die biegſamen und elaſtiſchen Körper unterſcheiden ſich darin weſentlich von den feſten Körpern, daß ſie ſich an jeder Stelle, und nach allen Seiten zu, mehr oder weniger krümmen laſſen, ohne daß dadurch der Zuſammenhang ihrer Theile aufgehoben wird; daher denn bey der Bewegung derſelben nicht bloß in ihrer Lage

überhaupt, wie bey feſten Körpern, ſondern auch in den gegenſeitigen Lagen ihrer einzelnen Theile unter ſich, Aenderungen der mannigfaltigen Art denkbar ſind. Aus dieſem Grunde iſt nicht leicht vorauszuſehen, wie ſich ihre Bewegung unter ein ſolches allgemeines Geſetz bringen ließe, das jede Geſtalt und nachmalige Verwandlung derſelben in ſich ſchlöſſe; auch haben **Euler** und **Bernoulli**, die Einzigen, die bisher dieſen Zweig der Mechanik mit glücklichem Erfolge bearbeitet haben, uns bloß einzelne Bruchſtücke davon geliefert, die ſich größtentheils nur auf Bewegungen biegſamer Körper von cylindriſcher oder priſmatiſcher Form in einer Ebene beziehen, wobey alſo ihre Krümmung von einfacher Art bleibt. Indeß iſt doch auch ſchon hierbey die Verſchiedenheit der Umſtände ſo groß, und die Anwendung davon ſo einfach, daß wir zur Vermeidung zu großer Weitläuftigkeit uns nothwendig auf dieſen beſondern Fall einſchränken müſſen.

§. 318.

Vollkommen biegſam könnte man denjenigen Körper nennen, bey dem die geringſte Kraft hinreichend wäre, ihm allenthalben, und nach allen Seiten zu, jede beliebige Krümmung zu geben. Dieſe Eigenſchaft kann aber im ſtrengen Verſtande nur einer biegſamen Linie zukommen: denn wofern der Körper irgend eine angebliche Dicke hat, müſſen nothwendig bey ſeiner Biegung die an der konvexen Seite befindlichen Theile ſich ausdehnen, welches ohne Anwendung von Kraft nicht

geſchehen kann. Iſt der Körper überdies elaſtiſch, ſo wird auch noch Kraft erfordert, ihn in dem gekrümmten Zuſtande, worin er bereits verſetzt iſt, ferner zu erhalten; oder, die Elaſticität hält alsdann der biegenden Kraft das Gleichgewicht. Es iſt im neunten Kapitel der Statik bey Beſtimmung der reſpektiven Feſtigkeit elaſtiſcher Körper gezeigt worden, daß bey gleicher Dicke des Körpers das Moment dieſer Kraft gegen irgend eine Stelle deſſelben ſich verkehrt, wie der Halbmeſſer der Krümmung verhalte, die der Körper an dieſer Stelle bekommen hat; heißt alſo r der Krümmungshalbmeſſer für ein Element bey Y der elaſtiſchen Kurve AYD, ſo läßt ſich das Moment der Elaſticität dieſes Elementes allgemein durch $\frac{E}{r}$ ausdrücken, wo E eine beſtändige Größe bedeutet, die für jede beſondere Materie und Form des Körpers durch Verſuche gefunden werden muß.

§. 319.

Aufgabe. Auf jedes Element $= ds$ eines elaſtiſchen Körpers, der allenthalben gleiche Dicke hat, wirkt eine Kraft $= pds$, parallel mit AX, und eine andere, darauf ſenkrechte, oder nach XY, $= qds$; außerdem ſind noch an ſeinem Endpunkte A zwey Kräfte F und G nach entgegengeſetzten Richtungen Aa und Aα angebracht; man ſucht die Kurve AYD, worin der Körper durch dieſe Kräfte, nachdem ſie ſich mit ſeiner Elaſticität ins gleichgewicht geſetzt haben, gebogen ſeyn wird.

Fig. 46. Aufl. 1) Man nehme die Richtung AB der Elementarkräfte $p ds$ zur Abſciſſenlinie der Kurve AYD an, und ſetze als Koordinaten des Punktes Y, $AX = x$, $XY = y$. Für einen andern beliebigen Punkt y dieſer Kurve ſey $Ax = x'$, $xy = y'$, und von den beyden Kräften, die auf das daſelbſt befindliche Element ds wirken, ſey die nach $yo = p' ds$, die nach $yr = q' ds$.

2) Die erſtere ſtrebt den Bogen yY um den Punkt Y nach innen zu drehen, oder den Körper an der Stelle Y ferner zu krümmen, und hat gegen dieſen Punkt das Moment:

$$Yo \,.\, p' ds = (y - y') \, p' ds.$$

3) Die Summe der Momente dieſer einzelnen Kräfte $p' ds$ gegen Y iſt daher $= \int (y - y') \, p' ds$, oder weil hierbey y als unveränderlich betrachtet werden muß, $= y \int p' ds - \int y' p' ds$.

4) Setzt man nun hierin $y' = y$, ſo wird auch $p' = p$, folglich das geſammte Moment aller nach AB gerichteten Kräfte, die auf den Bogen AY wirken, um ihn am Punkte Y zu drehen, $= y \int p ds - \int y p ds$.

5) Man nenne die Summe dieſer Kräfte $\int p ds = P$, ſo erhält man $p ds = dP$. Hierdurch wird alſo das gefundene Moment $= yP - \int y dP = \int P dy$; oder, wenn man darin den Werth für P wieder herſtellt, $= \int dy \int p ds$.

6) Die andere Kraft $q' ds$ hat dagegen das Beſtreben, den Bogen yY um den Punkt Y auswärts zu drehen, und ihr Moment gegen denſelben iſt:

$$rY \cdot q'ds = xXq'ds = (x - x')\, q'ds$$

Hiervon die Summe genommen, und darin $x' = x$ geſetzt, giebt das ſämmtliche Moment aller dieſer Kräfte, ſo viel deren auf den Bogen AY wirken, ihn um den Punkt Y nach außen zu drehen, $= x\int qds - \int xqds$, welches ſich auf gleiche Art, wie (5) gezeigt iſt, in $\int dx \int qds$ verwandelt.

7) Letzteres Moment vom erſtern (5), dem es entgegengeſetzt iſt, abgezogen, bleibt:

$$\int dy \int pds - \int dx \int qds$$

für das Moment der Kräfte beyder Art gegen den gemeinſchaftlichen Punkt Y.

8) Hiermit vereinigen ſich endlich noch die Momente Fy und Gx der Kräfte F und G gegen den Punkt Y, die aber gleichfalls einander entgegengeſetzt ſind, weil F und G den Bogen AY nach verſchiedenen Seiten um Y zu drehen ſtreben. Nach Abzug der erſtern bleibt alſo von beyden noch $Gx - Fy$ übrig, und dies zum vorhin erhaltenen Momente addirt, giebt:

$$Gx - Fy + \int dy \int pds - \int dx \int qds.$$

9) Soll nun am Punkte Y keine fernere Biegung erfolgen, ſo muß die Elaſticität des Elementes an dieſer Stelle allen den Kräften, die auf den Bogen AY wirken, das Gleichgewicht halten, folglich ihr Moment $\frac{E}{r}$ (§. 318.) den Momenten dieſer Kräfte zuſammen genommen gleich ſeyn. Man bekommt daher die Gleichung:

$$Gx - Fy + \int dy \int pds - \int dx \int qds = E\left(\frac{dyd^2x - dxd^2y}{ds^3}\right),$$

wodurch die Geſtalt der Kurve verlangtermaßen beſtimmt wird.

§. 320.

Bey der eben gefundenen Gleichung liegt, wie man ſieht, die Vorausſetzung zum Grunde, daß die elaſtiſche Ruthe in ihrem natürlichen Zuſtande gerade ſey; indeß läßt ſie ſich doch auch leicht auf den allgemeinern Fall ausdehnen, wenn die Ruthe vor der Biegung jede willkührlich gekrümmte Form hat. Es entſteht nemlich dadurch weiter keine Aenderung als in dem Momente der Elaſticität, das nun offenbar nicht mehr für irgend eine Stelle Y der ganzen Krümmung, die nach der Biegung daſelbſt erfolgt, proportional bleiben kann.

Fig. 47. Man ſetze den Krümmungshalbmeſſer für den Endpunkt Y des Bogens AY = s bey der anfänglichen Geſtalt der Ruthe = R, bey der nachmaligen, die ſie durch die Biegung annimmt, = r; ſo iſt die natürliche Länge des Streifen $p\pi p'\pi'$, der in der Höhe Yp = u über Y liegt, und mit dem Elemente Yy = ds einerley Amplitude YOy hat, $= ds\left(1 + \frac{u}{R}\right)$, und die Länge eben dieſes Streifen im letztern Falle $= ds\left(1 + \frac{u}{r}\right)$; alſo ſeine Ausdehnung $\varepsilon ds - uds\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$.

Nennt man nun ferner den Querſchnitt dieſes Streiſen $= ds$, ſo läßt ſich ſeine zuſammenziehende Kraft, die ſowohl dem Koefficienten der Ausdehnung ε, als auch der Fläche dS proportional iſt, durch $KudS \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$ ausdrücken. Ihr Moment gegen den Punkt Y iſt ſodann $= Ku^2dS \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$, und das Integral davon, oder das ſämmtliche Moment der Elaſticität der Stelle $Y = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) K\int u^2 dS$.

Für den beſondern Fall, wo die Ruthe Anfangs gerade iſt, wird $\frac{1}{R} = 0$, alſo $K\int u^2dS = E$, und daher überhaupt das Moment der Elaſticität $= E \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$. Dies für $\frac{E}{r}$ in die Gleichung (§. 319. 9.) geſetzt, giebt allgemein:

$$Gx - Fy + \int dy \int pds - \int dx \int qds = E \left(\frac{dyd^2x - dxd^2y}{ds^3}\right) - \frac{E}{R},$$

wo R aus der anfänglichen Geſtalt der Ruthe gegeben iſt.

§. 321.

Für den bloß biegſamen Faden iſt $E = 0$, mithin:

$$\int dy \int pds - \int dx \int qds = Fy - Gx.$$

Um auch zugleich ſeine Spannung T an irgend einer Stelle Y zu beſtimmen, nenne man den Winkel, den

die Tangente an Y mit der Ordinate XY macht, $= \varphi$; ſo geben die beyden Kräfte pds und qds, nach den Richtungen der Tangente und Normale zerlegt, zuſammen eine Tangentialkraft nach der Axe AB zu $= - pds \sin\varphi - qds \cos\varphi$, und eine Normalkraft nach außen zu $= - pds \cos\varphi + qds \sin\varphi$. Daher wird (Statik §. 169.):

$$dT = - pds \sin\varphi - qds \cos\varphi$$

$$Td\varphi = - pds \cos\varphi + qds \sin\varphi.$$

Man multiplicire erſtere Gleichung durch $\sin\varphi$, letztere durch $\cos\varphi$, und addire alsdann beyde, ſo erhält man:

$$dT \sin\varphi + T \cos\varphi d\varphi = - pds,$$

wovon das Integral $T \sin\varphi = \text{Conſt} - \int pds$ iſt.

Für den Anfangspunkt A ſey nun $T = H$, $\varphi = \alpha$; alſo, da das Integral $\int pds$ für dieſen Punkt verſchwindet:

$$H \sin\alpha = \text{Conſt}.$$

Die Spannung H wird bloß durch die Kräfte F und G hervorgebracht, und entſpringt folglich aus der Zuſammenſetzung beyder. Daher hat man $H \sin\alpha = F$, $H \cos\alpha = G$, mithin $\text{Conſt} = F$, und

$$T \sin\varphi = F - \int pds.$$

Man multiplicire ferner die erſtere obiger Gleichungen durch $\cos\varphi$, die letztere durch $\sin\varphi$, und ſubtrahire dann beyde von einander, ſo bleibt:

$$dT \cos\varphi - T \sin\varphi d\varphi = - qds,$$

woraus durch Integration:

$$T \cos\varphi = G - \int qdt \text{ folgt.}$$

Beyde Werthe T Sin φ und T Cos φ mit einander verbunden, geben ſodann:

$$T = F \operatorname{Sin}\varphi + G \operatorname{Cos}\varphi - \operatorname{Sin}\varphi \int pds - \operatorname{Cos}\varphi \int qds$$

$$= F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} - \frac{dx}{ds}\int pds - \frac{dy}{ds}\int qds.$$

§. 322.

Wenn man noch die beyden zuletzt erhaltenen Integral-Gleichungen durch Cos φ und Sin φ multiplicirt, ſo erhält man aus der erſtern

$$T \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi = F \operatorname{Cos}\varphi - \operatorname{Cos}\varphi \int pds,$$

und aus der letztern:

$$T \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi = G \operatorname{Sin}\varphi - \operatorname{Sin}\varphi \int qds, \text{ mithin}$$

$$F \operatorname{Cos}\varphi - \operatorname{Cos}\varphi \int pds = G \operatorname{Sin}\varphi - \operatorname{Sin}\varphi \int qds, \text{ oder}$$

$$Fdy - Gdx = dy \int pds - dx \int qds,$$

woraus durch Integrirung eben die Gleichung für die Geſtalt des Fadens entſteht, die wir (§. 321.) aus der allgemeinern Formel abgeleitet haben. Es zeigt ſich alſo hier zwiſchen beyden Methoden eine vollkommene Uebereinſtimmung, von denen doch die letztere, da ſie ſich bloß auf die Theorie der Spannungen gründet, mit erſterer nichts gemein hat.

§. 323.

Fig. 48. **Aufgabe.** Wofern die im §. 319. angenommenen Kräfte mit der Elaſticität des Körpers nicht ins Gleichgewicht treten können, ſo daß der Körper durch ſie wirklich in Bewegung geſetzt wird, alsdann für jede verfloſſene Zeit t ſowohl die Geſtalt deſſelben AYD,

wie auch die Geſchwindigkeit jedes ſeiner einzelnen Elemente anzugeben.

Aufl. 1) Es ſey Y der Ort, wohin das am Endpuncte des Bogens AY = s befindliche Elemente Yy = ds, deſſen Maſſe m heißen mag, nach Verlauf der Zeit t gelangt iſt; man ſetze als Coordinaten deſſelben, von einem beſtimmten Puncte O der unbeweglichen Linie OB angerechnet, OX = x, XY = y; ſo ſind x und y veränderliche Größen, die theils vom Bogen s, theils von der Zeit t abhängen. Von s nemlich, inſofern für einen beſtimmten Zeitpunct jedem einzelnen Elemente zwey beſondere Coordinaten zugehören; und von t deshalb, weil der Endpunct eines beſtimmten Bogens in jedem folgenden Zeittheile an einem andern Orte ſich befindet.

2) Da alſo für einerley Bogenlänge s das Wachsthum der Größen x und y bloß vom Wachsthum der Zeit herrührt, ſo ſind die Geſchwindigkeiten des gedachten Elementes nach den beyden Richtungen Yo und Yr die partiellen Differenzialquotienten von x und y nach t genommen, oder $= \left(\frac{dx}{dt}\right)$ und $\left(\frac{dy}{dt}\right)$. Wir wollen ſie v und u nennen.

3) Ihre Aenderungen dv und du im nächſten Zeittheile dt ſetzen voraus, daß das Element m nach obigen Richtungen durch zwey Kräfte $= \frac{m}{2g}\left(\frac{dv}{dt}\right)$ und $\frac{m}{2g}\left(\frac{du}{dt}\right)$ beſchleunigt werde. Es ſey die Maſſe des

ganzen Körpers = K, ſeine Länge AD = a, ſo iſt, wegen der gleichen Dicke deſſelben, $m = \frac{Kds}{a}$, und folglich:

$$\frac{m}{2g}\left(\frac{dv}{dt}\right) = \frac{Kds}{2ag}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right); \quad \frac{m}{2g}\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{Kds}{2ag}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right).$$

4) Wofern alſo dieſe beyden Kräfte auf jedes einzelne Element nach den Richtungen Yo und Yr wirkten, würde die Bewegung des ganzen Körpers eben ſo erfolgen, wie ſie durch die in der Aufgabe gegebenen Kräfte wirklich hervorgebracht wird. Alſo müſſen ſolche den gegebenen Kräften in einerley Zeitpunkte der Bewegung äquipollent ſeyn, und folglich nach umgekehrter Richtung ihnen das Gleichgewicht halten.

5) Es muß daher der ganze Körper im Gleichgewichte ſeyn, wenn an ſeinem Endpunkte A nach den Richtungen Aa und Aα die Kräfte F und G ziehen, und außerdem jedes ſeiner Elemente den beyden Kräften

$pds - \frac{Kds}{2ag}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$ nach Yo, und $qds - \frac{Kds}{2ag}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$ nach Yr ausgeſetzt iſt.

6) Setzt man demnach $p - \frac{K}{2ag}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = p'$, $q - \frac{K}{2ag}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = q'$, und überdies den Krümmungshalbmeſſer für den Endpunkt des Bogens AY bey der anfänglichen Geſtalt des Körpers = R, ſo bekommt man folgende Gleichung:

$$Gx - Fy + \int dy \int p' ds - \int dx \int q' ds = E \left(\frac{dy d^2x - dx d^2y}{ds^3}\right) - \frac{E}{R};$$

woraus ſich alles herleiten läßt, was von der Bewegung des Körpers zu wiſſen verlangt wird.

Von der Schwingung der Saiten.

§. 324.

Fig. 49. Eine gleichdicke Saite AB, die an ihren Endpunkten A und B befeſtigt, und mit einer Kraft $= \Pi$ geſpannt iſt, werde auf irgend eine Art, entweder durch Anſchlagen, oder indem man ſie erſt zur Seite biegt, und dann wieder losläßt, in Bewegung gebracht.

Es iſt willkührlich, wovon man die Zeit der Bewegung anrechnet; indeß wollen wir hier, der Beſtimmtheit wegen, dazu den Augenblick wählen, wenn die ganze Saite ihre natürliche geradlinigte Geſtalt AxB wieder bekommen hat. Da hier nur von ſehr kleinen Schwingungen die Rede iſt, ſo kann man füglich annehmen, daß die Ausweichungen jedes einzelnen Punktes der Saite von ſeinem anfänglichen Orte x in der auf AxB ſenkrechten Linie xy geſchehen, oder daß ſeine Geſchwindigkeit $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ längs der Axe AB, $= 0$ ſey. Aus eben dem Grunde iſt es auch geſtattet, die Ausdehnung der Saite während der Bewegung außer Acht zu laſſen; alſo die Länge des Bogens $Ay = s$, der Abſciſſe $Ax = x$ gleich zu ſetzen.

Es ſey demnach y der Ort, wohin der Punkt x nach Verlauf der Zeit t gelangt iſt; der durchlaufene Raum xy, als Ordinate, die zur Abſciſſe Ax = x gehört, = y. Ferner ſey die ganze Länge der Saite AB = a, und ihre Maſſe, oder Gewicht = K.

Was endlich die Kräfte betrifft, denen die Saite während ihrer Bewegung ausgeſetzt iſt, ſo rühren dieſe bloß von ihrer Befeſtigung her, und ſind

1) die Spannkraft = Π, wodurch ſie bey A und B nach den entgegen geſetzten Richtungen Aa und Bb gezogen wird, und

2) eine darauf ſenkrechte Kraft; womit der feſte Punkt A ſeitwärts, nach der Richtung Aa, ſie zurückhält. Sie iſt nicht, wie die Spannung Π, unveränderlich, ſondern richtet ſich nach der langſamern oder ſchnellern Bewegung der Saite, und hängt deshalb von der Zeit t ab. Wir wollen ſie, wie oben geſchehen iſt, = G ſetzen.

Nach dieſen vorläufigen Erinnerungen hat man nun gegenwärtig: $E = o$, $F = \Pi$, $p = o$, $q = o$, $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = o$, und $x = s$, alſo

$$p' = o,\ q' = -\frac{K}{2ag}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right);$$ daher wird:

$$Gs - \Pi y + \frac{K}{2ag}\int ds \int ds \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = o.$$

§. 325.

Wenn man dieſe Gleichung zweymal nach s diffe-

renziirt, ſo bekommt man, weil G von s unabhängig, alſo hierbey unveränderlich iſt:

$$\frac{K}{2ag}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \Pi\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) = o,$$

oder, $\frac{2ag\Pi}{K} = c^2$ geſetzt:

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = c^2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right).$$

Um hiervon das vollſtändige Integral zu erhalten, betrachte man y als eine Funktion φu von einer neuen veränderlichen Größe u, die von t und s auf irgend eine Art abhängen mag, und ſetze der Kürze wegen $\frac{d\,.\,\varphi u}{du} = \varphi' u$, $\frac{d\varphi' u}{du} = \varphi'' u$; ſo wird:

$$dy = \varphi' u\,.\,du = \varphi' u\left[\left(\frac{du}{ds}\right)ds + \left(\frac{du}{dt}\right)dt\right],$$

folglich:

$$\left(\frac{dy}{ds}\right) = \left(\frac{du}{ds}\right)\varphi' u, \text{ und } \left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{du}{dt}\right)\varphi' u;$$

alſo ferner:

$$\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) = \left(\frac{d^2u}{ds^2}\right)\varphi' u + \left(\frac{du}{ds}\right)^2\varphi'' u, \text{ und}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)\varphi' u + \left(\frac{du}{dt}\right)^2\varphi'' u, \text{ mithin:}$$

$$\left[\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) - c^2\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right)\right]\varphi' u + \left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - c^2\left(\frac{du}{ds}\right)^2\right]\varphi'' u = o.$$

Dieſe Gleichung wird erfüllt, wenn man

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) - c^2\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right) = o, \text{ und}$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - c^2\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = o \text{ ſetzt.}$$

Aus Letzterm folgt: $c\left(\frac{du}{ds}\right) = \mp\left(\frac{du}{dt}\right)$; dem auf die einfachſte Art Genüge geleiſtet wird, wenn man $\left(\frac{du}{dt}\right) = c$, und $\left(\frac{du}{ds}\right) = \mp 1$ annimmt. Hieraus entſpringt durch Integrirung:

$$u = ct + M, \text{ und } u = N \mp s$$

wo M eine Funktion von s, und N eine Funktion von t ſeyn kann.

Läßt man nun erſtere für $s = o$, und letztere für $t = o$ verſchwinden, ſo erhält man $N = ct$, und $M = \mp s$, wodurch dann $u = ct \mp s$, und folglich allgemein:

$$y = \varphi(ct + s) + \psi(ct - s) \text{ wird.}$$

§. 326.

Da für den Anfangspunkt A, oder für $s = o$, auch $y = o$ ſeyn muß, ſo bekommt man

$$o = \varphi.ct + \psi.ct, \text{ oder } \psi.ct = -\varphi.ct;$$

alſo ſtehen dieſe beyden Funktionen in einer ſolchen Beziehung gegen einander, daß ihre Werthe, für einerley Werth der veränderlichen Größe, allemal einander gleich und entgegengeſetzt ſind; daher iſt auch überhaupt:

$$\psi(ct-s) = -\varphi(ct-s), \text{ mithin}$$
$$y = \Phi(ct+s) - \varphi(ct-s).$$

Ferner muß auch für das andere Ende B, oder für $s = a$, $y = o$ ſeyn; alſo hat man zur zweyten Bedingung:

$$o = \varphi(ct+a) - \varphi(ct-a),$$
$$\text{oder: } \Phi(ct+a) = \varphi(ct-a).$$

Um die Forderung, die in dieſer Gleichung enthalten iſt, noch einfacher darzuſtellen, ſetze man $ct - a = z$, ſo wird $ct + a = z + 2a$, folglich $\varphi(z+2a) = \varphi z$. Es muß alſo die Funktion φz von ſolcher Beſchaffenheit ſeyn, daß ſie wieder eben den Werth bekommt, nachdem die veränderliche Größe z in ihr um 2a gewachſen iſt.

§. 327.

Nach Verlauf einer Zeit $t' = t + \frac{2a}{c}$ iſt demnach jeder einzelne Punkt y der Saite wieder an eben den Ort, wo er ſich zur Zeit t befand, zurückgekehrt; daher hat man für die Dauer einer ganzen Schwingung derſelben: $t' - t = \frac{2a}{c}$. Wenn nemlich xy die größte Ausweichung des Punktes x aus ſeiner natürlichen Lage x bedeutet, ſo verfließt die Zeit $\frac{2a}{c}$, bevor derſelbe aus y durch x zur andern Seite der Abſciſſenlinie AxB übergegangen, und von dort wieder denſelben Weg bis y rückwärts durchlaufen iſt.

§. 328.

1. Da $c^2 = 2ag \cdot \frac{\Pi}{K}$ iſt (§. 325.), ſo wird, wenn wir die ganze Dauer einer Schwingung T nennen:

$$T = \sqrt{\frac{2aK}{g\Pi}}.$$

Alſo verhält ſich die Schwingungszeit einer Saite direkt, wie die Quadratwurzel aus ihrer Länge und ihrem Gewichte, und verkehrt, wie die Quadratwurzel aus der Spannung derſelben.

2. Es ſey n die Anzahl der Schwingungen, die ſie binnen einer Sekunde verrichtet, ſo hat man T : 1″ = 1 : n, folglich:

$$n = \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{g\Pi}{2aK}}.$$

3) Setzt man das Gewicht der Saite für die Länge = 1, = $\varkappa$, ſo wird ihr ganzes Gewicht K = aK, mithin:

$$n = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{g\Pi}{2K}};$$

daher verhält ſich bey unveränderter Spannung einer und derſelben Saite die Anzahl ihrer Schwingungen in einer Sekunde verkehrt, wie ihre Länge; worauf ſich die bekannte Einrichtung des Monochordes gründet.

Von der Schwingung elaſtiſcher Ruthen und Klingen.

§. 329.

Für ſehr geringe Schwingungen einer elaſtiſchen

Ruthe AB, die im natürlichen Zuſtande geradlinigt iſt, gelten wieder dieſelben Vorausſetzungen, daß $s = x$, und $\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$ ſey. Da nun außerdem $p = 0$, $q = 0$, und wegen der anfänglichen geraden Geſtalt der Ruthe, auch $R = 0$ iſt, ſo verwandelt ſich in gegenwärtigen Falle die allgemeine Gleichung (§. 323.) in folgende:

$$Gs - Fy + \frac{K}{2ag}\int ds \int ds \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -E\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right),$$

woraus durch zweymaliges Differenziiren nach s die Gleichung

$$\frac{K}{2ag}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = F\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) - E\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right) \text{ entſpringt.}$$

§. 330.

Fig. 50. **Aufgabe.** Es ſey das eine Ende A der elaſtiſchen Ruthe in eine Wand eingeſchloſſen, und das andere Ende B frey. Man fragt, wie groß unter dieſen Umſtänden die Dauer ihrer Schwingungen ſeyn werde.

Aufl. 1) Nach Verlauf der Zeit t ſey der Punkt x bis y fortgerückt, ſo daß alsdann die ganze Ruthe die gekrümmte Form AyD angenommen hat. Man nehme in B den Anfangspunkt der Abſciſſen, und ſetze $Bx = x$, $xy = y$.

2) Da auf den Punkt B keine Kräfte wirken, ſo hat man hier $F = 0$, $G = 0$, folglich:

$$\frac{K}{2ag}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -E\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right),$$

oder, wenn man $\frac{2agE}{K} = c^4$ ſetzt:

$$c^4 \left(\frac{d^4y}{ds^4}\right) = -\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right).$$

3) Wegen der Differenzialgröße vom vierten Grade linker Hand müßte das vollſtändige Integral dieſer Gleichung eigentlich vier unbeſtimmte Funktionen von s und t in ſich faſſen: man hat aber bis jetzt noch kein Mittel entdeckt, daſſelbe in dieſer allgemeinen Form darſtellen zu können. Indeß beruhet auch gerade nicht ſehr viel darauf, jede mögliche Geſtalt der Kurve anzugeben, und es iſt zu unſerm Zwecke ſchon hinreichend, wenn ein beſonderes Integral der Gleichung Genüge thut, das zugleich auf gleichzeitige Schwingungen hinführt. Zu dem Ende ſetze man nach der Analogie der unendlich kleinen Pendelſchwingungen:

$$y = M \,\mathrm{Sin}\, \varepsilon t,$$

wo M einen Faktor bedeutet, der in Beziehung auf t unveränderlich iſt, und daher nur allein von s abhängen kann.

4) Man erhält hieraus

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -\varepsilon^2 M \,\mathrm{Sin}\, \varepsilon t,$$

und $\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right) = \frac{d^4M}{ds^4} . \mathrm{Sin}\, \varepsilon t,$ folglich (2)

$$c^4 . \frac{d^4M}{ds^4} = \varepsilon^2 M,$$

oder, wenn man $\varepsilon = \frac{c^2}{f^2}$ ſetzt,

$$f^4 \cdot \frac{d^4M}{ds^4} = M.$$

5) Dieſer Gleichung entſprechen folgende vier beſondere Werthe von M:

$$e^{\frac{s}{f}},\ e^{-\frac{s}{f}},\ \mathrm{Sin}\,\frac{s}{f},\ \mathrm{Cos}\,\frac{s}{f}.$$

Daher läßt ſich allgemein:

$$M = \alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{-\frac{s}{f}} + \gamma\,\mathrm{Sin}\,\frac{s}{f} + \delta\,\mathrm{Cos}\,\frac{s}{f}$$ annehmen;

und es wird folglich:

$$y = \mathrm{Sin}\,\frac{c^2t}{f^2}\left(\alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{-\frac{s}{f}} + \gamma\,\mathrm{Sin}\frac{s}{f} + \delta\,\mathrm{Cos}\frac{s}{f}\right).$$

6) Aus §. 329. bekommt man für die Summe der Momente aller auf den Bogen By wirkenden Kräfte in Bezug auf den Punkt y:

$$\frac{K}{2ag}\int ds\int ds\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -E\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right),$$

und für die bloße Summe dieſer Kräfte:

$$\frac{K}{2ag}\int ds\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -E\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right).$$

Da nun beyde Summen für den Anfangspunkt B verſchwinden, ſo folgt, daß für $s = o$, ſowohl $\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)$, als auch $\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right) = o$ ſeyn müſſe. Dieſe Bedingungen geben:

$$\alpha + \beta - \delta = 0, \text{ und } \alpha - \beta - \gamma = 0, \text{ oder}$$
$$\alpha + \beta = \delta, \text{ und } \gamma = \alpha - \beta.$$

7) Ferner iſt am andern befeſtigten Ende A, oder für $s = a$, $y = 0$, und weil daſelbſt die Kurve mit der Axe BA zuſammenfällt, auch $\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0$; folglich, wenn wir der Kürze wegen $\frac{a}{f} = \omega$ ſetzen:

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma \operatorname{Sin} \omega + \delta \operatorname{Cos} \omega = 0, \text{ und}$$
$$\alpha e^{\omega} - \beta e^{-\omega} + \gamma \operatorname{Cos} \omega - \delta \operatorname{Sin} \omega = 0.$$

8) Beyde Gleichungen addirt und ſubtrahirt, geben:

$$2\alpha e^{\omega} + \gamma (\operatorname{Sin} \omega + \operatorname{Cos} \omega) + \delta (\operatorname{Cos} \omega - \operatorname{Sin} \omega) = 0, \text{ und}$$
$$2\beta e^{-\omega} + \gamma (\operatorname{Sin} \omega - \operatorname{Cos} \omega) + \delta (\operatorname{Sin} \omega + \operatorname{Cos} \omega) = 0,$$

und wenn man darin für γ und δ ihre Werthe aus (6) ſubſtituirt, erhält man:

$$\alpha (\operatorname{Cos} \omega + e^{\omega}) - \beta \operatorname{Sin} \omega = 0$$
$$\beta (\operatorname{Cos} \omega + e^{-\omega}) + \alpha \operatorname{Sin} \omega = 0,$$

alſo $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\operatorname{Cos} \omega + e^{\omega}}{\operatorname{Sin} \omega} = \frac{-\operatorname{Sin} \omega}{\operatorname{Cos} \omega + e^{-\omega}}$,

mithin $-\operatorname{Cos} \omega \, (e^{\omega} + e^{-\omega}) = 2$,

woraus der Werth von ω leicht gefunden werden kann.

9) Es ſey nun nach Verlauf einer Zeit t', vom Anfange der Bewegung angerechnet, die Geſtalt der Kurve AyD wieder genau dieſelbe, als zur Zeit t, folglich die Ordinate y, die zu einerley Bogen $By = s$ ge-

hört, für die beyden Zeiten t und t′ von einerley Größe; ſo wird erfordert, daß Sin $(\frac{c^2 t}{f^2})$ = Sin $(\frac{c^2 t}{f^2})$ ſey. Daher hat man: $\frac{c^2 t'}{f^2} = \frac{c^2 t}{f^2} + 2\pi$, oder $t' = t + \frac{2\pi f^2}{c^2}$; mithin für die Zeit einer ganzen Schwingung, oder eines Hin- und Herganges

$$t' - t = \frac{2\pi f^2}{c^2} = \frac{2\pi a^2}{\omega^2 c^2} = \frac{2\pi a^2}{\omega^2}\sqrt{\frac{K}{2agE}}.$$

§. 331.

Aus der Gleichung (8) erhellet, daß Cos ω negativ ſeyn müſſe; daher kann entweder

$$\omega > \tfrac{1}{2}\pi,\ \tfrac{5}{2}\pi,\ \tfrac{9}{2}\pi \text{ u. ſ. w., oder}$$
$$< \tfrac{3}{2}\pi,\ \tfrac{7}{2}\pi,\ \tfrac{11}{2}\pi \text{ ſeyn.}$$

Man ſetze zuvörderſt $\omega = \frac{1}{2}\pi + \lambda$, ſo erhält man:

$$\text{Sin}\,\lambda\,(e^{\frac{1}{2}\omega} . e^{\lambda} + e^{-\frac{1}{2}\pi} e^{-\lambda}) = 2.$$

Nun iſt bekanntlich $\text{Sin}\,\lambda = \lambda - \frac{1}{6}\lambda^3 + \frac{1}{120}\lambda^5 - ..$

$$e^{\lambda} = 1 + \lambda + \tfrac{1}{2}\lambda^2 + \tfrac{1}{6}\lambda^3 + \tfrac{1}{24}\lambda^4 ..$$
$$e^{-\lambda} = 1 - \lambda + \tfrac{1}{2}\lambda^2 - \tfrac{1}{6}\lambda^3 + \tfrac{1}{24}\lambda^4 ..$$

Ferner $e^{\frac{1}{2}\pi} = 4{,}81048$, $e^{-\frac{1}{2}\pi} = 0{,}20788$, wodurch die Gleichung in folgende Reihe aufgelößt wird:

$$2 = 5{,}01836\,\lambda + 4{,}60260\,\lambda^2 + 1{,}67279\,\lambda^3 - 0{,}16728\,\lambda^5.$$

Die erſten beyden Glieder dieſer Reihe geben ſehr nahe $\lambda = 0{,}3$, und wenn man $\lambda = 0{,}3 + q$ ſetzt, bekommt man mit Zuziehung der übrigen:

$$0{,}035498 - 8{,}22616q = 0, \text{ alſo}$$
$$q = 0{,}00431.$$

Daher iſt genauer: $\lambda = 0{,}30431$, und

$\omega = \frac{1}{2}\pi + \lambda = 1{,}87511$, oder beynahe $= \frac{3}{5}\pi$. Eben ſo findet man, wenn man $\omega = \frac{3}{2}\pi - \lambda$ ſetzt, $\lambda = 0{,}01829$, folglich $\omega = 4{,}69408$, welches von $\frac{3}{2}\pi$ nur wenig verſchieden iſt. Noch unbedeutender ſind die Abweichungen der höhern Werthe des Winkels ω von $\frac{5}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$ u. ſ. f., ſo daß man ſie ohne Bedenken weglaſſen kann. Daher hat man für ω folgende Reihe von Werthen:

$$\tfrac{3}{5}\pi,\ \tfrac{3}{2}\pi,\ \tfrac{5}{2}\pi,\ \tfrac{7}{2}\pi,\ \tfrac{9}{2}\pi \text{ u. ſ. f.}$$

und folglich eben ſo viel verſchiedene Schwingungszeiten, die insgeſammt zu gleicher Zeit ſtatt haben.

§. 332.

Aus der gefundenen Zeit einer halben Schwingung der Ruthe $= \frac{\pi a^2}{\omega^2}\sqrt{\frac{K}{2agE}}$ ergiebt ſich die Anzahl der halben Schwingungen, die ſie in einer Sekunde verrichtet: $n = \frac{\omega^2}{\pi a^2}\sqrt{\frac{2agE}{K}}$.

Wofern dieſe Anzahl ſo groß iſt, oder die Schwingungen mit einer ſolchen Schnelligkeit geſchehen, daß dadurch höhere Töne hervorgebracht werden, ſo giebt es deren allemal eine unendliche Menge, und ihre Höhen wachſen in folgenden Verhältniſſen:

$$\frac{36}{25},\ 9,\ 25,\ 49,\ 81 \text{ u. ſ. w.}$$

Wegen ihres beträchtlichen Abſtandes wird man zwar nicht leicht mehr, als einen oder höchſtens zwey

von dieſen Tönen zu gleicher Zeit wahrnehmen können; daß aber demungeachtet die übrigen nicht minder wirklich vorhanden ſind, davon überzeugt man ſich hinlänglich durch nachſtehende Verſuche, die **Lambert** mit einem Meſſingdrathe angeſtellt hat:

1. So lange das freye ſchwingende Ende deſſelben unter 1 Zoll Länge hatte, war nur ein einziger deutlicher Ton bemerkbar.

2. Für 15 Lin. Länge bekam jener Ton mehr Tiefe, und ein zweyter wurde außer ihm vernehmlich, der ſich davon um zwey volle Oktaven und darüber noch um etwas mehr als eine Quinte unterſchied.

3. Bey zunehmender Länge ging der erſtere allmählig, wegen zu großer Tiefe, verloren, und der zweyte wurde jetzt Hauptton. Für eine Länge von ungefähr 30 Lin. kam ſchon ein dritter Ton zum Mitlaute.

4. Bey fortgeſetzter Verlängerung wurde auch der zweyte nach und nach undeutlich, und verlor ſich am Ende ganz. Der dritte nahm an Höhe immer mehr und mehr ab, und bey 50 Lin. Länge hatte ſich bereits ein vierter Ton eingemiſcht.

Man ſieht hieraus, wie mit wachſender Länge des Drathes von den vorangehenden Tönen einer nach dem andern verſchwindet, und ſtatt deſſen einer der folgenden hörbar wird; etwa ſo, wie eine Reihe von Gegenſtänden, die das Auge nicht mit einem Blicke überſchauen kann, bey allmähliger Veränderung des Geſichtsfeldes ſich nach und nach theilweiſe demſelben darſtellt.

Um auch in Anſehung der Folge der Töne die Rich-

tigkeit der Theorie, ſo viel es ſich aus dem Beygebrachten thun läßt, zu prüfen, ſetze man beym zweyten Verſuche den erſten Ton $= 1$, den zweyten $= p$, ſo iſt zu Folge der Angabe p etwas gröſer als $2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} = 6$. Nach dem oben gefundenen Verhältniſſe erhält man dagegen:

$$\frac{36}{25} : 9 = 1 : p; \text{ alſo } p = 6\tfrac{1}{4},$$

welches mit dem Verſuche ſehr gut übereinſtimmt.

§. 333.

Zur Beſtimmung der abſoluten Anzahl der Schwingungen, die die elaſtiſche Ruthe oder Klinge in einer Sekunde vollendet, iſt noch erforderlich, ihr Moment der Elaſticität E zu wiſſen. Man hänge in dieſer Abſicht an den Endpunkt B derſelben irgend ein Gewicht P, und bemerke, um wieviel dadurch dieſer Punkt tieſer, als durch das bloße Gewicht K der Ruthe herabgebogen wird. Wir wollen dieſen Raum $= h$ nennen.

Nach §. 319. 9. hat man nun gegenwärtig $p = 0$, $q = \frac{K}{a}$, $F = 0$, $G = -P$, und unter der Vorausſetzung, daß die Biegung gering ſey, $s = x$, mithin:

$$Ps + \frac{Ks^2}{2a} = E\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right).$$

Hiervon iſt das Integral:

$$B + \tfrac{1}{2}Ps^2 + \frac{Ks^3}{6a} = E\left(\frac{dy}{ds}\right),$$

und wenn man nochmals integrirt, erhält man:

$$A + Bs + \tfrac{1}{6}Ps^3 + \frac{Ks^4}{24a} = Ey.$$

Da am andern Endpunkte A, oder für $s = a$, ſowohl $y = o$, als auch $\frac{dy}{ds} = o$ iſt, ſo wird:

$$A + Ba + (\tfrac{1}{6}P + \tfrac{1}{24}K)\, a^2 = o, \text{ und}$$
$$Ba + (\tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{6}K)\, a^3 = o,$$
$$\text{mithin } A = (\tfrac{1}{3}P + \tfrac{1}{8}K)\, a^3$$

Heißt ferner f der ganze Raum BD, durch den der Punkt B herabſinkt, ſo iſt für $s = o$, $y = f$, alſo:

$$Ef = A = (\tfrac{1}{3}P + \tfrac{1}{8}K)\, a^3$$

Endlich ſey noch e die Tiefe, wozu der Punkt B herabgezogen wird, wenn die Ruthe bloß ihrem eigenen Gewichte ausgeſetzt iſt, ſo hat man für $P = o$, $f = e$; alſo $Ee = \tfrac{1}{8}Ka^3$, und weil $h = f - e$ iſt, $Eh = \tfrac{1}{3}Pa^3$, folglich $E = \frac{Pa^3}{3h}$.

Dieſer Werth für E in obiger Formel (§. 332.) ſubſtituirt, giebt:

$$n = \frac{\omega^2}{\pi}\sqrt{\frac{2gP}{3hK}}.$$

Verſuch. *) Ein Meſſingdrath, der 143 Rheinl. Linien lang war, und 11,4 Gran wog, wurde am freyen Ende B mit 5 Gran behängt, und dadurch um 24 Linien tiefer, als von ſeinem eigenen Gewichte, niedergebogen. Nachdem das Gewicht abgenommen war, machte er innerhalb 30 Sekunden Zeit 142 Schwingungen.

*) a. a. O. pag. 48.

Da hier von den Schwingungen der langſamſten Art die Rede iſt, ſo hat man $\omega = \frac{3}{5}\pi$, alſo $\frac{\omega^2}{\pi} = \frac{9}{25}\pi$; ferner iſt $g = 15\frac{5}{8} \cdot 144''' = 2250'''$, $h = 24'''$, $K = 11{,}4$, $P = 5$, folglich:

$$\log \sqrt{\frac{2gP}{3hK}} = 0{,}7189226$$

$$\text{dazu } \log \frac{\omega^2}{\pi} = 0{,}0534524$$

$$\text{ſiebt } \log n = 0{,}7723750\,.$$

$$n = 5{,}92.$$

Der Beobachtung zufolge iſt $n = 4{,}73$. Aus andern Verſuchen hingegen, die **Lambert** mit kürzeren Stücken deſſelben Drathes machte, fand er durch Hülfe der beobachteten Töne nach angeſtellter Reduktion $n = 5{,}43$ *); welches dem berechneten Werthe, und gewiß auch der Wahrheit, näher kommt, weil beym bloßen Abzählen der Schwingungen ſehr leicht ein merklicher Irrthum vorgehen kann.

§. 334.

Wenn die elaſtiſche Ruthe am Endpunkte A bloß mit einer Zange gefaßt iſt, ſo daß ſie ſich um dieſen Punkt frey drehen kann, ſo bleibt das nächſte Element bey A während der Bewegung nicht ſtets in ſeiner anfänglichen Lage; es behält aber dagegen ſeine geradlinigte Form, weil offenbar durch das Drehen der Ruthe die Biegung am Unterſtützungspunkte vermieden wird.

*) pag. 72.

Man hat alſo in dieſem Falle für $s = a$, $y = o$, und $\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) = o$; oder, wenn wieder $\frac{a}{f} = \omega$ geſetzt wird:

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma \operatorname{Sin} \omega + \delta \operatorname{Cos} \omega = o, \text{ und}$$

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} - \gamma \operatorname{Sin} \omega - \delta \operatorname{Cos} \omega = o.$$

Hieraus folgt:

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} = o, \text{ und}$$

$$\gamma \operatorname{Sin} \omega + \delta \operatorname{Cos} \omega = o,$$

und wenn man noch in letzterer Gleichung für γ und δ ihre Werthe aus §. 330. 6. ſubſtituirt, verwandelt ſie ſich in:

$$\alpha (\operatorname{Cos} \omega + \operatorname{Sin} \omega) + \beta (\operatorname{Cos} \omega - \operatorname{Sin} \omega) = o;$$

daher wird $\frac{-\beta}{a} = e^{2\omega} = \frac{\operatorname{Cos} \omega + \operatorname{Sin} \omega}{\operatorname{Cos} \omega - \operatorname{Sin} \omega} = \frac{1 + \operatorname{tang} \omega}{1 - \operatorname{tang} \omega} =$ $\operatorname{tang} (45^\circ + \omega)$.

Man ſetze $\operatorname{tang} (\frac{1}{4}\pi + \omega) = \operatorname{Cot} \varphi$, ſo erhält man:

$$\tfrac{1}{4}\pi + \omega = \tfrac{1}{2}\pi - \varphi,\ \tfrac{3}{2}\pi - \varphi,\ \tfrac{5}{2}\pi - \varphi \text{ u. ſ. w.}$$

folglich: $\omega = \frac{1}{4}\pi - \varphi,\ \frac{5}{4}\pi - \varphi,\ \frac{9}{4}\pi - \varphi$ u. ſ. f.

worin $\operatorname{Cot} \varphi = e^{2\omega}$, alſo φ deſto kleiner iſt, je größer ω genommen wird.

Was den erſten Werth von ω, nemlich $\frac{1}{4}\pi - \varphi$ betrifft, ſo iſt für dieſen offenbar $\varphi = \frac{1}{4}\pi$; denn dadurch wird $\omega = o$, und folglich der Gleichung Genüge geleiſtet.

Beym zweyten bekommt man $\operatorname{tang} \varphi = e^{-2\omega} = \frac{e^{2\varphi}}{e^{\frac{5}{2}\pi}}$, und weil hier wegen des beträchtlichen Nenners

ſchon vorauszuſehen iſt, daß Φ ſehr gering ſeyn müſſe, kann man $e^{2\Phi} = 1$ ſetzen, wodurch $\tang \varphi = \varphi = e^{-\frac{5}{2}\pi} = 0{,}000388$ wird. Es iſt alſo ſehr nahe $\omega = \frac{5}{4}\pi$. Noch weit geringer iſt der Bogen Φ bey den folgenden Werthen von ω, die daher von den Gliedern der Reihe $\frac{9}{4}\pi$, $\frac{13}{4}\pi$ u. ſ. f. um nichts verſchieden ſind, was irgend in Betracht gezogen zu werden verdiente.

Demnach ſind die Töne, die unter gegenwärtigen Umſtänden durch die elaſtiſche Ruthe hervorgebracht werden, höher, als in dem vorhin betrachteten Falle, und ſtehen unter einander in folgenden Verhältniſſen:

25, 81, 169, 289 u. ſ. w.

§. 335.

Aufgabe. Die Dauer der Schwingungen der elaſtiſchen Ruthe zu beſtimmen, wenn ſowohl ihr eines Ende A, wie auch das andere B in einer Seitenwand befeſtigt iſt; jedoch unter der Vorausſetzung, daß ſie dadurch weder gebogen noch geſpannt wird.

Aufl. 1) Da hier $F = 0$ iſt, ſo bekommt man eben die Fundamentalgleichung, wie im §. 330; daher bleibt auch der allgemeine Ausdruck für y (5) derſelbe, nur daß darin die Größe f, nebſt den Koefficienten α, β, γ, δ, auf andere Art beſtimmt werden müſſen.

2) Zuvörderſt iſt für $s = 0$, ſowohl y als $\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0$, mithin: $\alpha + \beta + \delta = 0$, und $\alpha - \beta + \gamma = 0$, oder $\gamma = \beta - \alpha$ und $\delta = -(\alpha + \beta)$.

3) Dann

3) Dann iſt auch für den andern Endpunkt, oder für $s = a$, y und $\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0$; alſo, wenn wieder $\frac{a}{f} = \omega$ heißt:

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma \operatorname{Sin} \omega + \delta \operatorname{Cos} \omega = 0, \text{ und}$$
$$\alpha e^{\omega} - \beta e^{-\omega} + \gamma \operatorname{Cos} \omega - \delta \operatorname{Sin} \omega = 0.$$

4) Wenn man dieſe Gleichungen theils addirt, theils ſubtrahirt, ſo erhält man:

$$2\alpha e^{\omega} + \gamma(\operatorname{Sin} \omega + \operatorname{Cos} \omega) + \delta(\operatorname{Cos} \omega - \operatorname{Sin} \omega) = 0,$$
$$2\beta e^{-\omega} + \gamma(\operatorname{Sin} \omega - \operatorname{Cos} \omega) + \delta(\operatorname{Sin} \omega + \operatorname{Cos} \omega) = 0,$$

und darin für γ und δ ihre Werthe ſubſtituirt, giebt:

$$\alpha(e^{\omega} - \operatorname{Cos} \omega) + \beta \operatorname{Sin} \omega = 0$$
$$\beta(e^{-\omega} - \operatorname{Cos} \omega) - \alpha \operatorname{Sin} \omega = 0;$$

woraus $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\operatorname{Sin} \omega}{e^{-\omega} - \operatorname{Cos} \omega} = \frac{\operatorname{Cos} \omega - e^{\omega}}{\operatorname{Sin} \omega}$, oder

$2 = \operatorname{Cos} \omega (e^{\omega} + e^{-\omega})$ folgt.

5) Da hiernach $\operatorname{Cos} \omega$ nothwendig poſitiv ſeyn muß, ſo führt dies auf folgende Reihe von Werthen, die der Bogen ω zu gleicher Zeit annimmt:

$$\tfrac{1}{2}\pi - \varphi, \ \tfrac{3}{2}\pi + \varphi', \ \tfrac{5}{2}\pi - \varphi'' \text{ u. ſ. f.}$$

6) Der erſte Werth für ω, der ſogleich in die Augen fällt, iſt $\omega = 0$. Außer ihm giebt es unter $\frac{1}{2}\pi$ keinen andern mehr: denn das Differenzial von obigem Ausdrucke, $\operatorname{Cos} \omega (e^{\omega} - e^{-\omega}) - \operatorname{Sin} \omega (e^{\omega} + e^{-\omega})$ iſt ſowohl für ächt gebrochene ω, als auch für ſolche, die zwiſchen 1 und $\frac{1}{2}\pi$ fallen, negativ, und zeigt alſo,

daß der Ausdruck von 2 bis zu o beſtändig abnehme, indem ω von o bis zu $\frac{1}{2}\pi$ anwächſt.

7) Durch den zweyten Werth $\frac{3}{2}\pi + \varphi'$ verwandelt ſich die Gleichung in folgende:

$$2 = \text{Sin}\,\varphi' \left(e^{\frac{3}{2}\pi} e^{\varphi'} + e^{-\frac{3}{2}\pi} e^{-\varphi'}\right)$$

und wenn man den Ausdruck rechter Hand in die Reihe auflößt, erhält man:

$$2 = 111{,}32669\,\varphi' + 111{,}30871\,\varphi'^2 \ldots$$

woraus $\varphi' = 0{,}01765$, und $\omega = 4{,}73002$ wird.

8) In den folgenden Werthen von ω ſind die Größen φ'', φ''' u. ſ. f. höchſt unbedeutend, und können daher füglich weggelaſſen werden, ſo daß alſo ω mit den Gliedern der Reihe $\frac{5}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$, $\frac{9}{2}\pi$ ſehr genau zuſammenfällt.

§. 336.

Wenn die beyden Enden der elaſtiſchen Ruthe A und B bloß gefaßt ſind, ſo hat man ſowohl für $s = o$, als $s = a$, y und $\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) = o$.

Daher wird $\alpha + \beta + \delta + o$, und $\alpha + \beta - \delta = o$, alſo $\delta = o$. Ferner

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma\,\text{Sin}\,\omega + \delta\,\text{Cos}\,\omega = o, \text{ und}$$

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} - \gamma\,\text{Sin}\,\omega - \delta\,\text{Cos}\,\omega = o.$$

Beyde Gleichungen von einander ſubtrahirt, giebt $\gamma\,\text{Sin}\,\omega + \delta\,\text{Cos}\,\omega = o$, folglich, weil $\delta = o$ iſt, $\gamma\,\text{Sin}\,\omega = o$, mithin $\text{Sin}\,\omega = o$; wodurch ω folgende Reihe von Werthen bekommt:

$$o,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi \text{ u. ſ. f.}$$

Es hat alſo dieſer Fall vor den übrigen das Auszeichnende, daß die verſchiedenen zu gleicher Zeit erfolgenden Töne unter ſich in einem beſonders einfachen Verhältniſſe ſtehen.

Etwas über Uhrfedern.

§. 337.

Ueber die zurückweichende Kraft aufgewundener Spiralfedern hat uns Berthoud in ſeinem Traité des horloges marines eine Menge ſehr ſchöner Verſuche mitgetheilt, die er durch Hülfe einer beſondern von ihm erfundenen Elaſticitätswage (balance elaſtique) angeſtellt hat. Ich will von der Einrichtung dieſes Inſtruments nur ſo viel hier angeben, als zum richtigen Verſtändniſſe der gedachten Verſuche nöthig ſeyn wird.

Fig. 51. 1. Die vertikale Scheibe pmq hat im Mittelpunkte eine Oeffnung, wodurch eine horizontale Axe C geht. Sowohl die Axe iſt für ſich, wie auch die Scheibe um ſie, beſonders beweglich.

2. Die Feder, womit der Verſuch gemacht werden ſoll, wird mit dem einen Ende am Anfange der Axe, und mit dem andern auf der Scheibe irgendwo in f befeſtigt.

3. Wenn man nun letztere um einen beliebigen Winkel oCn = φ nach der Seite pmq umdreht, und ſie ſodann in ihrer jetzigen Lage auf einer dahinter liegenden Fläche feſtſchraubt, ſo wird die Feder um eben

ſo viel aufgewunden, und bekommt dadurch eine ausdehnende Kraft, womit ſie die Axe nach eben der Richtung zu drehen ſtrebt. Wir wollen dieſe Kraft = W nennen.

4. Um ſie zu meſſen, wird an einen Punkt a des Armes Co, der an der Axe feſtſitzt, ſo viel Gewicht gehängt, daß derſelbe ſich wieder horizontal ſtellt, oder nach wie vor auf den fixen Punkt o hinweiſt.

5. Es ſey dies Gewicht = P, die Länge des Armes Ca = f, der Halbmeſſer der Axe = e, ſo hat man:

$$We = Pf, \text{ und folglich } W = \frac{Pf}{e},$$

ſo daß alſo für jeden Umdrehungswinkel φ die Kraft der Feder aus dem angehängten Gewichte, dem ſie das Gleichgewicht hält, gefunden werden kann.

§. 338.

Eine Feder, die 15 Zoll lang, $1\frac{7}{12}$ Linien breit, $\frac{1}{18}$ Lin. dick war, 48 Gran wog, $8\frac{1}{4}$ Lin. im Durchmeſſer hatte, und im natürlichen Zuſtande 8 Windungen machte, gab vermittelſt dieſer Wage folgende Reſultate:

φ	P Gran	P : φ
5	$9\frac{1}{2}$	1,90
10	19	1,90
15	$28\frac{1}{2}$	1,90
30	$57\frac{1}{2}$	1,92
40	$76\frac{1}{2}$	1,91
80	154	1,92

Man ſieht aus der dritten Kolumne, wie genau das angehängte Gewicht, und folglich auch die ausdehnende Kraft der Feder, dem Umdrehungswinkel proportional iſt. Dieſe Schlußfolge wird auch durch die übrigen Verſuche, die Berthoud unter ſehr mannigfaltigen Abänderungen angeſtellt hat, aufs Vollkommenſte beſtätigt, daß man wohl kein Bedenken tragen kann, ſie für einen allgemeinen Erfahrungsſatz gelten zu laſſen.

§. 339.

Aufgabe. Die Kraſt der ſchwingenden Spiralfeder in einer Taſchenuhr iſt gegeben, nebſt der Geſtalt und dem Gewichte der Unruhe, die ſie in Bewegung ſetzt; man ſucht die Dauer ihrer Schwingungen.

Aufl 1) Es ſey der Winkel, den die Unruhe nach Verlauf einer Zeit t beſchrieben hat, $= \omega$, ihr Moment der Trägheit in Bezug auf die Umdrehungsaxe $= Mh^2$, der Halbmeſſer der Axe $= e$; ferner die Kraft der Feder für eine Zuſammenwindung von 180° $= K$, ſo iſt ſie für gegenwärtigen Winkel $= \frac{K\omega}{\pi}$, und folglich ihr Moment, die Unruhe nach entgegengeſetzter Richtung zu drehen, $= \frac{K\omega e}{\pi}$, alſo:

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = - \frac{2gK\omega e}{\pi Mh^2}.$$

2) Dieſe Gleichung durch $\frac{d\omega}{dt}$ multiplicirt, und ſodann integrirt, giebt:

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = C - \frac{2geK\omega^2}{\pi Mh^2}$$

und wenn man die anfängliche Winkelgeſchwindigkeit $= \gamma$ ſetzt, wird für $t = 0$, $\gamma^2 = C$, mithin:

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = \gamma^2 - \frac{2geK\omega^2}{\pi Mh^2}.$$

3) Es ſey die größte Ausweichung der Unruhe, oder ihr halber Schwingungsbogen $= \zeta$, ſo wird für $\omega = \zeta$, $\frac{d\omega}{dt} = 0$, alſo: $\frac{2geK\zeta^2}{\pi Mh^2} = \gamma^2$, oder $\zeta = \gamma\sqrt{\frac{\pi Mh^2}{2geK}}$.

4) Hierdurch wird $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = \gamma^2 \cdot \left(1 - \frac{\omega^2}{\zeta^2}\right)$, folglich

$$\gamma dt = \frac{d\omega}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\zeta^2}\right)}},$$

und wenn man integrirt:

$$\gamma t = \zeta \cdot \text{arc Sin} \frac{\omega}{\zeta}.$$

5) Darin $\omega = \zeta$ geſetzt, giebt die Zeit einer halben Schwingung

$$t = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{\pi Mh^2}{2geK}} = \sqrt{\frac{\pi^3 h^2 M}{8geK}}.$$

§. 340.

Da in der gefundenen Formel die größte Ausweichung ζ der Unruhe oder Feder nicht vorkommt, ſo folgt, daß die Dauer ihrer Schwingungen unverändert dieſelbe ſey, ſie mögen in Bogen geſchehen, von welcher Größe man will. Dieſe merkwürdige Eigenſchaft der Spiralfedern, die beym Pendel nur für unendlich kleine Schwingungsbogen ſtatt findet, hat ſchon s'Graveſande aus mehreren angeſtellten Beobachtungen wahrgenommen. Man ſehe hierüber deſſen Elementa Phyſices Tom. I. art. 784.

§. 341.

Es ſey die Unruhe eine cylindriſche Platte vom Halbmeſſer $= f$, ihre Maſſe $= M$; ferner ein Gewicht, das an ihrem Umfange angebracht, der elaſtiſchen Kraft der Feder für den Umdrehungswinkel $\varphi =$ 180° das Gleichgewicht hält, $= G$, ſo wird $h^2 = \frac{1}{2} f^2$, und $Ke = Gf$, folglich die Zeit einer halben Schwingung

$$t = \sqrt{\frac{\pi^3 f M}{32 g G}},$$

welches eben die Formel iſt, die Atwood in ſeiner Abhandlung über die Vibrationen der Uhrfedern *) auf ähnliche Art hergeleitet hat. Er führt zu ihrer Prüfung folgendes Beyſpiel an:

Bey einer Uhr von Kendal, nach Harriſons Me-

*) S. Philos. transact. 1794 P. I. pag. 119. u. f.

thode gearbeitet, die Cook auf ſeiner letzten Reiſe in die Südſee mitnahm, war der Halbmeſſer der Unruhe f = $1\frac{1}{8}$ engl. Zoll, ihr Gewicht M = 42 Gran. Das Gewicht G fand er durch einen Verſuch = 48 Gran.

Man erhält alſo

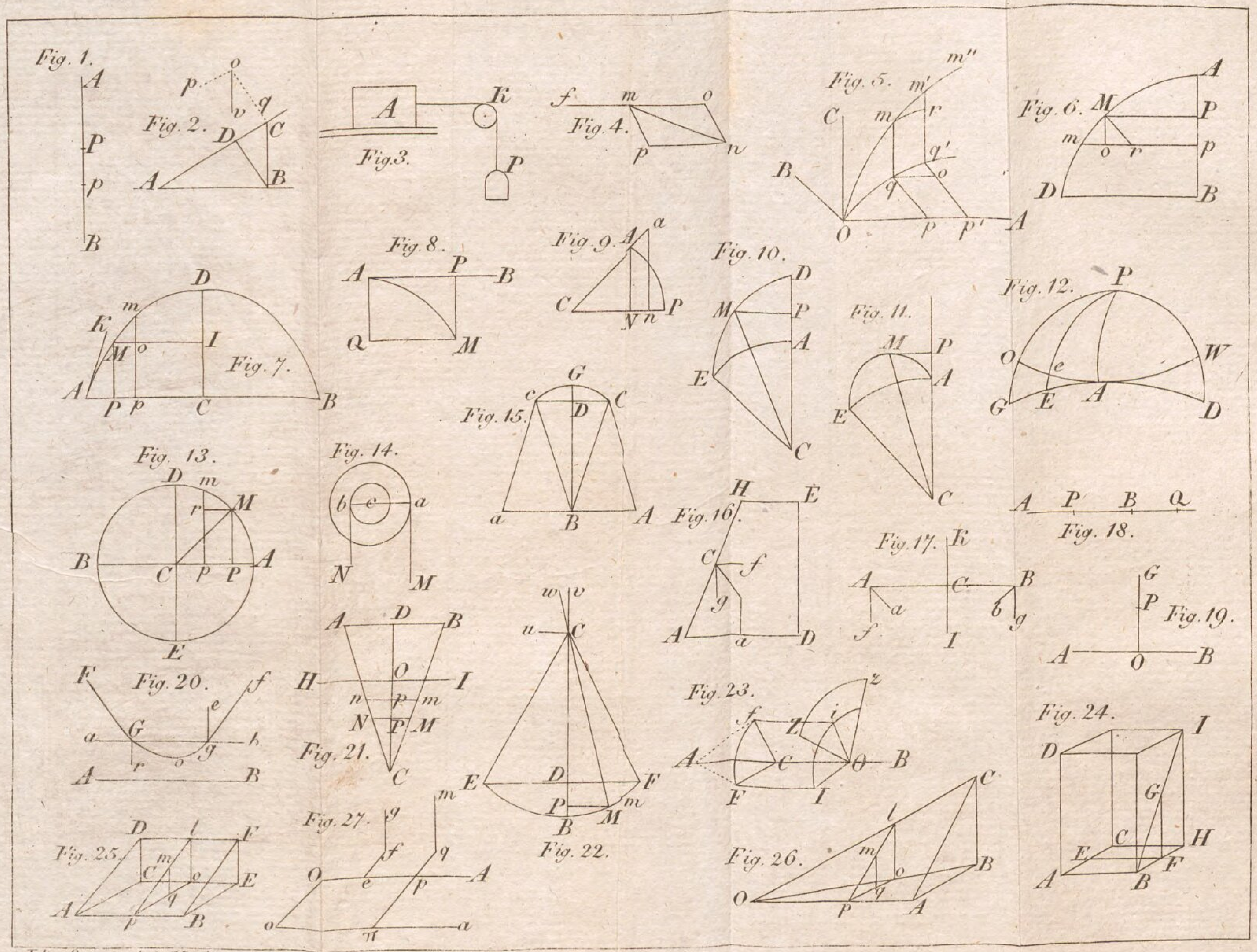
$$\log \pi^3 fM = 3{,}1658514$$
$$\log 32gG = 5{,}1709185$$
$$1{,}9949329 - 4$$
$$\log t = 0{,}9974664 - 2$$
$$t = 0{,}0994 \text{ Sec.}$$

Die Uhr machte in einer Secunde 5 Schwingungen, alſo war die Zeit einer halben Schwingung = 0,1 Sec., welche von der gefundenen nur um 0,0006 Sec. abweicht.

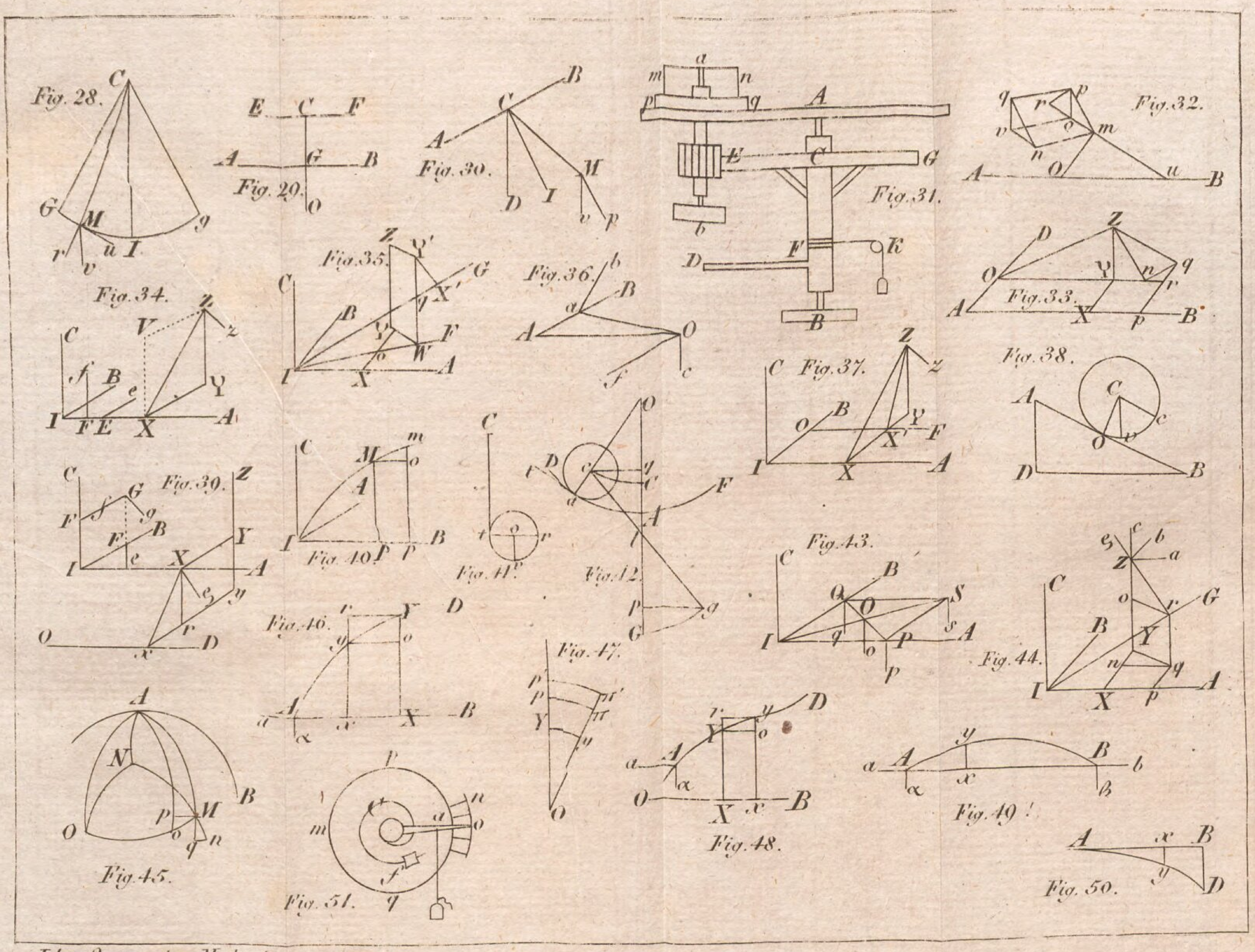
Bayerische Staatsbibliothek München

Druckfehler im zweyten Theile.

S. 32. Z. 3. fällt — weg.
— 64. — 7. von unten ſtatt $\mathrm{I} g t^2$, lies $\mathrm{I} - g t^2$
— 110. — 7. ſtatt T, lies I
— 133. — 14. fällt *) weg.
— 136. — 7. ſtatt $+\sqrt{}$, lies $=\sqrt{}$
— 139. — 5. von unten ſt. $-K-W$, l. $=K-W$
— 146. — 12. ſt. $u-u$, l. $u-n^3$
— 149. — 7. ſt. $-\varphi$, l. $,\varphi$
— 159. — 11. ſt. Hebelkraft, l. Hebekraft
— 349. — 9. ſt. vollendenden, l. vollenden
— 354. — 2. ſt. wenn, l. nenne



Ide System der Mechanic
Th. 2. Tab. I.



Ide System der Mechanic
Th. 2. Tab. II.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

[illegible]
Kindermann

6.D.

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ide, Johann J.

System der reinen und angewandten Mechanik fester Körper

Bd.: 1

Berlin 1802

Math.a. 122-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10080820-0